扩散方程在可测集上的能观性估计和时间最优控制bang–bang性

张 灿†

(武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 在前期工作[4–7]中, 笔者证明当观测集是Lebesgue正可测集时, 具有实解析系数抛物方程的能观性不等式成立. 在这些工作中, 笔者主要用到此类偏微分方程的解在正可测集上的定量估计式. 在这篇文章中, 将运用文献[19]的结论, 建立有界区域上具有非实解析系数扩散方程在时空区域Lebesgue可测集上的能观性不等式. 作为应用, 本文将给出相应的时间或范数最优控制问题的bang–bang性.

关键词: 能观性不等式; 零能控性; 可测集; 时间最优控制

引用格式: 张灿. 扩散方程在可测集上的能观性估计和时间最优控制bang–bang性. 控制理论与应用, 2022, 39(9): 1594 – 1600

DOI: 10.7641/CTA.2021.10352

Observability from measurable sets for diffusion equations and the bang–bang property of time optimal controls

ZHANG Can†

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan Hubei 430072, China)

Abstract: In our earlier works[4–7], we have proved observability inequalities from measurable sets hold for solutions of parabolic-type partial differential equations with real analytic coefficients in bounded domains. In these works, we have mainly utilized the propagation estimate of smallness for real analytic functions, and a telescoping series method. In the present paper, we shall establish the observability and controllability on measurable subsets in space and time variables for diffusion equations in bounded domains, without real analyticity assumptions on diffusion coefficients. As applications, we shall show bang–bang properties of time and norm optimal control problems governed by diffusion equations.

Key words: observability; controllability; measurable sets; time optimal control

Citation: ZHANG Can. Observability from measurable sets for diffusion equations and the bang–bang property of time optimal controls. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(9): 1594 – 1600

1 主要结果

偏微分方程的能观性不等式, 即用解的局部信息(如部分区域上的值)估计其在整体空间上的大小. 能观性不等式在研究偏微分方程的能控性, 范数和时间最优控制问题, 以及形状优化等方向上有着重要应用. 对于有界区域上线性抛物方程的能观性不等式研究, 当能观性不等式的观测集是开集时, 主要有两种证明方法: 第1种是法国Lebeau和Robbiano等人发明的谱方法[1], 该方法的想法是利用无穷步迭代思想和方程解的指数衰减性构造零控制, 从而间接地给出能观性估计式. 其最本质工具是椭圆方程的谱不等式. 但该方法只能处理偏微分方程的系数只依赖于空间变量情形; 第2种是俄罗斯Fursikov和Imanuvilov等人发明的全局Carleman估计方法[2], 该方法的特点是先建立含低阶项的能观性加权不等式, 然后选择合适的参数将多余的低阶项吸收掉(参看文献[3]).

但对于热方程, 若观测集不再是开集, 而是更加一般的Lesbegue可测集, 则如何建立相应的能观性不等式在过去较长一段时间内一直都未解决. 而这个问题是研究控制论中一重要问题–热方程时间最优控制bang–bang性的基础之一.

近年来, 作者与合作者们一起建立了一套导出期待的能观性估计的新方法[4–7]. 即证明当观测集是任何一个时空Lebesgue正可测集时, 具有解析系数的抛

收稿日期: 2021−04−26; 录用日期: 2021−08−24.

†通信作者. E-mail: canzhang@whu.edu.cn; Tel.: +86 13618634875.

本文责任编委: 郭宝珠.

国家自然科学基金项目(11971363), 武汉大学青年学术团队建设项目(413100085)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11971363) and the Academic Team Building Plan for Young Scholars from Wuhan University (413100085).

物方程的能观性不等式成立. 该方法依赖于此类偏微分方程的定量唯一延拓性估计式, 通过发展经典的实解析函数的定量估计式, 得到解在正可测集上的能观性估计. 该方法具有3个优点: 第一, 能够给出能观性常数可以只依赖于空间观测区域的大小, 但不依赖于其形状与位置; 第二, 可以得到时间变量在正可测集上的能观性估计式; 第三, 避开了传统Carleman型估计式, 从而可以处理偏微分方程组情形.

准确地说, 假设u满足如下的二阶线性抛物方程:

$$\begin{cases}\partial_t u-\operatorname{div}(A\nabla u)=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ u=0, \qquad\qquad\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ u(\cdot,0)\in L^2(\Omega),\end{cases}\tag{1}$$

在这里, Ω是$\mathbb{R}^n$中一个有界的C^2光滑区域, ∇和div分别是$\mathbb{R}^n$中的梯度算子和散度算子, 对称的系数矩阵$A:\Omega\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}$满足Lipschitz连续性和一致椭圆型条件, 即存在一个常数$L\geqslant 1$使得

$$\begin{cases}|A(x,t)-A(y,s)|\leqslant L(|x-y|+|t-s|),\\ \forall x,y\in\Omega,\ t,s>0,\\ L^{-1}|\xi|^2\leqslant\langle A(x,t)\xi,\ \xi\rangle\leqslant L|\xi|^2,\\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega,\ t>0.\end{cases}$$

在系数满足实解析性的假设条件下, 笔者在文献[6]中得到了下面的结论:

定理 1[6]　令$T\in(0,1]$和$B_{2R}(x_0)\subset\Omega$. 假设方程(1)中的系数矩阵$A(\cdot)$在柱形区域$B_{2R}(x_0)\times(0,1)$中关于空间变量是实解析的. 设$\mathcal{O}\in B_R(x_0)\times(0,T)$为一个$(n+1)$维的Lebesgue正可测集. 则存在常数$C>0$使得能观性不等式

$$\Big(\int_\Omega|u(x,T)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\leqslant C\int_{\mathcal{O}}|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

对方程(1)所有解都成立, 其中常数C只依赖于$\Omega,\mathcal{O},L,n,T$和系数的实解析参数.

此外, 对于任意初值$z_0\in L^2(\Omega)$, 总可以找到一个控制函数$f\in L^\infty(\Omega\times(0,T))$, 其支撑集包含在$\mathcal{O}$中, 使得

$$\begin{cases}\partial_t z-\operatorname{div}(A\nabla z)=f,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ z(x,t)=0, \qquad\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ z(x,0)=z_0,\ z(x,T)=0,\ \text{a.e. }x\in\Omega.\end{cases}$$

文献[6]主要创新点是方程(1)的解关于空间变量的实解析收敛半径可以不依赖于时间变量. 具体来说, 在方程系数满足实解析性条件下, 本文证明其解满足定量的实解析性估计式

$$|\partial_x^\alpha u(x,t)|\leqslant\rho^{-1-|\alpha|}|\alpha|!\mathrm{e}^{1/(\rho t)}\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)},$$
$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ x\in B_R(x_0),\ t\in(0,1),$$

其中常数$\rho\in(0,1)$. 该不等式允许本文对实解析函数$u(\cdot,t)$使用解析函数的小量传播性定量估计. 值得注意的是, 由于实解析收敛半径不依赖于时间变量, 从而得到的能观性常数关于时间变量可以是一致的.

在上述提到的一系列研究工作中, 虽然笔者引入的方法避开了传统的Carleman估计式, 但该方法的不足之处是, 它只能适用于具有实解析系数的抛物型方程(组). 在这篇文章中, 将运用新工具研究有界区域上具有非实解析系数的扩散方程在Lebesgue可测集上的能观性不等式.

在通篇文章中, 总是假定$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为一个具有$C^2$光滑边界的有界区域. 设函数$u$满足如下的扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t u-\operatorname{div}(A(x)\nabla u)=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ u=0, \qquad\qquad\qquad\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ u(\cdot,0)\in L^2(\Omega),\end{cases}\tag{2}$$

其中对称矩阵函数$A:\Omega\to\mathbb{R}^{n\times n}$是$C^1$的, 且满足一致椭圆型条件, 即存在常数$L\geqslant 1$使得

$$\begin{cases}L^{-1}|\xi|^2\leqslant\langle A(x)\xi,\xi\rangle\leqslant L|\xi|^2,\\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega.\end{cases}\tag{3}$$

熟知, 该方程(2)有唯一解

$$u\in C([0,\infty);L^2(\Omega))\cap L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)).$$

这篇文章的主要结果是如下所述的能观性与能控性.

定理 2　设$T>0$和$\mathcal{O}$是时空区域$\Omega\times(0,T)$内一个$(n+1)$维Lebesgue正可测集. 则下面的两个论述成立:

i) 存在正常数$C>0$, 其只依赖于$\Omega,\mathcal{O},L,n$和T, 使得方程(2)的所有解都满足如下的能观性不等式

$$\Big(\int_\Omega|u(x,T)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\leqslant C\int_{\mathcal{O}}|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

ii) 对于任意初值$z_0\in L^2(\Omega)$, 存在一个控制函数$f\in L^\infty(\Omega\times(0,T))$, 其支撑集包含在$\mathcal{O}$中, 使得

$$\begin{cases}\partial_t z-\operatorname{div}(A(x)\nabla z)=f,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ z=0, \qquad\qquad\qquad\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ z(x,0)=z_0,\ z(x,T)=0,\text{a.e. }x\in\Omega.\end{cases}$$

注 1　显然, 方程(2)的解不再关于空间变量实解析, 从而文献[4–6, 8]中发明的解析性技巧不适用于建立该方程的解在可测集上的能观性不等式.

注 2　上述能控性结果在时间或者范数最优控制问题的bang–bang性研究中有重要作用. 该结果在这两类最优控制问题的等价性研究中也有重要的应用. 关于这方面的研究, 感兴趣的读者可以参看文献[4–6, 9–16]. 在本文的第3节中, 将给出定理2在扩散方程的时间和范数最优控制问题中的应用.

注 3 Burq等人最近在文献[17]中通过构造双流形的复杂技巧, 对于系数矩阵满足$W^{2,\infty}$正则性的情形给出了类似的能观性不等式. 一方面, 本文对于系数矩阵$A(\cdot)$仅满足C^1正则性的情形, 通过利用文献[18]中关于椭圆系统的插值不等式结果, 可以推得相应的能观性不等式成立. 另一方面, 本文的证明相较于文献[17]更加直接与简洁.

注 4 对于一般二阶抛物方程, 据笔者所知, 其解在正可测集上的能观性不等式仍然未知, 这也是笔者将来继续研究的方向.

值得一提的是, Logunov等人[19]对于二阶椭圆微分方程的解及其梯度, 建立了在可测集上的Hölder型估计式. 其所采用的方法不依赖于系数的实解析性条件. 在本文中, 将直接运用文献[19]中的结果, 以及文献[1,20–21]中的经典方法, 证明式(2)的解在时空Lebesgue可测集上的能观性不等式成立.

该文剩下的内容安排如下: 将在第2节中证明定理2; 在第3节中将给出其在时间和范数最优控制问题中的应用; 最后将在第4节中给出两个注记.

常用记号. 在通篇文章中, 记$C(\cdots)$为一个正常数, 且其只依赖括弧里的参量. 这样的记号同样适用于θ,γ等其他常量. 对于任意一个Lebesgue可测集$E\subset\mathbb{R}^n$, 本文令χ_E和$|E|$分别表示其特征函数和Lebesgue测度. 记$B_R(x_0)$为$\mathbb{R}^n$中以x_0为圆心, 半径为$R>0$的开球, 同时记$\Delta_R(x_0,0)$为$\mathbb{R}^{n+1}$中以$(x_0,0)$为圆心, 半径为R的开球.

2 定理2的证明

在给出定理2的证明之前, 本文首先引用文献[19]定理5.1中关于椭圆方程解的小量传播性估计.

引理 1 设$B_{2R}(x_0)\subset\Omega$, 其中$R\in(0,1)$, 且$\omega\subset B_{R/2}(x_0)$是一个$n$维Lebesgue正可测集. 若$U$在$\Omega\times(-4,4)$内满足方程$\operatorname{div}(A(\cdot)\nabla U)+\partial_y^2U=0$, 其中系数矩阵$A(\cdot)$满足条件(3), 则存在常数$C=C(L,R,|\omega|)>0$和$\gamma=\gamma(L,R,|\omega|)\in(0,1)$使得

$$\begin{aligned}&\sup_{\Delta_R(x_0,0)}|(\nabla U,\partial_yU)|\leqslant\\&C(\sup_{\omega\times\{0\}}|(\nabla U,\partial_yU)|)^{\gamma}\times\\&(\sup_{\Delta_{2R}(x_0,0)}|(\nabla U,\partial_yU)|)^{1-\gamma}.\end{aligned}\tag{4}$$

注 5 值得指出的是, 文献[19]给出了较上述引理更加一般的结论.

注 6 在上述引理中, 笔者强调不等式(4)中的常数C和γ只依赖于观测集的测度, 并不依赖于其位置和形状. 这点在本文主要定理的证明中非常重要. 实际上, 类似的想法已经在笔者先前工作[4–6,8]中用到过.

利用引理1, 可以得到可测集上的谱不等式. 该谱不等式涉及到椭圆算子特征向量的有限项线性组合. 对于具有实解析系数的椭圆算子, 这类不等式已经在笔者的前期工作[5,8]中研究过. 值得注意的是, 这类在非空开集上的谱不等式的研究最早可以追溯到文献[1,18,20–22]中. 在那里, 通过运用该不等式和一个巧妙的无穷步迭代技术, 人们可以建立对应的扩散方程的精确零能控性.

现在, 本文令$\{\lambda_j\}_{j\geqslant1}$, 其中$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\to\infty$, 和$\{e_j\}_{j\geqslant1}$分别为满足零边值条件的椭圆算子$-\operatorname{div}(A(\cdot)\nabla\cdot)$的特征值和规范化特征函数, 这里的系数矩阵$A(\cdot)$满足条件(3). 即

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(A(x)\nabla e_j(x))=\lambda_je_j(x), & x\in\Omega,\\ e_j(x)=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

于是, 有如下的谱不等式结果:

引理 2 假设$B_{4R}(x_0)\subset\Omega$, 其中$R\in(0,1)$, $\omega\subset B_{R/2}(x_0)$是一个$n$维Lebesgue正可测集. 则存在常数$C=C(L,R,|\omega|)>0$使得下面的不等式:

$$\begin{aligned}&\|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j\|_{L^2(\Omega)}=(\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_j^2)^{1/2}\leqslant\\&C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}\|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j\|_{L^1(\omega)}\end{aligned}\tag{5}$$

对所有实数序列$\{a_j\}_{j\geqslant1}$均成立, 其满足$\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2<\infty$.

证 对于每一个$\lambda>0$和任何的实数序列$\{a_j\}_{j\geqslant1}$, 其满足$\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2<\infty$, 通过添加一个额外的变量$y$, 定义

$$\begin{aligned}&U(x,y):=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_j\frac{\sinh(\sqrt{\lambda_j}y)}{\sqrt{\lambda_j}}e_j(x),\\&(x,y)\in\Omega\times(-4,4).\end{aligned}$$

于是, U满足

$$\begin{cases}\operatorname{div}(A(x)\nabla U)+\partial_y^2U=0, & (x,y)\in\Omega\times(-4,4),\\ U=0, & (x,y)\in\partial\Omega\times(-4,4),\\ U(x,0)=0,\\ \partial_yU(x,0)=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j(x),\ \text{a.e. } x\in\Omega.\end{cases}\tag{6}$$

首先, 根据文献[18]中式(6.2), 有下述插值不等式成立

$$\begin{aligned}\|U\|_{H^1(\Omega\times(-1,1))}\leqslant C\|\partial_yU(\cdot,0)\|^{\theta}_{L^2(B_R(x_0))}\times\\ \|U\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega\times(-2,2))},\end{aligned}\tag{7}$$

其中: 常数$C=C(\Omega,L,R)>0$, $\theta=\theta(\Omega,L,R)\in(0,1)$. 然后, 对方程(6)运用引理1得到

$$\begin{aligned}&\|(\nabla U,\partial_yU)\|_{L^\infty(\Delta_R(x_0,0))}\leqslant\\&C\|(\nabla U(\cdot,0),\partial_yU(\cdot,0))\|^{\theta}_{L^\infty(\omega)}\times\\&\|(\nabla U,\partial_yU)\|^{1-\theta}_{L^\infty(\Delta_{2R}(x_0,0))},\end{aligned}\tag{8}$$

这里$C=C(R,L,|\omega|)>0$, $\theta=\theta(R,L,|\omega|)\in(0,1)$.

接下来, 结合方程(6)中的第3行, 有$\nabla U(x,0)=0$, a.e. $x\in\Omega$. 由式(8)和标准的椭圆方程的正则性估计(参见文献[23]中的定理8.32)

$$\|(\nabla U,\partial_y U)\|_{L^\infty(\Delta_{2R}(x_0,0))}\leqslant C\|U\|_{H^1(\Delta_{3R}(x_0,0))},$$

推得

$$\begin{aligned}&\|\partial_y U(\cdot,0)\|_{L^\infty(B_R(x_0))}\leqslant\\&\|(\nabla U,\partial_y U)\|_{L^\infty(\Delta_R(x_0,0))}\leqslant\\&C\|\partial_y U(\cdot,0)\|^{\theta}_{L^\infty(\omega)}\|U\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega\times(-4,4))}.\end{aligned}$$

联合式(6)–(7), 上述不等式蕴含

$$\begin{aligned}&\|U\|_{H^1(\Omega\times(-1,1))}\leqslant\\&C\|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j\|^{\theta}_{L^\infty(\omega)}\|U\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega\times(-4,4))},\end{aligned}$$

这里$C=C(\Omega,R,L,|\omega|)>0$, $\theta=\theta(\Omega,R,L,|\omega|)\in(0,1)$. 另外, 注意到下述事实(参见文献[20–21]):

$$\|U\|_{H^1(\Omega\times(-k,+k))}\cong C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}(\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_j^2)^{1/2},$$

其中$k=1,4$. 因此, 有

$$(\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_j^2)^{1/2}\leqslant C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}\|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j\|_{L^\infty(\omega)},\tag{9}$$

其中常数$C=C(\Omega,R,L,|\omega|)$.

最后, 证明不等式(9)中的L^∞范数可以换成L^1范数. 为此, 定义

$$\widetilde{\omega}:=\{x\in\omega:|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j(x)|\leqslant\frac{2}{|\omega|}\int_\omega|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j(x)|\mathrm{d}x\}.\tag{10}$$

于是, 不难验证下面的不等式成立:

$$\int_\omega|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_{\omega\setminus\widetilde{\omega}}|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{2|\omega\setminus\widetilde{\omega}|}{|\omega|}\int_\omega|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j(x)|\mathrm{d}x.$$

这蕴涵着

$$|\omega\setminus\widetilde{\omega}|\leqslant|\omega|/2.$$

此即,

$$|\widetilde{\omega}|\geqslant|\omega|/2.$$

现在, 将不等式(9)应用到集合$\widetilde{\omega}$上得到

$$(\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_j^2)^{1/2}\leqslant C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}\|\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}a_je_j\|_{L^\infty(\widetilde{\omega})}.$$

根据式(10)和上述不等式, 立刻推得所期望的不等式(5)成立.　　证毕.

事实上, 引理2和方程(2)的解的指数衰减性蕴涵着如下的插值不等式:

引理 3　设$B_{4R}(x_0)\subset\Omega$. 令$\omega\subset B_{R/2}(x_0)$是一个正可测集. 则存在常数$C=C(\Omega,|\omega|,R)>0$和$\gamma=\gamma(\Omega,|\omega|,R)\in(0,1)$使得对任意$t>s\geqslant0$, 下面的估计式对方程(2)的所有解均成立:

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\mathrm{e}^{\frac{C}{t-s}}\|u(\cdot,t)\|^{\gamma}_{L^1(\omega)}\times\\\|u(\cdot,s)\|^{1-\gamma}_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{11}$$

证　根据时间平移不变性, 只需在$s=0$和$t>0$的情形下, 证明不等式(11)成立即可. 为此, 先任意取定初值$u(\cdot,0)\in L^2(\Omega)$. 对任意$\lambda>0$, 令$u_1$和$u_2$分别满足下述两个方程:

$$\begin{cases}\partial_t u_1-\mathrm{div}(A(x)\nabla u_1)=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\u_1=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\u_1(x,0)=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}(\int_\Omega u(x,0)e_j(x)\mathrm{d}x)e_j(x),\\\text{a.e. } x\in\Omega,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\partial_t u_2-\mathrm{div}(A(x)\nabla u_2)=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\u_2=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\u_2(x,0)=\sum_{\lambda_j>\lambda}(\int_\Omega u(x,0)e_j(x)\mathrm{d}x)e_j(x),\\\text{a.e. } x\in\Omega.\end{cases}$$

显然, $u=u_1+u_2$于$\Omega\times[0,\infty)$中, 且注意到

$$\begin{aligned}u_1(x,t)=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}(\int_\Omega u(x,0)e_j(x)\mathrm{d}x)\mathrm{e}^{-\lambda_j t}e_j(x),\\x\in\Omega,t>0,\end{aligned}$$

$$\|u_2(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\mathrm{e}^{-\lambda t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)},\ t>0.$$

于是, 对$u_1(\cdot,t)$运用引理2可以推得

$$\|u_1(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}\|u_1(\cdot,t)\|_{L^1(\omega)},$$

其中常数$C=C(\Omega,R,L,|\omega|)>0$.

因此, 对于任意时刻$t>0$, 有

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\\&\|u_1(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}+\|u_2(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\\&C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}\|u_1(\cdot,t)\|_{L^1(\omega)}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\\&C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}(\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\omega)}+\|u_2(\cdot,t)\|_{L^1(\omega)})+\\&\mathrm{e}^{-\lambda t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\\&C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}(\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\omega)}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

即对于任意$\lambda>0$, 下面的不等式均成立

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\mathrm{e}^{C\sqrt{\lambda}}\times\\&(\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\omega)}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}\tag{12}$$

最后, 通过在不等式(12)的右端关于参量$\lambda>0$求最小值, 立刻得到式(11)成立.　　证毕.

注 7　当ω为Ω的一个非空开子集时, 上述插值不等式(11)在文献[24]中采用不同的方法建立.

现在, 给出定理2的证明.

不失一般性, 总是可以假设$\mathcal{O}\subset B_{4R}(x_0)\times(0,T)$,

其中$B_{4R}(x_0)\subset\Omega$, $R\in(0,1)$. 根据经典的对偶性方法(参见文献[4,25]), 不难验证, 命题ii)是i)的直接推论. 因此, 只需证明i)即可.

为此, 对任意$t\in(0,T)$, 先定义时间切片

$$\mathcal{O}_t:=\{x\in B_{4R}(x_0):(x,t)\in\mathcal{O}\},$$

以及

$$E:=\{t\in(0,T):|\mathcal{O}_t|\geqslant\frac{|\mathcal{O}|}{2T}\}.\tag{13}$$

由Fubini定理, 上述集合E为一个Lebesgue可测集, 并且其测度有下界

$$|E|\geqslant|\mathcal{O}|/(2|B_{4R}|).$$

显然,

$$\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)\leqslant\chi_{\mathcal{O}}(x,t)\ \text{a.e.}\ (x,t)\in\Omega\times(0,T).$$

然后, 任意取定E的一个Lebesgue密度点$\ell\in(0,T)$. 对于每一个$q\in(0,1)$ (其值随后确定), 依据文献[12]中的命题2.1, 可以找到一个单调递减的序列$\{\ell_m\}_{m=1}^{\infty}$, 满足$\lim\limits_{m\to\infty}\ell_m=\ell$, 以及

$$\begin{aligned}&\ell_{m+1}-\ell_{m+2}=q(\ell_m-\ell_{m+1}),\\&|E\cap(\ell_{m+1},\ell_m)|\geqslant\frac{\ell_m-\ell_{m+1}}{3},\ \forall m\geqslant1.\end{aligned}\tag{14}$$

定义

$$\tau_m:=\ell_{m+1}+\frac{\ell_m-\ell_{m+1}}{6},\ \forall m\geqslant1.$$

由上述性质, 不难验证如下不等式成立:

$$|E\cap(\tau_m,\ell_m)|\geqslant(\ell_m-\ell_{m+1})/6.\tag{15}$$

于是, 对于任意$m\geqslant1$和$t\in E\cap(\tau_m,\ell_m)$, 应用引理3 (其中取$\omega=\mathcal{O}_t$)可以推得

$$\|u(\cdot,\ell_m)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant(C\mathrm{e}^{\frac{C}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathcal{O}_t)})^{\vartheta}\times\|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}^{1-\vartheta},$$

其中常数$C=C(\Omega,L,T,R,|\mathcal{O}|)>0$和$\vartheta=\vartheta(\Omega,L,T,R,|\mathcal{O}|)\in(0,1)$. 注意, 这里的常数依赖关系用到性质(13). 将上述不等式关于时间变量在可测集$E\cap(\tau_m,\ell_m)$上积分, 再结合Hölder不等式和式(15), 有

$$\|u(\cdot,\ell_m)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant(C\mathrm{e}^{\frac{C}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\int_{\ell_{m+1}}^{\ell_m}\int_\Omega\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)|u|\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{\vartheta}\times\|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}^{1-\vartheta}.$$

这蕴含着对所有$\varepsilon>0$成立

$$\|u(\cdot,\ell_m)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\varepsilon\|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon^{-\frac{1-\vartheta}{\vartheta}}C\mathrm{e}^{\frac{C}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\times\int_{\ell_{m+1}}^{\ell_m}\int_\Omega\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

其等价于

$$\varepsilon^{1-\vartheta}\mathrm{e}^{-\frac{C}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\|u(\cdot,\ell_m)\|_{L^2(\Omega)}-\varepsilon\mathrm{e}^{-\frac{C}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\int_{\ell_{m+1}}^{\ell_m}\int_\Omega\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall\varepsilon>0.$$

在上面的不等式中令$\varepsilon=\mathrm{e}^{-1/(\ell_m-\ell_{m+1})}$得到

$$\mathrm{e}^{-\frac{C+1-\vartheta}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\|u(\cdot,\ell_m)\|_{L^2(\Omega)}-\mathrm{e}^{-\frac{C+1}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\int_{\ell_{m+1}}^{\ell_m}\int_\Omega\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\tag{16}$$

最后, 取定常数

$$q=\frac{C+1-\vartheta}{C+1},$$

其中C和ϑ是出现在不等式(16)中的相同常数. 因此, 根据式(16)和式(14)中的第1个等式, 对所有$m\geqslant1$, 有

$$\mathrm{e}^{-\frac{C+1-\vartheta}{\ell_m-\ell_{m+1}}}\|u(\cdot,\ell_m)\|_{L^2(\Omega)}-\mathrm{e}^{-\frac{C+1-\vartheta}{\ell_{m+1}-\ell_{m+2}}}\|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\int_{\ell_{m+1}}^{\ell_m}\int_\Omega\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

将上述不等式关于参量m从$m=1$到无穷大求和, 发现

$$\mathrm{e}^{-\frac{C+1-\vartheta}{\ell_1-\ell_2}}\|u(\cdot,\ell_1)\|_{L^2(\Omega)}-\lim_{m\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{C+1-\vartheta}{\ell_{m+1}-\ell_{m+2}}}\|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

注意到如下简单事实

$$\lim_{m\to+\infty}\ell_{m+1}-\ell_{m+2}=0,\ \|u(\cdot,\ell_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}<+\infty,$$

以及$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|u(\cdot,\ell_1)\|_{L^2(\Omega)}$, 上述不等式化简为

$$\mathrm{e}^{-\frac{C+1-\vartheta}{\ell_1-\ell_2}}\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega\chi_E(t)\chi_{\mathcal{O}_t}(x)|u(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

此即完成了结论i)的证明.

3 最优控制的bang–bang性

时间和范数最优控制问题一直以来都是数学控制理论中的一类重要问题. 近年来, 汪更生教授等人在这方面做出了许多有影响的工作(参见专著[15]).

在这一节中, 将应用定理2分别推导有界区域上扩散方程的时间和范数最优控制的bang–bang性. 为此, 令Ω如上文所述, 令$\omega\subset\Omega$为一个非空开子集. 先介绍时间最优控制问题. 设$M>0$, 定义如下的控制约束集:

$$\mathcal{U}_M:=\{f\in L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^+):|f(x,t)|\leqslant M,$$

a.e. $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+\}$.

考察下述时间最优控制问题:

$$(TP)^M: T^*(M):=\inf_{f\in\mathcal{U}_M}\{t>0: z(x,t;f)=0,\ \text{a.e. } x\in\Omega\},$$

在这里, $z(\cdot,\cdot;f)$满足如下的控制系统:

$$\begin{cases}\partial_t z-\operatorname{div}(A(x)\nabla z)=\chi_\omega(x)f,\ (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\\ z(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+,\\ z(x,0)=z_0(x),\ x\in\Omega,\end{cases}$$

其中$z_0\in L^2(\Omega)$.

对于时间最优控制问题$(TP)^M$, 称$T^*(M)$和f^*分别为最优时间和时间最优控制, 如果相应的终端状态满足$z(x,T^*(M);f^*)=0$, a.e. $x\in\Omega$. 同样的, 称$(TP)^M$有bang–bang性, 如果任何时间最优控制f^*均满足$|f^*(x,t)|=M$, a.e. $(x,t)\in\omega\times(0,T^*(M))$.

根据定理2和齐次扩散方程解的指数衰减性, 可以运用文献[4]中相同的方法证明最优时间$T^*(M)$存在, 且问题$(TP)^M$至少存在一个时间最优控制. 于是, 本文不加证明地阐述如下的结论:

推论 1 对任意$M>0$, 相应的时间最优控制问题$(TP)^M$均满足bang–bang性. 从而, 该问题存在唯一的时间最优控制.

注 8 人们现在知道, 可测集上的能控性可以导出时间最优控制bang–bang性. 据笔者所知, 文献[11]最早注意到这个事实, 这个想法随后在文献[4,7,12–15,26]中得到深入发展.

接下来, 建立范数最优控制问题的bang–bang性. 对任意时间$T>0$, 考察如下的范数最优控制问题:

$$(NP)^{\mathrm{T}}: M^*(T):=\inf\{\|f\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))}: z(x,T;f)=0 \text{ a.e. } x\in\Omega\},$$

这里, $z(\cdot,\cdot;f)$满足下面的受控方程

$$\begin{cases}\partial_t z-\operatorname{div}(A(x)\nabla z)=\chi_\omega(x)f,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ z=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ z(x,0)=z_0(x),\ x\in\Omega,\end{cases}$$

这里的初始值$z_0\in L^2(\Omega)$.

类似于时间最优控制问题, 对范数最优控制问题$(NP)^{\mathrm{T}}$, 称$M^*(T)$和f^*分别为最优范数和范数最优控制, 如果对应的终端状态满足$z(x,T;f^*)=0$, a.e. $x\in\Omega$. 并且, 称$(NP)^{\mathrm{T}}$满足bang–bang性, 若任何范数最优控制f^*满足$|f^*(x,t)|=M^*(T)$, a.e. $(x,t)\in\omega\times(0,T)$.

根据定理2, 运用文献[4]中相同的方法可以证明$M^*(T)$大于零, 以及$(NP)^{\mathrm{T}}$至少存在一个范数最优控制. 更进一步, 有下面的推论.

推论 2 对任意$T>0$, 最优控制问题$(NP)^{\mathrm{T}}$有唯一的bang–bang最优控制.

4 总结

1) 在这篇文章中, 虽然仅考察扩散方程满足Dirichlet零边值条件的情形, 但对于其他边值条件, 比如Neumann或者Robin混合边值条件, 采用本文相同的方法也可以建立类似结论.

2) 对于带有界位势的扩散方程, 笔者不知道如何证明类似于定理2的结论. 这主要是因为在引理2的证明过程中, 笔者用到椭圆方程解的梯度在可测集上的能观估计(即引理1). 而后者对于有界位势的椭圆方程情形一般不再成立(参见文献[27]).

致谢 作者感谢西班牙巴斯克大学(UPV/EHU) Luis Escauriaza教授在该项工作中给予的诸多富有成效的建议.

参考文献:

[1] LEBEAU G, ROBBIANO L. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Communications in Partial Differential Equations*, 1995, 20(1/2): 335 – 356.

[2] FURSIKOV A, IMANUVILOV O Y. *Controllability of Evolution Equations*. Korea: Seoul National University, Lecture Notes Series 1996.

[3] DUYCKAERTS T, ZHZNG X, ZUAZUA E. On the optimality of the observability inequalities for parabolic and hyperbolic systems with potentials. *Annales De l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 2008, 25(1): 1 – 41.

[4] APRAIZ J, ESCAURIAZA L, WANG G, et al. Observability inequalities and measurable sets. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 2014, 16(11): 2433 – 2475.

[5] ESCAURIAZA L, MONTANER S, ZHANG C. Observation from measurable sets for parabolic analytic evolutions and applications. *Journal De Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 2015, 104(5): 837 – 867.

[6] ESCAURIAZA L, MONTANER S, ZHANG C. Analyticity of solutions to parabolic evolutions and applications. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2017, 49(5): 4064 – 4092.

[7] WANG G, ZHANG C. Observability inequalities from measurable sets for some evolution equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, 55(3): 1862 – 1886.

[8] APRAIZ J, ESCAURIAZA L. Null-control and measurable sets. *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2013, 19(1): 239 – 254.

[9] LÜ Q. Bang-bang principle of time optimal controls and null controllability of fractional order parabolic equations. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2010, 26(12): 2377 – 2386.

[10] MICU S, ROVENTA I, TUCSNAK M. Time optimal boundary controls for the heat equation. *Journal of Functional Analysis*, 2012, 263(1): 25 – 49.

[11] MIZEL V J, SEIDMAN T I. An abstract bang–bang principle and time optimal boundary control of the heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1997, 35(4): 1204 – 1216.

[12] PHUNG K D, WANG G. An observability estimate for parabolic equations from a measurable set in time and its applications. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 2013, 15(2): 681 – 703.

[13] PHUNG K D, WANG G, ZHANG C. Bang-bang property for time optimal control of semilinear heat equation. *Annales De l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 2014, 31(3): 477 – 499.

[14] WANG G. L^∞-Null controllability for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, 47(4): 1701 – 1720.

[15] WANG G, WANG L, XU Y, et al. *Time Optimal Control of Evolution Equations.* Birkhäuser, 2018.

[16] WANG G, ZUAZUA E. On the equivalence of minimal time and minimal norm controls for internally controlled heat equations, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, 50(5): 2938 – 2958.

[17] BURQ N, MOYANO I. Propagation of smallness and control for heat equations. *arXiv*: 1912.07402v1, 2019.

[18] LÜ Q. A lower bound on local energy of partial sum of eigenfunctions for Laplace-Beltrami operators. *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2013, 19(1): 255 – 273.

[19] LOGUNOV A, MALINNIKOVA E. Quantitative Propagation of Smallness for Solutions of Elliptic Equations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians-Rio de Janeiro*. 2017, DOI: 10.48550/arXiv.1711.10076.

[20] JERISON D, LEBEAU G. *Nodal Sets of Sums of Eigenfunctions. Harmonic Analysis and Partial Differential Equations.* Chicago Lectures in Mathematics, University Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[21] LEBEAU G, ZUAZUA E. Null controllability of a system of linear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1998, 141(4): 297 – 329.

[22] TENENBAUM G, TUCSNAK M. On the null-controllability of diffusion equations. *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2011, 17(4): 1088 – 1100.

[23] GILBARG D, TRUDINGER N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1983.

[24] BARDOS C, PHUNG K D. Observation estimate for kinetic transport equations by diffusion approximation. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 2017, 355(6): 640 – 664.

[25] DOLECKI S, RUSSELL D. A general theory of observation and control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, 15(2): 185 – 220.

[26] FATTORINI H. *Infinite Dimensional Linear Control Systems: The Time Optimal and Norm Optimal Problems.* North-Holland Mathematics Studies 201, Elsevier: Amsterdam, 2005.

[27] HARDT R, HOFFMANN – OSTENHOF M, HOFFMANN – OSTENHOF T, et al. Critical sets of solutions to elliptic equations. *Journal of Differential Geometry*, 1999, 51(2): 359 – 373.

作者简介:

张 灿 副教授, 目前研究方向为分布参数系统的控制理论、以及相关偏微分方程分析, E-mail: canzhang@whu.edu.cn.