

# 不确定噪声下基于轴对称盒空间滤波的非线性系统状态估计

王子赞<sup>†</sup>, 张梓蒙, 王 艳, 占雅聪, 纪志成

(江南大学 物联网技术应用教育部工程研究中心, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对不确定噪声下的非线性系统状态估计问题, 本文提出了一种基于轴对称盒空间滤波的状态估计方法. 首先, 利用轴对称盒空间包裹线性化过程带来的误差项, 将状态函数线性化误差轴对称盒空间与噪声轴对称盒空间求取闵可夫斯基和, 得到干扰误差轴对称盒空间; 随后, 利用状态量、线性误差和测量噪声的轴对称盒空间的闵可夫斯基和, 得到系统状态预测集; 进而, 利用轴对称盒空间边界正交的性质, 将盒空间拆分为多组超平面, 构造测量更新的约束条件并得到集员包裹. 本文所提方法相比传统的椭球滤波方法而言, 降低了算法的复杂度, 减少了包裹状态可行集和线性化过程带来的冗余, 获得了更加紧致精确的系统状态集. 最后, 采用非线性弹簧-质量-阻尼器系统验证了本文所提算法的有效性.

**关键词:** 滤波; 非线性系统; 状态估计; 轴对称盒空间; 不确定噪声

**引用格式:** 王子赞, 张梓蒙, 王艳, 等. 不确定噪声下基于轴对称盒空间滤波的非线性系统状态估计. 控制理论与应用, 2023, 40(5): 883 – 890

DOI: 10.7641/CTA.2021.10432

## Nonlinear system state estimation based on axisymmetric box space filter under uncertain noise

WANG Zi-yun<sup>†</sup>, ZHANG Zi-meng, WANG Yan, ZHAN Ya-cong, JI Zhi-cheng

(Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications (Ministry of Education),  
Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** A state estimation method based on the axisymmetric box space filtering is proposed for nonlinear system under uncertain noise. First, the axisymmetric box space is used to wrap the error term caused by the linearization process to linearize the state function, and the axisymmetric box space of the interference error is obtained by the Minkowski sum of the axisymmetric box space of the error and the noise axisymmetric box space; then, the Minkowski sum of the axisymmetric box space of the state quantity, linear error and measurement noise is used to obtain the system state prediction set; further using the orthogonality of the boundary of the axisymmetric box space, the box space is split into multiple sets of hyperplanes, which are converted into measurement update constraints, and a more compact set of members is obtained. Compared with the traditional ellipsoid filtering method, the method proposed in this paper reduces the complexity of the algorithm and the redundancy from wrapping feasible set and linearization, and obtains a more compact and accurate system state set. Finally, the use of a nonlinear spring-mass-damper system verifies the effectiveness of the algorithm proposed in this paper.

**Key words:** filtering; nonlinear system; state estimation; axisymmetric box space; unknown noise

**Citation:** WANG Ziyun, ZHANG Zimeng, WANG Yan, et al. Nonlinear system state estimation based on axisymmetric box space filter under uncertain noise. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(5): 883 – 890

## 1 引言

状态估计是通过提取观测数据中有用的信息以实现系统状态识别的分析过程. 然而, 在实际生产过程

采样中往往存在着各种各样的噪声干扰, 这些噪声显著影响了系统状态估计的精确性. 一般而言, 根据噪声分布方式的不同, 可以将噪声分为两种: 已知概率

收稿日期: 2021-05-21; 录用日期: 2021-12-29.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: wangzy0601@163.com; Tel.: +86 13771237227.

本文责任编辑: 潘泉.

江苏省自然科学基金面上项目(BK20221533), 国家重点研发计划项目(2020YFB1710600), 江苏省科协青年科技人才托举工程项目(TJ-2021-006)资助.

Supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20221533), the National Key Research and Development Program of China (2020YFB1710600) and the Jiangsu Science and Technology Association Young Science and Technology Talents Lifting Project (TJ-2021-006).

分布的噪声和未知但有界的噪声. 传统的状态估计方法使用过程中, 通常对噪声的分布有着很严格的要求, 即要求噪声满足一定的先验概率分布<sup>[1]</sup>, 例如采用扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)对非线性系统的状态进行估计<sup>[2]</sup>, 或通过粒子滤波(particle filter, PF)、交互多模型(interacting multiple model, IMM)算法对空间位置和状态轨迹进行估计<sup>[3]</sup>. 文献[4]提出了流体扰动计算方法结合交互多模型算法, 融合多种运动状态模型, 实现了无碰撞航路规划; 文献[5]提出了一种基于改进粒子滤波的交互式多模型目标跟踪方法, 实现了非线性系统的滤波跟踪; 文献[6]通过分析混合线性/非线性状态模型的结构信息, 结合粒子滤波与卡尔曼滤波对各个目标的状态进行预测与估计; 文献[7]通过引入改进的Sage-Husa噪声估计器自适应过程噪声, 利用自适应无迹卡尔曼滤波作为局部滤波器的分布式融合估计方法.

然而, 实际生产过程受限于传感器精度和测量方式, 噪声往往难以满足预先设定的概率分布, 仅能获得噪声的上下界, 即处于未知但有界噪声环境或噪声不确定环境. 这一类噪声大都为非高斯的、非白噪声或有偏噪声的类型, 不能直接利用假定的先验知识进行噪声分析. 在这种情况下, 采用传统的扩展卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波、粒子滤波等方法无法得到满意的状态估计结果. 针对这种未知但有界的噪声, 学者们提出了集员滤波算法<sup>[8-10]</sup>, 可以实现非概率噪声分布下的有效的状态估计. 当前, 在故障诊断<sup>[11-12]</sup>、位置跟踪<sup>[13-14]</sup>、状态控制<sup>[15]</sup>等多领域, 集员滤波算法已经得到广泛的研究与应用. 通常而言, 集员滤波算法的分类主要是依据参数或状态可行集的形状进行区分, 目前已经成熟并且得到广泛应用的描述可行集空间结构有: 区间<sup>[16]</sup>、椭圆<sup>[17]</sup>、全对称多胞体<sup>[18-19]</sup>、超平行体<sup>[20]</sup>等. 其中, 椭圆具有形状规则且计算简单的特点, 但也有很明显的保守性, 存在较大的空间冗余; 全对称多胞体保守性虽好但是随着维度的增加, 其计算复杂程度也将呈指数型增加, 高维度的运算时复杂度过大; 超平行体虽然保守性很好, 但求取最合适的超平面过程计算复杂, 需要转化为多层最优化问题, 因此如何求取超平行体没有直接高效的方法. 相比而言, 区间算法的优势在于形状规则且计算简单, 在状态估计领域应用广泛. 与此同时, 当研究对象为非线性系统时, 经典的集员滤波算法都将不再适用, 需要提出新的思路. 文献[21]提出了一种基于Adams-Bashforth-Moulton数值逼近的连续-离散扩展容积Kalman滤波方法; 文献[22]借鉴Huber等价权函数的思想, 构造了基于平方根平滑逼近函数的修正因子并结合容积卡尔曼滤波器进行状态估计; 文献[23]利用扩展卡尔曼算法对非线性系统金属氧化物半导体场效应晶体管的输出电压进行状态估计; 文献[24]提出

了一种新的混合度球面单纯形径向容积卡尔曼滤波器进行状态估计以提高准确性; 文献[25]依据协方差平方根因子进行粒子传播, 利用粒子滤波策略实现了非线性系统的状态估计; 文献[26]提出了一种外定界椭球的集员算法, 利用集员算法的包裹特性解决非线性系统的空间位置跟踪定位问题; 文献[27]利用Stirling插值公式对非线性系统线性化, 提出了一种基于椭球包裹的中心差分集员滤波算法, 实现了非线性系统的状态估计; 文献[28]针对非线性系统进行区间分析, 利用椭球对线性化误差进行定界, 提出了一种扩展椭球集员估计算法. 然而, 扩展卡尔曼滤波算法在对非线性系统进行处理时, 会忽略线性化过程的高阶项误差, 使状态估计误差较大. 基于交互多模型滤波、无迹卡尔曼滤波算法和粒子滤波算法等经典的自适应滤波算法都需要假定噪声满足一定的概率分布才能得到很好的估计结果. 中心差分集员滤波算法和扩展椭球集员估计算法虽然可以实现非线性系统的状态估计, 但其在误差包裹时都选择使用了椭球空间结构, 利用椭球进行迭代包裹的时间复杂度较大, 同时椭球的更新迭代往往伴随着大量的近似包裹过程, 保守性太大致使估计的状态集不够紧致.

为了解决未知但有界的不确定噪声干扰下非线性系统状态估计问题, 降低计算复杂度, 降低椭球空间包裹状态可行集和线性化过程带来的冗余, 本文提出一种新的轴对称盒空间滤波算法, 借鉴扩展卡尔曼滤波算法的“预测-更新”思想, 选择轴对称盒空间对误差空间进行包裹, 完成系统的线性化步骤. 在得到轴对称盒空间表示的预测集和测量集后, 进入测量更新环节, 利用轴对称盒空间的多维边界彼此正交的特点, 将轴对称盒空间拆分成 $n$ 组超平面, 即得到 $2n$ 个约束条件, 进而设计超平面切分策略得到轴对称盒空间的交集, 求取更紧致的轴对称盒空间包裹区域作为当前时刻非线性系统的状态估计可行解集, 盒空间的上下界作为状态估计结果的置信区间, 并选取盒空间的几何中心作为系统的状态估计最优解.

## 2 相关定义与问题描述

### 2.1 相关定义

首先, 定义本文涉及的范数、区间矢量、轴对称盒空间、椭球、轴对称盒空间的闵可夫斯基和, 具体如下:

**定义 1** 对于离散信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , 定义其 $L_\infty$ 范数为

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 0} \|\mathbf{x}_k\|, \quad \|\mathbf{x}_k\| = \sqrt{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k}. \quad (1)$$

**定义 2** 定义 $n$ 维区间矢量定义为

$$[\mathbf{x}_{\min} \ \mathbf{x}_{\max}] =$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}_{i,\min} \leq \mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_{i,\max}\}, \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{x}_{\min}$  表示区间矢量的下界,  $\mathbf{x}_{\max}$  表示区间矢量的上界. 因此, 将区间矢量图形化, 以区间矢量的上下界作为轴对称盒空间的边界, 构成的轴对称盒空间为

$$B(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + \text{diag}\{\mathbf{d}\}\mathbf{m}, \|\mathbf{m}\|_\infty \leq 1\}, \quad (3)$$

其中: 轴对称盒空间的中心  $\mathbf{a} = (\mathbf{x}_{\min} + \mathbf{x}_{\max})/2$ , 轴对称盒空间的半径  $\mathbf{d} = (\mathbf{x}_{\max} - \mathbf{x}_{\min})/2$ , 即由  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{d}$  两个向量共同决定轴对称盒空间位置和形状.

**定义 3** 定义  $n$  维椭球  $E(\mathbf{a}, P)$  为

$$E(\mathbf{a}, P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T P^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 1\}, \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  为椭球的中心,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为决定椭球形状的包络矩阵, 其满足对称正定性.

**定义 4** 对于轴对称盒空间  $B_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1)$  和轴对称盒空间  $B_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{d}_2)$ , 定义两者的闵可夫斯基和为

$$B_1 \oplus B_2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2]). \quad (5)$$

## 2.2 问题描述

考虑如下形式的非线性离散系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (6)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_k, \quad (7)$$

其中:  $f(\mathbf{x}_k)$  和  $h(\mathbf{x}_{k+1})$  分别为非线性状态函数和测量函数, 且满足  $f(\mathbf{x}_k)$  和  $h(\mathbf{x}_{k+1})$  均二阶可导;  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  和  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$  分别为系统的状态变量和测量变量;  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$  为有界未知预测噪声;  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$  为有界未知测量噪声, 并满足  $\mathbf{w}_k \in B(0, \mathbf{r}_w)$ ,  $\mathbf{v}_k \in B(0, \mathbf{r}_v)$ . 假定非线性状态函数  $f(\mathbf{x})$  是一个 DC (difference of convex) 函数, 即每个连续函数都可以用两个凸函数的差来近似<sup>[29]</sup>, 那么  $f(\mathbf{x})$  满足如下性质:

**性质 1** 如果非线性状态函数  $f(\mathbf{x})$  是一个 DC 函数, 那么  $f = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots \ f_i]^T$  函数中的每一个部分  $f_n (n = 1, 2, 3, \dots, i)$  都是 DC 函数.

本文的目的在于提出一种不确定噪声下基于轴对称盒空间滤波的非线性系统状态估计方法, 在精确估计系统真实状态  $\mathbf{x}_k$  的同时, 解决传统的集员算法状态估计集包裹冗余度高的缺点.

## 3 基于轴对称盒空间滤波的非线性系统状态估计

### 3.1 非线性模型的线性化

针对非线性模型的线性化问题, 本文借鉴卡尔曼滤波<sup>[30]</sup>的思想得到初始线性化模型, 同时利用轴对称盒空间包裹线性化过程中产生的误差, 再将状态函数线性化误差轴对称盒空间与过程噪声轴对称盒空间

进行闵可夫斯基和运算, 得到扩展后的干扰误差轴对称盒空间.

针对非线性系统(6), 将状态函数  $f(\mathbf{x})$  在状态量  $\hat{\mathbf{x}}_k$  处线性展开, 得到线性化的模型

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) &= \\ f(\hat{\mathbf{x}}_k) &+ J_{1,k}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + O_{1,k}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) = \\ f(\hat{\mathbf{x}}_k) &+ J_{1,k}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{e}_{1,k} = \\ f_L &+ \mathbf{e}_{1,k}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $f(\hat{\mathbf{x}}_k)$  为  $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k$  时的状态函数取值;  $J_{1,k}$  为函数  $f$  的雅可比矩阵;  $O_{1,k}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)$  为泰勒展开高阶项, 即为状态函数的线性化误差; 包裹线性化误差的区间可表示为  $\mathbf{e}_{1,k} \in E_1 = [\mathbf{e}_{1,k,\min} \ \mathbf{e}_{1,k,\max}]$ , 其中,  $E_1$  为状态函数线性化误差的区间,  $\mathbf{e}_{1,k,\min}$  为状态函数线性化误差下界,  $\mathbf{e}_{1,k,\max}$  为状态函数线性化误差上界.

同理, 对于非线性系统(7)中的测量函数  $h(\mathbf{x})$  进行线性化, 得到线性化模型

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_{k+1}) &= \\ h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) &+ J_{2,k}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) + \\ O_{2,k}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) &= \\ h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) &+ J_{2,k}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) + \mathbf{e}_{2,k} = \\ h_L &+ \mathbf{e}_{2,k}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1})$  为  $\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  时的测量函数取值;  $J_{2,k}$  为函数  $h$  的雅可比矩阵;  $O_{2,k}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})$  为泰勒展开高阶项, 即为测量函数的线性化误差; 包裹测量函数线性化误差的区间可表示为  $\mathbf{e}_{2,k} \in E_2 = [\mathbf{e}_{2,k,\min} \ \mathbf{e}_{2,k,\max}]$ , 其中,  $E_2$  为测量函数线性化误差的区间,  $\mathbf{e}_{2,k,\min}$  为测量函数线性化误差下界,  $\mathbf{e}_{2,k,\max}$  为测量函数线性化误差上界.

### 3.2 线性化误差的区间表达

由式(8)可知, 得到的线性化模型由线性化状态函数  $f_L$  和线性化误差  $\mathbf{e}_{1,k}$  两部分组成. 相对于以往直接忽略线性化过程带来的偏差, 本文采用区间包裹线性化带来的误差  $\mathbf{e}_{1,k}$ .

**定理 1** 对于区间边界为  $\mathbf{e}_k \in [\mathbf{e}_{k,\min} \ \mathbf{e}_{k,\max}]$  的线性化误差  $\mathbf{e}_k$ , 包裹该线性化误差的轴对称盒空间可表示为  $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{d}_e)$ , 其中:

$$\mathbf{a}_e = (\mathbf{e}_{k,\min} + \mathbf{e}_{k,\max})/2, \quad (10)$$

$$\mathbf{d}_e = (\mathbf{e}_{k,\max} - \mathbf{e}_{k,\min})/2. \quad (11)$$

**证** 由于非线性函数  $f(\mathbf{x})$  是一个 DC 函数, 可知存在凸函数  $g_i(\mathbf{x})$  和  $r_i(\mathbf{x})$ , 满足

$$f_i(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}) - r_i(\mathbf{x}),$$

其中:

$$g_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad (12)$$

$$r_i(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{x}. \quad (13)$$

根据凸函数性质构造函数

$$\bar{g}_i = g_i(\hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{u}_1^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k), \quad (14)$$

$$\bar{r}_i = r_i(\hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{u}_2^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k), \quad (15)$$

式(14)–(15)中,  $\bar{g}_i \leq g_i$ ,  $\bar{r}_i \leq r_i$ , 向量  $\mathbf{u}_1$  和  $\mathbf{u}_2$  分别为  $g_i(\mathbf{x})$  和  $r_i(\mathbf{x})$  在当前状态估计点  $\hat{\mathbf{x}}_k$  的次梯度, 即

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial g_1(\hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial g_2(\hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (16)$$

将式(14)–(15)带入到误差的关系式中得到

$$\mathbf{e}_k = g_i - r_i - f_{Li} \leq g_i - \bar{r}_i - f_{Li}, \quad (17)$$

$$\mathbf{e}_k = g_i - r_i - f_{Li} \geq \bar{g}_i - r_i - f_{Li}. \quad (18)$$

在  $k$  时刻,  $\mathbf{x}_k \in V_B$ ,  $V_B$  为状态的轴对称盒空间. 由式(17)–(18)可得

$$\mathbf{e}_{k,\min} = \min_{\mathbf{x}_k \in V_B} \{ \bar{g}_i(\mathbf{x}_k) - r_i(\mathbf{x}_k) - f_{Li}(\mathbf{x}_k) \}, \quad (19)$$

$$\mathbf{e}_{k,\max} = \max_{\mathbf{x}_k \in V_B} \{ g_i(\mathbf{x}_k) - \bar{r}_i(\mathbf{x}_k) - f_{Li}(\mathbf{x}_k) \}. \quad (20)$$

得到线性化误差  $\mathbf{e}_{1,k}$  的区间范围后, 可以进一步将误差转换成轴对称盒空间的表达形式, 得到线性化误差轴对称盒空间  $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{d}_e)$ , 其中:

$$\mathbf{a}_e = (\mathbf{e}_{k,\min} + \mathbf{e}_{k,\max})/2, \quad (21)$$

$$\mathbf{d}_e = (\mathbf{e}_{k,\max} - \mathbf{e}_{k,\min})/2. \quad (22)$$

证毕.

由定理1可以求得非线性状态函数  $f(x)$  和测量函数  $h(x)$  的线性化误差区间  $E_1 = [\mathbf{e}_{1,k,\min} \quad \mathbf{e}_{1,k,\max}]$  和  $E_2 = [\mathbf{e}_{2,k,\min} \quad \mathbf{e}_{2,k,\max}]$ , 其中:

$$\mathbf{e}_{1,k,\min} = \min_{\mathbf{x}_{1,k} \in V_B} \{ \bar{g}_i(\mathbf{x}_{1,k}) - r_i(\mathbf{x}_{1,k}) - f_L(\mathbf{x}_{1,k}) \},$$

$$\mathbf{e}_{1,k,\max} = \max_{\mathbf{x}_{1,k} \in V_B} \{ \bar{g}_i(\mathbf{x}_{1,k}) - r_i(\mathbf{x}_{1,k}) - f_L(\mathbf{x}_{1,k}) \},$$

$$\mathbf{e}_{2,k,\min} = \min_{\mathbf{x}_{2,k} \in V_B} \{ \bar{g}_i(\mathbf{x}_{2,k}) - r_i(\mathbf{x}_{2,k}) - f_L(\mathbf{x}_{2,k}) \},$$

$$\mathbf{e}_{2,k,\max} = \max_{\mathbf{x}_{2,k} \in V_B} \{ \bar{g}_i(\mathbf{x}_{2,k}) - r_i(\mathbf{x}_{2,k}) - f_L(\mathbf{x}_{2,k}) \},$$

由此进一步求得非线性状态函数  $f(x)$  和测量函数  $h(x)$  的线性化误差轴对称盒空间  $B(\mathbf{a}_{e_f}, \mathbf{d}_{e_f})$  和  $B(\mathbf{a}_{e_h}, \mathbf{d}_{e_h})$ .

### 3.3 状态预测

将当前状态量的轴对称盒空间集  $B_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}, \mathbf{d}_{\mathbf{x}})$ , 与状态函数线性化过程所产生的状态函数线性化误差轴对称盒空间  $B_e(\mathbf{a}_{e_f}, \mathbf{d}_{e_f})$  和预测噪声的轴对称盒空间  $B_w(\mathbf{a}_w, \mathbf{d}_w)$  进行闵可夫斯基和运算, 可以求得当前系统的预测状态集  $P_{k+1}$ , 即

$$\begin{aligned} P_{k+1} = & B_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}, \mathbf{d}_{\mathbf{x}}) \oplus B_{e_f}(\mathbf{a}_{e_f}, \mathbf{d}_{e_f}) \oplus B_w(\mathbf{a}_w, \mathbf{d}_w) = \\ & B(\mathbf{a}_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_{e_f} + \mathbf{a}_w, [\mathbf{d}_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{d}_{e_f} \quad \mathbf{d}_w]). \end{aligned} \quad (23)$$

依据线性化后得到的线性系统进行仿射变换, 将当前  $k$  时刻的轴对称盒空间状态集  $B_{\mathbf{x}_k}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}_k}, \mathbf{d}_{\mathbf{x}_k})$  转换成  $k+1$  时刻的轴对称盒空间状态集  $B_{\mathbf{x}_{k+1}}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}_{k+1}}, \mathbf{d}_{\mathbf{x}_{k+1}})$ , 即

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}_{k+1}} = f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}_k}), \quad (24)$$

$$\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{k+1}} = J_{1,k} \mathbf{d}_{\mathbf{x}_k}, \quad (25)$$

而下一时刻的线性化误差轴对称盒空间集也随着时间进行更新, 利用式(21)–(22)可以计算得到每一时刻的线性化误差轴对称盒空间, 再与测量噪声轴对称盒空间进行闵可夫斯基和, 得到误差轴对称盒空间. 采用上述状态预测过程, 可以得到非线性系统每一时刻的状态变量的区间, 并以轴对称盒空间的形式进行表示.

### 3.4 测量更新

在测量更新步, 通过状态预测得到状态变量轴对称盒空间集为先验状态集, 再进一步通过测量值进行后验更新, 使得原有的预测状态集在一定限制条件下进行收缩, 最终得到更为紧致、更为准确的状态包裹.

借鉴卡尔曼滤波思想对非线性的测量函数进行线性化, 得到式(9), 并依据式(21)–(22)可以得到测量函数线性化误差轴对称盒空间  $B_{e_h}(\mathbf{a}_{e_h}, \mathbf{d}_{e_h})$ , 再通过闵可夫斯基和运算, 与测量噪声轴对称盒空间  $B_v(\mathbf{a}_v, \mathbf{d}_v)$  得到测量过程误差轴对称盒空间  $B_h(\mathbf{a}_h, \mathbf{d}_h)$ .

得到测量过程的误差轴对称盒空间后, 即可根据测量集  $S_{k+1}$  对测量状态变量进行轴对称盒空间表达.  $k+1$  时刻测量集轴对称盒空间  $B_{S_{k+1}}(\mathbf{a}_{S_{k+1}}, \mathbf{d}_{S_{k+1}})$  表达式为

$$\begin{aligned} B_{S_{k+1}}(\mathbf{a}_{S_{k+1}}, \mathbf{d}_{S_{k+1}}) = & \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_k) + J_{2,k}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \\ & O_{2,k}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) = \\ & \mathbf{a}_{S_{k+1}} + \text{diag}\{\mathbf{d}_{S_{k+1}}\} \mathbf{m}, \|\mathbf{m}\|_{\infty} \leq 1 \}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中:  $\mathbf{a}_{S_{k+1}}$  表示  $k+1$  时刻测量集轴对称盒空间的中心;  $\mathbf{d}_{S_{k+1}}$  表示  $k+1$  时刻测量集轴对称盒空间的宽度;  $\mathbf{m}$  为与  $\mathbf{a}_{S_{k+1}}$  同维度且元素取值在单位区间内的任意向量.

在传统的集员滤波过程中, 测量更新这一收缩步是通过不同空间体之间的取交集运算得到的, 在不同的空间结构的表示下, 存在着不同的交集计算方式. 例如椭球因其形状的多样性, 在进行闵可夫斯基和运算时往往伴随着较大的误差. 为了尽可能减少交集求取过程中误差的干扰, 本文所提出轴对称盒空间求交集策略, 利用轴对称盒空间  $2n$  条边界在空间中彼此正交的性质, 在进行闵可夫斯基和运算时不存在冗余项, 可以得到准确的轴对称盒空间交集.

下面, 将轴对称盒空间拆分成多组超平面, 进一步

转换成多个约束条件, 通过线性规划对预测状态轴对称盒空间进行切割的方式, 在保证计算正确性的同时, 完成测量更新步骤.

**定理 2** 对于轴对称盒空间, 为简化取交集的计算, 先对轴对称盒空间进行拆分, 得到表达式

$$S'_{k+1} = \bigcap_{i=n} S'_{k+1,i} = \bigcap_{i=n} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{a}_{i,S_{k+1}} - \mathbf{d}_{i,S_{k+1}} \leq \mathbf{h}_i^T \mathbf{x} \leq \mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{a}_{i,S_{k+1}} + \mathbf{d}_{i,S_{k+1}} \}, \quad (27)$$

再利用超平面对轴对称盒空间进行切分, 求得轴对称盒空间的交集空间边界 $[\beta_{i,\min} \ \beta_{i,\max}]$ , 计算得到轴对称盒空间的交集, 即新的轴对称盒空间 $B_{X_{k+1}}(\mathbf{a}_{X_{k+1}}, \mathbf{d}_{X_{k+1}})$ 如下:

$$\mathbf{a}_{X_{k+1}} = \frac{\beta_{i,\max}^i(k+1) + \beta_{i,\min}^i(k+1)}{2}, \quad (28)$$

$$\mathbf{d}_{X_{k+1}} = \frac{\beta_{i,\max}^i(k+1) - \beta_{i,\min}^i(k+1)}{2}. \quad (29)$$

**证** 针对轴对称盒空间

$$B(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + \text{diag}\{\mathbf{d}\}\mathbf{m}, \|\mathbf{m}\|_\infty \leq 1 \}.$$

利用轴对称盒空间边界正交的性质, 在进行轴对称盒空间的交集运算时, 可以对每个轴对称盒空间进行拆分, 将其拆分成 $n$ 组超平面, 其中 $n$ 为轴对称盒空间的空间维度. 此时, 超平面的表达式如下:

$$S'_{k+1} = \bigcap_{i=n} S'_{k+1,i} = \bigcap_{i=n} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{a}_{i,S_{k+1}} - \mathbf{d}_{i,S_{k+1}} \leq \mathbf{h}_i^T \mathbf{x} \leq \mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{a}_{i,S_{k+1}} + \mathbf{d}_{i,S_{k+1}} \}.$$

将一个 $n$ 维空间盒子 $S_{k+1}$ 转换成 $n$ 组超平面, 利用每组超平面对另一个相交的轴对称盒空间 $P_{k+1}$ 进行切分.  $n$ 组超平面在数值层面上可以理解为 $2n$ 个约束条件, 再利用转换得到的 $2n$ 个约束条件, 进行线性规划.

$$\begin{aligned} \beta_{i,\max}(k+1) &= \max \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}, \\ \text{s.t. } \mathbf{x} &\in P_{k+1} \cap S_{k+1}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \beta_{i,\min}(k+1) &= \min \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}, \\ \text{s.t. } \mathbf{x} &\in P_{k+1} \cap S_{k+1}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中约束对象 $\mathbf{h}_i^T \mathbf{x}$ 为轴对称盒空间的顶点.

通过线性规划, 在利用所有超平面完成切分后, 可以得到轴对称盒空间交集的新区间边界 $[\beta_{i,\min} \ \beta_{i,\max}]$ , 重新计算得到这一时刻可行集轴对称盒空间 $B_{X_{k+1}}(\mathbf{a}_{X_{k+1}}, \mathbf{d}_{X_{k+1}})$ , 即两个轴对称盒空间取交集运算后的新的轴对称盒空间, 其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{X_{k+1}} &= \frac{\beta_{i,\max}^i(k+1) + \beta_{i,\min}^i(k+1)}{2}, \\ \mathbf{d}_{X_{k+1}} &= \frac{\beta_{i,\max}^i(k+1) - \beta_{i,\min}^i(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

证毕.

利用定理2, 对预测轴对称盒空间 $P_{k+1}$ 和测量轴对称盒空间 $S_{k+1}$ 取交集, 最终得到 $k+1$ 时刻的状态可行集 $X_{k+1} = P_{k+1} \cap S_{k+1}$ .

综上, 本文提出的基于轴对称盒空间滤波(axisymmetric box space filter, ABSF)的非线性系统状态估计算法步骤总结如下:

**步骤 1** 设定状态估计总采样时刻 $K$ , 初始时刻 $k=1$ , 给定初始轴对称盒空间;

**步骤 2** 利用式(8)–(9)分别对非线性系统的状态函数和测量函数进行线性化, 并利用轴对称盒空间对线性化过程产生的噪声进行包裹;

**步骤 3** 利用式(19)–(20)计算预测过程中包裹误差得到的区间边界 $[\mathbf{e}_{k,\min} \ \mathbf{e}_{k,\max}]$ , 利用式(21)–(22)计算得到线性化误差轴对称盒空间 $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{d}_e)$ ;

**步骤 4** 针对预测噪声轴对称盒空间 $B_w(\mathbf{a}_w, \mathbf{d}_w)$ 、状态函数线性化误差轴对称盒空间 $B_{e_f}(\mathbf{a}_{e_f}, \mathbf{d}_{e_f})$ 、预测状态轴对称盒空间 $B_x(\mathbf{a}_x, \mathbf{d}_x)$ 等3个预测过程产生的轴对称盒空间进行闵可夫斯基和运算, 得到预测状态集 $P_{k+1}$ ;

**步骤 5** 同理得到测量噪声轴对称盒空间 $B_v(\mathbf{a}_v, \mathbf{d}_v)$ 、测量函数线性化误差轴对称盒空间 $B_{e_h}(\mathbf{a}_{e_h}, \mathbf{d}_{e_h})$ 、测量状态轴对称盒空间 $B_y(\mathbf{a}_y, \mathbf{d}_y)$ , 通过闵可夫斯基和运算得到测量状态集 $P_{k+1}$ ;

**步骤 6** 利用定理2对测量状态集 $S_{k+1}$ 进行拆分处理, 将其转换成等价的 $n$ 组超平面, 即得到 $2n$ 个限制条件. 利用限制条件对测量状态集进行线性规划, 实现对测量状态盒子的收缩, 得到状态的可行集 $X_{k+1} = P_{k+1} \cap S_{k+1}$ ;

**步骤 7** 置 $k = k + 1$ , 返回步骤2; 当 $k = K$ 时, 算法结束, 输出状态估计结果.

## 4 仿真实验

为了验证所提出方法的有效性, 选择如图1所示的非线性弹簧–质量–阻尼器系统作为仿真对象<sup>[31]</sup>, 其运动方程满足下列关系式:

$$\ddot{x} + k_0 x (1 + k_d x^2) + c \dot{x} = 0. \quad (32)$$

将运动方程(32)离散化后, 可得

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k, \quad (33)$$

$$y_{k+1} = h(x_{k+1}) + v_k, \quad (34)$$

其中:

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix},$$

$$f(x_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} + \Delta T x_{2,k} \\ x_{2,k} + \Delta T (-k_0 x_{1,k} (1 + k_d x_{1,k}^2) - c x_{2,k}) \end{bmatrix},$$

$$h(x_{k+1}) = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}.$$

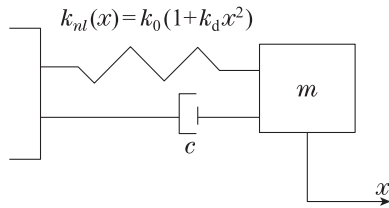
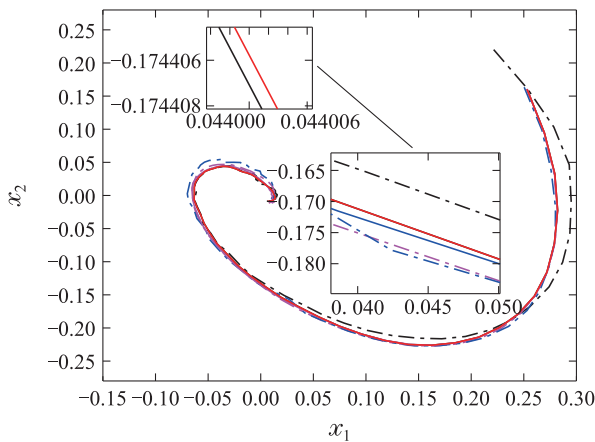


图1 非线性弹簧-质量-阻尼器系统

Fig. 1 Nonlinear spring mass damper system

系统相关参数如下:  $x_{1,k}$ 和 $x_{2,k}$ 分别为 $k$ 时刻的弹簧位置和弹簧速度,  $\Delta T = 0.1$ ,  $k_0 = 1.5$ ,  $k_d = 3$ ,  $c = 1.24$ . 初始状态为 $x_0 = [0.2 \ 0.3]^T$ , 给定初始状态可行集 $B = (\hat{x}_0, d_0)$ , 其中,  $\hat{x}_0 = [0.2 \ 0.3]$ ,  $d_0 = \text{diag}\{0.01, 0.01\}$ ; 噪声 $w_k$ 和 $v_k$ 分别为满足 $w_k \in [-0.002 \ 0.002]$ 和 $v_k \in [-0.001 \ 0.001]$ 的均匀噪声. 将本文所提的ABSf算法与扩展卡尔曼滤波(EKF)算法、粒子滤波(PF)算法、基于交互多模型的无迹卡尔曼滤波(interactive multi model-unscented kalman filter, IMM-UKF)算法、中心差分集员滤波(central difference set membership filter, CDSMF)算法和扩展椭球集员估计(extended ellipsoidal set membership estimation, EESME)算法进行对比, 仿真结果如图2-5所示.



— 状态真值    --- EKF算法    -.- PF算法  
 -.- IMM-UKF算法    — EESME算法  
 — 本文提出的ABSf算法

图2 状态轨迹对比

Fig. 2 State trajectories contrast

图2描述的是使用本文提出的ABSf算法和EKF算法、PF算法、IMM-UKF算法、EESME算法进行非线性系统状态估计时, 状态轨迹的变化结果对比情况. 从图2可以直观的看出, 相比EKF算法、PF算法、IMM-UKF算法与EESME算法, 本文所提ABSf算法能够更好的实现非线性系统的状态轨迹跟踪, 距离系统真实状态更近, 在未知噪声影响下的估计误差更小, 滤波结果更加准确.

图3和图4描述的是系统状态估计值 $x_1$ 和 $x_2$ 曲线变化及区间边界. 从结果可以看出ABSf算法可以实现对系统的状态量 $x_1$ 和状态量 $x_2$ 的估计, 并可以观察到在噪声干扰下, 轴对称盒空间边界是时刻包裹真值的. 由于经典的EKF算在对未知噪声情况下的系统状态进行估计时, 系统线性化过程引入更多的误差, 所以状态估计效果相比本文提出的ABSf算法而言略差. 此外, PF算法和IMM-UKF算法在逼近状态的概率密度函数的过程中仍然会产生误差, 通过仿真对比可以看出, 本文提出的ABSf算法具备更好的准确性和收敛性. 同时, 从图3和图4可以看出, 虽然ABSf算法、CDSMF算法和EESME算法的状态估计边界都可以包裹真值, 但利用椭球进行包裹的保守性更大, 即区间范围更大. 同时EESME算法的状态估计在开始时相对不够平稳, 在 $k = 50$ 后才能不断收缩状态集边界, 而本文提出的ABSf算法在初始阶段就可以达到很好的效果, 并一直紧致包裹状态真值.

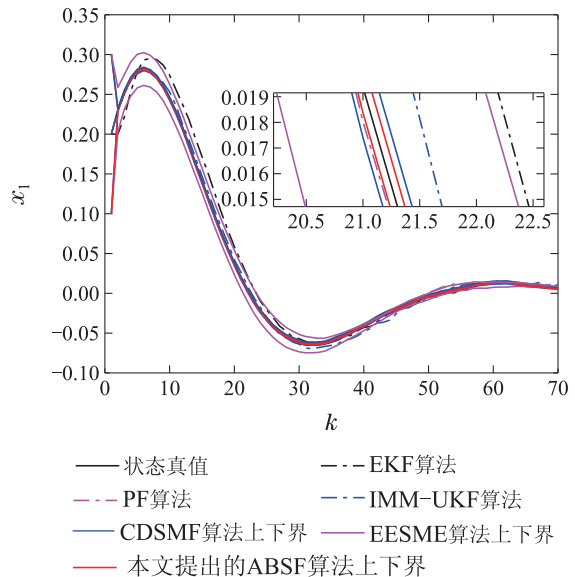


图3 状态估计 $x_1$ 对比

Fig. 3 Comparison of state estimations  $x_1$

图5为ABSf算法、CDSMF算法和EESME算法的可行集空间演化对比, 其中玫红色曲线包裹区域表示EESME算法运行下的状态可行集, 蓝色曲线包裹区域表示CDSMF算法运行下的状态可行集, 红色框区域表示ABSf算法运行下的状态可行集. 首先, 由图5可

以清楚的看到, CDSMF算法、EESME算法和本文提出的ABSF算法所估计的状态集都可以完全包裹真值, 并随着真值变动不断更新, 在更新过程中不断收缩, 实现对于状态的精确估计. 相比而言, EESME算法的状态集收缩明显慢于ABSF算法, 大约在 $k = 50$ 后收缩得到的状态集才能趋近通过ABSF算法获得的状态集, 可见EESME算法的保守性偏大. CDSMF算法虽然在大体效果上比较接近ABSESMF算法, 但在精度上仍然不如ABSF算法, 主要是因为相较于轴对称盒空间而言, 椭球的迭代取交集时会产生一定量的外包裹误差, 从图5中也可以看到初始时刻椭球状态集是小于轴对称盒空间状态集的, 但随着一次迭代更新后, 轴对称盒空间的体积能够一直小于椭球状态集.

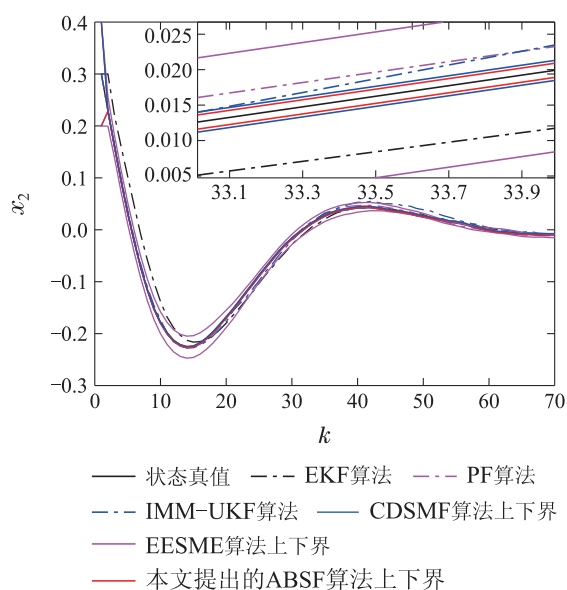
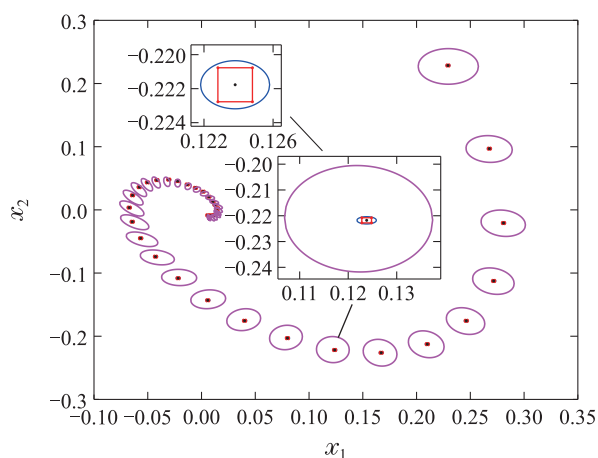
图4 状态估计 $x_2$ 对比Fig. 4 Comparison of state estimations  $x_2$ 

图5 状态可行集空间演化

Fig. 5 Space evolution of feasible sets

## 5 总结

本文提出了一种轴对称盒空间包裹误差的集员滤波算法, 用于解决在未知有界的不确定噪声干扰下非

线性系统的状态估计问题. 通过对线性化误差进行区间估计, 同时结合有界未知噪声的非概率分布特点, 对噪声也进行区间估计, 随后设计轴对称盒空间包裹线性化过程噪声、未知干扰噪声和状态可行集, 通过预测和更新步骤, 利用测量轴对称盒空间更新预测集, 进而得到非线性系统的状态可行集. 在轴对称盒空间的交集运算上, 本文提出了拆分区间盒子的思想, 在保证准确性的同时, 提升状态估计的边界收缩速度, 降低状态估计算法的保守性. 通过给定的弹簧-质量-阻尼系统仿真验证了算法的可行性与优越性. 本文所提的非线性系统状态估计方法可以拓展应用于解决水箱水位控制<sup>[32]</sup>、风力发电机故障检测<sup>[33]</sup>等实际工程环境中受不确定噪声干扰下的状态估计问题.

## 参考文献:

- [1] WANG D Q. Recursive maximum likelihood identification method for a multivariable controlled autoregressive moving average system. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2018, 33(4): 1015 – 1031.
- [2] XIONG K, ZHANG H, LIU L. Adaptive robust extended Kalman filter for nonlinear stochastic systems. *IET Control Theory & Technology*, 2008, 2(3): 239 – 250.
- [3] LI Yinya, TAN Weiqian, SHENG Andong. Application of improved particle filter algorithm to bearings-only passive tracking in multiple stations. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(8): 1081 – 1086. (李银侠, 谭维茜, 盛安冬. 改进型粒子滤波算法在多站纯方位被动跟踪中的应用. *控制理论与应用*, 2011, 28(8): 1081 – 1086.)
- [4] WANG Honglun, LEI Yupeng, YAO Peng, et al. Planning three-dimensional collision-avoidance path for UAV on the basis of disturbed fluid dynamical system algorithm. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(3): 295 – 303. (王宏伦, 雷玉鹏, 姚鹏, 等. 基于流体扰动计算的无人机三维无碰撞航路规划. *控制理论与应用*, 2016, 33(3): 295 – 303.)
- [5] DI Yi, GU Xiaohui, LONG Fei, et al. An improved UPF-based interacting multiple model target tracking method for dynamic acoustic array. *Control and Decision*, 2018, 33(2): 249 – 255. (邸忆, 顾晓辉, 龙飞, 等. 一种基于改进UPF的运动声阵列交互多模型目标跟踪方法. *控制与决策*, 2018, 33(2): 249 – 255.)
- [6] ZHANG Jungen. A particle cardinalized probability hypothesis density filtering algorithm for bearings-only multi-target tracking. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(6): 1319 – 1325. (张俊根. 一种粒子势概率假设密度滤波纯方位多目标跟踪算法. *控制理论与应用*, 2020, 37(6): 1319 – 1325.)
- [7] FENG Yuanjing, HUANG Liangpeng, ZHANG Wenan. Adaptive unscented Kalman filter distributed fusion for rigid body pose estimation under occlusion. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 69 – 80. (冯远静, 黄良鹏, 张文安. 遮挡情况下刚体位姿估计的自适应无迹卡尔曼分布式融合. *控制理论与应用*, 2020, 37(1): 69 – 80.)
- [8] LIU L, MA L, ZHANG J, et al. Distributed non-fragile set-membership filtering for nonlinear systems under fading channels and bias injection attacks. *International Journal of Systems Science*, 2021, 52(6): 1 – 14.
- [9] WANG Chao, ZHANG Shengxiu, QIN Weiwei, et al. Tube-reachable set-based robust model predictive control with adaptive disturbance boundaries. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(1): 11 – 18. (王超, 张胜修, 秦伟伟, 等. 具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒预测控制. *控制理论与应用*, 2014, 31(1): 11 – 18.)

- [10] QIU Q W, YANG F W, ZHU Y, et al. Output feedback model predictive control based on set-membership state estimation. *IET Control Theory & Applications*, 2020, 14(4): 558 – 567.
- [11] GUO Shenghui, ZHU Fanglai. Actuator fault detection based on interval observers. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1118 – 1122. (郭胜辉, 朱芳来. 基于区间观测器的执行器故障检测. 控制与决策, 2016, 31(6): 1118 – 1122.)
- [12] ROTONDO D, FERNANDEZ C R, TORNIL S S, et al. Robust fault diagnosis of proton exchange membrane fuel cells using a Takagi-Sugeno interval observer approach. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2016, 41(4): 2875 – 2886.
- [13] ZHOU Bo, QIAN Kun, MA Xudong, et al. Multi-sensor fusion for mobile robot indoor localization based on a set-membership estimator. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(4): 541 – 550. (周波, 钱堃, 马旭东, 等. 基于集员估计的室内移动机器人多传感器融合定位. 控制理论与应用, 2017, 34(4): 541 – 550.)
- [14] ZHOU Bo, QIAN Kun, MA Xudong, et al. Slipping parameters bounding and robust stabilization control for mobile robots. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(5): 611 – 617. (周波, 钱堃, 马旭东, 等. 移动机器人滑动参数定界及鲁棒镇定控制. 控制理论与应用, 2013, 30(5): 611 – 617.)
- [15] DU Huibin, ZHAO Yiwen, HAN Jianda, et al. Data fusion of human skeleton joint tracking using two kinect sensors and extended set membership filter. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(12): 1886 – 1898. (杜惠斌, 赵忆文, 韩建达, 等. 基于集员滤波的双Kinect人体关节点数据融合. 自动化学报, 2016, 42(12): 1886 – 1898.)
- [16] RAVANBOD L, JAUBERTHIE C, NATHALIE V. Improved solutions for ill-conditioned problems involved in set-membership estimation for fault detection and isolation. *Journal of Process Control*, 2017, 58: 139 – 151.
- [17] LOUKKAS N, MARTINE J J, MESLEM N. Set-membership observer design based on ellipsoidal invariant sets. *IFAC Papers OnLine*, 2017, 50(1): 6471 – 6476.
- [18] COMBASTEL C. An extended zonotopic and Gaussian Kalman filter (EZGKF) merging set-membership and stochastic paradigms: Toward non-linear filtering and fault detection. *Annual Reviews in Control*, 2016, 42: 232 – 243.
- [19] WANG H, KOLMANOVSKY V I, SUN J. Zonotope-based recursive estimation of the feasible solution set for linear static systems with additive and multiplicative uncertainties. *Automatica*, 2018, 95: 236 – 245.
- [20] VALERO C E, PAULEN R. Effective recursive set-membership state estimation for robust linear MPC. *IFAC Papers OnLine*, 2019, 52(1): 486 – 491.
- [21] HE R K, CHEN S X, WU H, et al. Efficient extended cubature Kalman filtering for nonlinear target tracking. *International Journal of Systems Science*, 2021, 52(2): 392 – 406.
- [22] PENG Meikang, GUO Yunhua, WANG Jingdong, et al. Adaptive target tracking algorithm based on robust cubature Kalman filter. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(4): 793 – 800. (彭美康, 郭蕴华, 汪敬东, 等. 基于鲁棒容积卡尔曼滤波的自适应目标跟踪算法. 控制理论与应用, 2020, 37(4): 793 – 800.)
- [23] BANSAL R, MAJUMDAR S. Extended Kalman filter-based state estimation of MOSFET circuit. *Compel*, 2019, 38(6): 1885 – 1903.
- [24] WANG S, FENG Y, DUAN S, et al. Mixed-degree spherical simplex-radial cubature Kalman filter. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 2017: 1 – 9.
- [25] DAI Jiahui, XU Pengcheng, LI Xiaobo. Second order central difference particle filter Fast SLAM algorithm. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(9): 1382 – 1390. (代嘉惠, 许鹏程, 李小波. 二阶中心差分粒子滤波Fast SLAM算法. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 1382 – 1390.)
- [26] LIU Yushuang, ZHAO Shan, WU Falin. Bearings only target tracking based on set membership estimation of circumscribed ellipsoid. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(3): 497 – 505. (刘玉双, 赵剡, 吴发林. 基于外定界椭球集员估计的纯方位目标跟踪. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(3): 497 – 505.)
- [27] SHEN Qiang, LIU Jieyu, ZHAO Qian, et al. Central difference set-membership filter for nonlinear system. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1239 – 1249. (沈强, 刘洁瑜, 赵乾, 等. 非线性系统中心差分集员估计方法. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1239 – 1249.)
- [28] LIU Y, YAN Z, WU F. Extended ellipsoidal outer-Bounding set-membership estimation for nonlinear discrete-time systems with unknown-but-Bounded disturbances. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2016, 2016: 1 – 11.
- [29] ALAMO T, BRAVO J M, REDONDO M J, et al. A set-membership state estimation algorithm based on DC programming. *Automatica*, 2007, 44(1): 216 – 224.
- [30] LIN Xiaogong, JIAO Yuzhao, LIANG Kun, et al. Application of the nonlinear filtering algorithm with a correlation noise in the dynamic positioning. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(8): 1081 – 1088. (林孝工, 焦玉召, 梁坤, 等. 相关噪声下非线性滤波及在动力定位中的应用. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1081 – 1088.)
- [31] SCHOLTE E, CAMPBELL M E. A nonlinear set membership filter for online applications. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(15): 1337 – 1358.
- [32] ZHANG Junfeng, HE Xiao, ZHOU Donghua. Fault detection for a linear MIMO systems based on set-membership estimation. *Journal of Shanghai Institute of Technology (Natural Science)*, 2015, 15(2): 149 – 152. (张峻峰, 何潇, 周东华. 基于集员估计的线性MIMO系统故障检测方法. 上海应用技术学院学报(自然科学版), 2015, 15(2): 149 – 152.)
- [33] SHEN Yanxia, YIN Tianjiao. A fault diagnosis method of set membership filter based on convex ploytope. *Control and Decision*, 2018, 33(1): 150 – 156. (沈艳霞, 尹天骄. 一种基于凸多面体的集员滤波故障诊断方法. 控制与决策, 2018, 33(1): 150 – 156.)

### 作者简介:

王子赞 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为复杂系统建模与状态估计, E-mail: wangzy0601@163.com;

张梓蒙 硕士研究生, 目前研究方向为基于滤波的非线性系统状态估计, E-mail: zzm12244@163.com;

王艳 教授, 博士生导师, 目前研究方向为生产过程建模与优化控制, E-mail: yanwang@jiangnan.edu.cn;

占雅聪 硕士研究生, 目前研究方向为不确定噪声下的非线性系统分析, E-mail: zyacong@163.com;

纪志成 教授, 博士生导师, 目前研究方向为工业过程建模与状态估计, E-mail: zcji@jiangnan.edu.cn.