

基于扩展状态观测器的随机隐Markov 正跳变系统有限时间异步控制

任乘乘^{1,2}, 宋 军³, 何舒平^{1,2†}

(1. 安徽大学 人机共融系统与智能装备安徽省工程实验室, 安徽 合肥 230601;

2. 安徽大学 电气工程与自动化学院, 安徽 合肥 230601; 3. 安徽大学 人工智能学院, 安徽 合肥 230601)

摘要: 针对一类含不匹配扰动的随机隐Markov跳变系统, 本文研究了基于扩展状态观测器(ESO)的有限时间异步控制问题. 首先, 引入一组扩展变量将隐Markov跳变系统转换成一组新的随机扩展系统, 补偿不匹配扰动对系统控制输出的影响. 基于Lyapunov-Krasovskii泛函方法, 给出使得基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统是正系统, 且有限时间有界的充分条件. 进而得到直接求解观测器增益和控制器增益的线性矩阵不等式. 最后, 通过仿真结果验证了本文所设计的异步状态反馈控制器和观测器的有效性和可行性.

关键词: 扩展状态观测器; 隐Markov跳变系统; 有限时间有界; 正系统

引用格式: 任乘乘, 宋军, 何舒平. 基于扩展状态观测器的随机隐Markov正跳变系统有限时间异步控制. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1891 – 1900

DOI: 10.7641/CTA.2021.10585

Extended-state-observer-based finite-time asynchronous control of a class of stochastic positive hidden Markov jump systems

REN Cheng-cheng^{1,2}, SONG Jun³, HE Shu-ping^{1,2†}

(1. Anhui Engineering Laboratory of Human-Robot Integration Systems and Intelligent Equipment,
Anhui University, Hefei Anhui 230601, China;

2. School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei Anhui 230601, China;

3. School of Artificial Intelligence, Anhui University, Hefei Anhui 230601, China)

Abstract: This paper studies the extended-state-observer(ESO)-based finite-time asynchronous control problem of a class of stochastic hidden Markov jump systems with unmatched disturbances. Firstly, the stochastic hidden Markov jump systems are converted into new stochastic expansion systems by introducing a set of extended variables, which can compensate the impact of unmatched disturbances in the controlled outputs. By means of the Lyapunov-Krasovskii function method, some sufficient conditions on the positiveness and finite-time boundedness of the ESO-based closed-loop stochastic hidden Markov jump systems are given. Then, linear matrix inequalities are obtained to directly solve the observer gains and controller gains. Finally, a simulation result verifies the effectiveness of the designed asynchronous state feedback controller and observer.

Key words: extended state observer (ESO); hidden Markov jump systems; asynchronous control; positive system

Citation: REN Chengcheng, SONG Jun, HE Shuping. Extended-state-observer-based finite-time asynchronous control of a class of stochastic positive hidden Markov jump systems. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1891 – 1900

1 引言

实际工程应用中, 常常会出现如系统组件的随机故障、环境干扰以及非线性特性等导致操作点的突然变化等现象. 这些突变现象一定程度上改变了各个子

系统的工作状态. 作为一类特殊的随机系统, Markov跳变系统常常被用来描述此类现象, 并刻画各子系统之间的关联; 基于此, 学术界产生了许多创新性成果^[1-2]. 然而, 当前关于Markov跳变系统的研究成果

收稿日期: 2021-07-03; 录用日期: 2021-11-17.

†通信作者. E-mail: shuping.he@ahu.edu.cn.

本文责任编辑: 裴海龙.

国家自然科学基金项目(62073001, 61903143), 安徽省高校优秀青年人才重点支持计划项目(gxydZD2017001), 安徽省高校协同创新项目(GXXT-2021-010), 国家留学基金委项目资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62073001, 61903143), the Key Support Program of University Outstanding Youth Outstanding Youth Talent of Anhui Province (gxydZD2017001), the University Synergy Innovation Program of Anhui Province (GXXT-2021-010) and the China Scholarship Council.

中,大部分都是假设系统所设计的控制器可访问系统的模态信息,以实现控制器模态和系统模态之间的同步^[3].实际上,由于系统信号延迟、信息测量不及时等原因,完全同步往往难以实现,进而导致设计结果的保守性.在此情况下,采用隐Markov建模^[4-5],构建异步控制策略,不失为一种可行的方法.文献[6]针对时变Markov跳变系统,研究了有限时间区间内的异步输出反馈控制问题.在此基础上,作者进一步讨论了时变隐Markov跳变系统的异步滑模控制问题^[7].文献[8]设计了非线性隐Markov跳变系统的异步滤波器.结合T-S模糊方法,文献[9]对连续时间隐Markov跳变系统的有限时间 L_2 异步控制问题进行了分析.

另一方面,人们在研究动态系统时发现很多系统状态会出现一种非负现象,而且系统的初始状态和控制输入均非负时,其系统状态以及控制输出也是非负的,此类特殊的动态系统被称为正系统^[10-12].实际上,学术界对含随机跳变参数的正系统的研究也日益广泛.针对含有输入饱和的Markov正跳变系统,文献[13]研究了其事件触发控制问题.文献[14]探讨了具有时变延迟的非线性Markov正跳变系统的非脆弱饱和和控制问题.文献[15]采用线性规划的方法对具有饱和单输入的Markov正跳变系统的稳定性进行了分析.实际上,如果在正跳变系统设计过程中,控制器不能及时访问系统的模态信息,导致控制器模态和系统模态无法做到同步,如何进行分析与设计呢?更进一步,如果系统中含有未知不匹配扰动,导致对系统综合分析产生一定的影响,如何进行深入的控制与综合研究呢?基于这两个问题,本文引入扩展状态观测器(extended state observer, ESO)方法.

ESO不仅可用于实时估计系统的未测量状态,还可用于估计由系统未知参数或无法建模的动力学等造成的未知扰动^[16-17].ESO方法不仅对系统模型的依赖性较小,而且对外部非线性扰动具有较强的鲁棒性^[18-19].文献[20]结合ESO方法对三相功率变换器的滑模控制问题进行了研究.针对非线性反推液压系统,文献[21]利用ESO方法探讨了其输出反馈鲁棒控制问题.此外,ESO技术还被广泛用于电液伺服系统的自适应控制^[22]以及DC-DC降压电源转换器系统的滑模控制^[23]中.

本文针对一类含不匹配扰动的随机隐Markov跳变系统,研究基于ESO的有限时间异步控制问题.与现有结果相比,本文的主要创新点如下:

1) 首次结合ESO技术,研究随机隐Markov跳变系统的有限时间控制问题.放松现有成果中系统模态和控制器模态严格同步的限制,本文构建隐Markov模型,解决观测器/估计器与系统切换难同步问题;

2) 基于ESO方法通过引入一组扩展变量处理系统中的未知不匹配扰动,并设计合适的扰动补偿增益,

补偿不匹配扰动在控制输出中的影响;

3) 结合随机Lyapunov-Krasovskii泛函方法,设计合适的基于ESO的异步状态反馈控制器和观测器,使得闭环随机隐Markov增广跳变系统是正系统,且有限时间有界.

符号说明:在本文中如果没有特殊说明,所有矩阵和符号都是标准的且具有兼容的维数.文中其他的数学符号含义如表1所示.

表1 本文符号含义
Table 1 Symbols notations

符号	含义
$\mathbb{R}^{n \times m}$	$n \times m$ 维实矩阵
\mathbb{R}^+	非负实数
\mathbb{R}^n	n 维Euclidean空间
*	对称矩阵
$\mathfrak{S}V$	V 的若无穷小算子
A^T	矩阵 A 的转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆
$\mathbf{Her}(A)$	$A + A^T$
$\lambda_{\min}(P)$	P 的最小特征值
$\phi_{\max}(P)$	P 的最大特征值
$\text{diag}\{AB\}$	矩阵 A 和 B 的块对角矩阵
$A \succ (\prec, \succeq, \preceq) 0$	正(负、非负、非正)矩阵
$P \succ (\prec, \succeq, \preceq) 0$	正(负、非负、非正)定矩阵

2 系统描述

给定概率空间 $(\Gamma, \Delta, \text{Prob}(\cdot))$,其中 Γ 是样本空间, Δ 是事件代数, $\text{Prob}(\cdot)$ 是事件概率.假设连续时间隐Markov随机过程 $Z(t) = (r(t), \epsilon(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$ 是由集合 $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ 中取值的隐藏状态 $r(t)$ 和集合 $\mathcal{M} := \{1, 2, \dots, M\}$ 中取值的观测状态 $\epsilon(t)$ 组成,且该随机过程是齐次Markov过程,其转移率 $\nu_{(i,k),(j,l)}$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_{jl}^k \pi_{ij}, & i \neq j, l, k \in \mathcal{M}, i, j \in \mathcal{N}, \\ q_{kl}^i, & l \neq k, i = j \in \mathcal{N}, l, k \in \mathcal{M}, \\ \pi_{ii} + q_{kk}^i, & i = j \in \mathcal{N}, k = l \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\nu_{(i,k),(j,l)} \geq 0$, $\sum_{(i,k) \neq (j,l)} \nu_{(i,k),(j,l)} = -\nu_{(i,k),(i,k)}$,

$\forall (i, k) \neq (j, l), \sum_{l=1}^M \alpha_{jl}^k = 1$; 对于 $\forall i \neq j$,转移率矩阵

$\Pi = [\pi_{ij}]$ 满足 $\pi_{ij} \geq 0$; 对于 $\forall k \neq l$,依赖于 Π 的条件概率矩阵 $\mathbb{N}^i = [q_{kl}^i]$ 满足 $q_{kl}^i \geq 0$; $\pi_{ii} = -\sum_{i \neq j} \pi_{ij}$, $q_{kk}^i = -\sum_{l \neq k} q_{kl}^i$. 因此,连续时间隐Markov模型 $Z(t) = (r(t), \epsilon(t)) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ 满足

$$\text{Prob}(Z(t + \tau) = (j, l) | Z(t) = (i, k)) =$$

$$\begin{cases} \nu_{(i,k),(j,l)}\tau + o(\tau), & (i,k) \neq (j,l) \\ 1 + \nu_{(i,k),(i,k)}\tau + o(\tau), & (i,k) = (j,l) \end{cases} = \begin{cases} \alpha_{jl}^k \pi_{ij} \tau + o(\tau), & i \neq j, \\ q_{kl}^i \tau + o(\tau), & l \neq k, i = j, \\ 1 + (\pi_{ii} + q_{kk}^i)\tau + o(\tau), & i = j, k = l. \end{cases} \quad (2)$$

注 1 对于给定的集合 \mathcal{N} 和 \mathcal{M} , 并考虑到文献[4]中的结论, 可由式(1)得

- 当 $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, $\alpha_{jl}^k = 0 (j \neq l)$, $\alpha_{jj}^k = 1 (j = l)$, $q_{kl}^i = 0$, 不变集 $\nu = \{(i, i), i \in \mathcal{N}\}$ 时, 隐藏状态 $r(t)$ 和观测状态 $\epsilon(t)$ 同时访问同一个模态, 即 $r(t) = \epsilon(t)$. 此时, 观测器提供隐藏状态 $r(t)$ 的完备信息;

- 当 $\mathcal{M} = \{1\}$, $q_{kl}^i = 0$, $\alpha_{j1}^1 = 1$ 时, $\epsilon(t) = 1$. 此时, 观测器不会提供任何信息;

- 当 $\alpha_{jl}^k = 0 (l \neq k) = 0$, $\alpha_{jk}^k = 1 (l = k)$. 隐藏状态 $r(t)$ 和观测状态 $\epsilon(t)$ 一次只有一个状态转移, 彼此状态之间不存在相互转移. 此时, 隐藏状态 $r(t)$ 的转移率为 π_{ij} , 观测状态 $\epsilon(t)$ 的条件转移率为 q_{kl}^i , 其中 $r(t) = i$.

本文考虑如下定义在概率空间 $(\Gamma, \Delta, \text{Prob}(\cdot))$ 的具有不匹配扰动的随机隐Markov跳变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t) + \\ \quad G(r(t))f(x(t), d(t), t), \\ y_1(t) = C_1(r(t))x(t), \\ y_2(t) = C_2(r(t))x(t), \\ x(0) = x_0, r(0) = r_0, t = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $x(t) = \text{col}[x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)] \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $y_1(t) \in \mathbb{R}^m$ 是测量输出, $y_2(t) \in \mathbb{R}^b$ 是控制输出, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 是控制输入, $f(x(t), d(t), t)$ 是不确定不匹配扰动函数, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ 是外部干扰, x_0 和 r_0 分别为初始状态和初始模态.

定义 1^[10] 对于任意给定的正初始状态 $x_0 > 0$ 、初始模态 $r_0 > 0$ 以及控制输入 $u(t) > 0$, 如果对于任意时间 $t > 0$, 随机隐Markov跳变系统的状态以及控制输出满足 $x(t) > 0$, $y_2(t) > 0$, 则称该随机隐Markov跳变系统为正系统.

引理 1^[10] 对于任意的 $r(t) = i \in \mathcal{N}$, 称随机隐Markov跳变系统(3)为正系统, 当且仅当 A_i 为 Metzler 矩阵, B_i, G_i, C_{1i} 和 C_{2i} 为正矩阵.

引理 2^[10] 对于任意的 $r(t) = i \in \mathcal{N}$, 称矩阵 A_i 为 Metzler 矩阵, 当且仅当存在一个随机正常数 $\alpha_i > 0$ 满足 $A_i + \alpha_i I \succeq 0$.

由定义 1 和引理 1 知, 如果隐Markov跳变系统(3)是正系统, 那么系数矩阵满足: $A(r(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是依赖于随机过程 $r(t)$ 的 Metzler 矩阵, $B(r(t)) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $G(r(t)) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C_1(r(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C_2(r(t)) \in \mathbb{R}^{b \times n}$ 是依赖于随机过程 $r(t)$ 的正矩阵.

考虑到随机隐Markov正跳变系统(3)中的不确定不匹配扰动, 基于扩展状态观测理论^[16, 18], 引入如下扩展变量:

$$x_{n+1}(t) = f(x(t), d(t), t). \quad (4)$$

结合随机隐Markov正跳变系统(3)和扩展变量(4), 可得如下随机扩展系统:

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \bar{A}(r(t))\omega(t) + \bar{B}(r(t))u(t) + \\ \quad \bar{G}(r(t))b(t), \\ y_1(t) = \bar{C}_1(r(t))\omega(t), \\ y_2(t) = \bar{C}_2(r(t))\omega(t), \\ \omega(0) = x_0, r(0) = r_0, t = 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\omega(t) = [x^T(t) \ x_{n+1}(t)]^T, \quad b(t) = f(x(t), d(t), t),$$

$$\bar{A}(r(t)) = \begin{bmatrix} A(r(t)) & G(r(t)) \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(r(t)) = \begin{bmatrix} B(r(t)) \\ 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \bar{G}(r(t)) = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1_{1 \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_1(r(t)) = [C_1(r(t)) \ 0_{m \times 1}],$$

$$\bar{C}_2(r(t)) = [C_2(r(t)) \ 0_{b \times 1}].$$

为了对随机扩展系统(5)设计合适的异步状态反馈控制器和观测器, 本文假设随机隐Markov正跳变系统(3)是可控的且随机扩展系统(5)是可观测的, 即 (A_i, B_i) 可控, $(\bar{A}_i, \bar{C}_{1i})$ 可观. 进而, 设计如下依赖于 $\epsilon(t)$ 的异步状态反馈控制器和观测器:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}(t) = \bar{A}(r(t))\bar{\omega}(t) + \bar{B}(r(t))u(t) + \\ \quad E(Z(t))[y_1(t) - \bar{y}_1(t)], \\ \bar{y}_1(t) = \bar{C}_1(r(t))\bar{\omega}(t), \\ \bar{y}_2(t) = \bar{C}_2(r(t))\bar{\omega}(t), \\ u(t) = K(\epsilon(t))\bar{\omega}(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\bar{\omega}(t) = [\bar{x}^T(t) \ \bar{x}_{n+1}(t)]^T$, $\bar{x}(t)$ 和 $\bar{x}_{n+1}(t)$ 是估计状态, $\bar{y}_1(t)$ 是测量估计输出, $\bar{y}_2(t)$ 是控制估计输出, $K(\epsilon(t)) = [K_1(\epsilon(t)) \ K_2(\epsilon(t))]$, $E(Z(t)) = [E_1^T(Z(t)) \ E_2^T(Z(t))]^T$, $E(Z(t))$ 为依赖于 $Z(t)$ 的需要设计的观测器增益, $K_1(\epsilon(t))$ 和 $K_2(\epsilon(t))$ 为依赖于 $\epsilon(t)$ 的控制器增益和扰动补偿增益.

注 2 实际工程应用中, 由于系统信号延迟、数据丢包等不确定原因, 往往设计的控制器无法直接访问系统模态. 基于此, 本文采用式(6)所示的观测状态 $\epsilon(t)$ 来获取控制器模态, 系统模态则由隐藏状态 $r(t)$ 表示. 另一方面, 由于本文设计的观测器通过观测系统的估计输出值进行反馈, 观测值由隐Markov跳变系统的隐藏状态 $r(t)$ 和观测状态 $\epsilon(t)$ 共同决定. 因此, 设计的观测器增益依赖于 $Z(t)$.

注 3 由于随机隐Markov跳变系统(3)的系统模态则

由隐藏状态 $r(t)$ 表示,此时测量输出 $y_1(t)$ 和控制输出 $y_2(t)$ 依赖于隐藏状态 $r(t)$.另一方面,本文设计的观测器增益依赖于 $Z(t)$,此时测量估计输出 $\tilde{y}_1(t)$ 和控制估计输出 $\tilde{y}_2(t)$ 同时依赖于隐藏状态 $r(t)$ 和观测状态 $\epsilon(t)$.

定义随机系统的状态估计误差、扰动估计误差和控制估计输出误差分别为 $e_1(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, $e_2(t) = x_{n+1}(t) - \bar{x}_{n+1}(t)$ 和 $\tilde{y}_2(t) = y_2(t) - \bar{y}_2(t)$.令 $e(t) = [e_1^T(t) \ e_2^T(t)]^T$,对于任意的 $r(t) = i, \epsilon(t) = k, i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{M}$,由式(5)–(6)可得

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_k)\omega(t) - \bar{B}_i K_k e(t) + \bar{G}_i b(t), \\ \dot{e}(t) = (\bar{A}_i - E_{ik} \bar{C}_{1i})e(t) + \bar{G}_i b(t). \end{cases} \quad (7)$$

令 $\tilde{\omega}(t) = [\omega^T(t) \ e^T(t)]^T$,对于任意的 $r(t) = i, \epsilon(t) = k, i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{M}$,可得如下基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\omega}}(t) = \tilde{A}_{ik} \tilde{\omega}(t) + \tilde{G}_{ik} b(t), \\ \tilde{y}_2(t) = \tilde{C}_{2i} \tilde{\omega}(t), \\ \tilde{\omega}(0) = \tilde{\omega}_0, \ t = 0, \end{cases} \quad (8)$$

其中: $\tilde{A}_{ik} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i + \bar{B}_i K_k & -\bar{B}_i K_k \\ 0 & \bar{A}_i - E_{ik} \bar{C}_{1i} \end{bmatrix}, \tilde{G}_{ik} = \begin{bmatrix} \bar{G}_i \\ \bar{G}_i \end{bmatrix}, \tilde{C}_{2i} = [0 \ \bar{C}_{2i}]$.

在系统分析与设计前,首先给出如下定义、引理和假设.

定义 2^[24] 对于给定的常数 $T > 0, c_1 > 0$,如果存在常数 $c_2 > c_1 > 0$ 、对称正定矩阵 $\tilde{R}_{ik} > 0$,使得对于任意 $t \in [0 \ T]$,下式成立:

$$\tilde{\omega}_0^T \tilde{R}_{ik} \tilde{\omega}_0 \leq c_1 \Rightarrow \mathbf{E}\{\tilde{\omega}^T(t) \tilde{R}_{ik} \tilde{\omega}(t)\} \leq c_2, \quad (9)$$

则称基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是关于 $(c_1, c_2, T, \tilde{R}_{ik})$ 有限时间有界的.

引理 3^[14] 对于任意的 $r(t) = i \in \mathcal{N}$,假设 H_i, J_i 是具有适当维数的模态依赖矩阵, $\Gamma_i(t)$ 满足 $\|\Gamma_i(t)\| \leq 1$,则存在一个模态依赖常数 $\mu_i > 0$ 使得 $H_i \Gamma_i(t) J_i + (H_i \Gamma_i(t) J_i)^T < \mu_i^{-1} H_i H_i^T + \mu_i J_i^T J_i$ 成立.

假设 1^[18] 不确定的不匹配扰动函数 $f(x(t), d(t), t)$ 及其变化率 $b(t)$ 是未知有界函数且满足 $\|b(t)\| \leq \|\tilde{\omega}(t)\| + \|d(t)\|$.

假设 2^[9] 对于给定的时间区间 $[0 \ T]$,外部干扰 $d(t)$ 是未知有界函数,存在一个正常数 $\varpi > 0$ 满足

$$\int_0^T d^T(\tau) d(\tau) d\tau \leq \varpi$$

成立.

3 主要结论

本文的目的是引入适当的扩展变量,设计合适的依赖于 $\epsilon(t)$ 的异步状态反馈控制器和观测器,使得相应的闭环随机隐Markov增广跳变系统为正系统,且有

限时间有界.同时,设计并选择合适的扰动补偿增益 K_{2k} ,补偿不匹配扰动在控制输出中的影响.

定理 1 基于假设1,对于任意的 $r(t) = i \in \mathcal{N}$,如果依赖于 $\epsilon(t)$ 的异步状态反馈控制器(6)使得 $(A_i + B_i K_{1k})$ 是Schur矩阵,且所设计的扰动补偿增益 K_{2k} 满足

$$\begin{aligned} & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} B_i K_{2k} = \\ & - C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} G_i, \end{aligned} \quad (10)$$

那么,异步状态反馈控制器(6)可以补偿随机隐Markov跳变系统(3)中不确定不匹配扰动 $f(x(t), d(t), t)$ 对控制输出 $y_2(t)$ 的影响.

证 对于任意的 $r(t) = i \in \mathcal{N}$,将依赖于 $\epsilon(t)$ 的异步状态反馈控制器(6)代入到式(3)中,可得

$$\begin{aligned} x(t) = & (A_i + B_i K_{1k})^{-1} [(\dot{x}(t) + B_i K_k e(t)) - \\ & (A_i + B_i K_{1k})^{-1} [B_i K_{2k} + G_i] f(x(t), d(t), t)], \end{aligned} \quad (11)$$

结合式(3)(11)可得控制输出 $y_2(t)$ 为

$$\begin{aligned} y_2(t) = & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} (\dot{x}(t) + B_i K_k e(t)) - \\ & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} (B_i K_{2k} + G_i) f(x(t), d(t), t) = \\ & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} (\dot{x}(t) + B_i K_k e(t)) - \\ & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} G_i e_2(t) - \\ & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} G_i \bar{x}_{n+1}(t) - \\ & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} B_i K_{2k} \bar{x}_{n+1}(t), \end{aligned} \quad (12)$$

考虑到式(10),上式等价于

$$\begin{aligned} y_2(t) = & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} (\dot{x}(t) + B_i K_{1k} e_1(t)) - \\ & C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} G_i e_2(t). \end{aligned} \quad (13)$$

由式(13)可以看出,不确定不匹配扰动 $f(x(t), d(t), t)$ 对增广跳变系统的影响在控制输出 $y_2(t)$ 中被补偿,并且扰动补偿增益 $K_{2k} = -[C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} B_i]^{-1} C_{2i}(A_i + B_i K_{1k})^{-1} G_i$. 证毕.

注 4 定理1给出了保证不确定不匹配扰动 $f(x(t), d(t), t)$ 对随机隐Markov增广跳变系统的影响在控制输出 $y_2(t)$ 中被衰减时的充分条件.在下面的定理2中,将给出充分条件保证基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统,且关于 $(c_1, c_2, T, \tilde{R}_{ik}, \varpi)$ 有限时间有界.

定理 2 对于给定的常数 $T > 0, c_1 > 0, \eta > 0, \varpi > 0$,如果存在常数 $0 < c_1 < c_2, \bar{\varphi}_{\tilde{P}_{ik}} > 0, \underline{\varphi}_{\tilde{P}_{ik}} > 0, \theta > 0$,依赖于 $Z(t)$ 的对称正定矩阵 $\tilde{P}_{ik}, \tilde{R}_{ik}$,其中 $(i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$, Metzler矩阵 \tilde{A}_{ik} ,正矩阵 \tilde{G}_{ik} 和 \tilde{C}_{2i} ,使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} A_{ik} & \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} & 0 \\ * & -\mu_i I & 0 \\ * & * & (\mu_i - \theta) I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$(c_1 \bar{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} + \theta \varpi) e^{\eta T} < c_2 \underline{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}}, \quad (15)$$

其中:

$$\mathbf{A}_{ik} = \mathbf{Her}(\tilde{P}_{ik} \tilde{A}_{ik}) + \sum_{(j,l) \in \nu} \nu_{(i,k)(j,l)} \tilde{P}_{jl} + \mu_i I - \eta \tilde{P}_{ik},$$

$$\tilde{P}'_{ik} = \tilde{R}_{ik}^{-1/2} \tilde{P}_{ik} \tilde{R}_{ik}^{-1/2},$$

$$\bar{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} = \max_{(i,k) \in \nu} \varphi_{\max}(\tilde{P}'_{ik}), \quad \underline{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} = \min_{(i,k) \in \nu} \varphi_{\min}(\tilde{P}'_{ik}).$$

那么, 称基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统, 且关于 $(c_1, c_2, T, \tilde{R}_{ik}, \varpi)$ 有限时间有界.

证 由于 \tilde{A}_{ik} 是Metzler矩阵, \tilde{G}_{ik} 和 \tilde{C}_{2i} 是正矩阵, 由引理1可知基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统.

构造如下所示的Lyapunov-Krasovskii泛函 $V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t > 0) : \mathbb{R}^n \times \nu \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t) = \tilde{\omega}^T(t) \tilde{P}_{ik} \tilde{\omega}(t). \quad (16)$$

延着增广跳变系统(8)的轨迹, 可以得到 $V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t)$ 的弱无穷小算子为

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t) &= \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(t+\tau), Z(t+\tau), t+\tau) | \tilde{\omega}(t), Z(t)\}] - & \\ V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t) &= \\ \tilde{\omega}^T(t) [\mathbf{Her}(\tilde{P}_{ik} \tilde{A}_{ik}) + \sum_{(j,l) \in \nu} \nu_{(i,k)(j,l)} \tilde{P}_{jl}] \tilde{\omega}(t) + & \\ \mathbf{Her}(\tilde{\omega}^T(t) \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} b(t)). & \quad (17) \end{aligned}$$

由引理3以及假设1知, 存在一个模态依赖常数 $\mu_i > 0$, 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{Her}(\tilde{\omega}^T(t) \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} b(t)) &= \\ \tilde{\omega}^T(t) \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} b(t) + (\tilde{\omega}^T(t) \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} b(t))^T &\leq \\ \mu_i b^T(t) b(t) + \mu_i^{-1} \tilde{\omega}^T(t) \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} \tilde{G}_{ik}^T \tilde{P}_{ik} \tilde{\omega}(t) &\leq \\ \mu_i \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t) + \mu_i d^T(t) d(t) + & \\ \mu_i^{-1} \tilde{\omega}^T(t) \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} \tilde{G}_{ik}^T \tilde{P}_{ik} \tilde{\omega}(t). & \quad (18) \end{aligned}$$

由 $\mathfrak{S}V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t) < 0$, 可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\omega}(t) \\ d(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{ik} & 0 \\ * & \mu_i I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}(t) \\ d(t) \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ik} &= \mathbf{Her}(\tilde{P}_{ik} \tilde{A}_{ik}) + \sum_{(j,l) \in \nu} \nu_{(i,k)(j,l)} \tilde{P}_{jl} + \\ &\mu_i I + \mu_i^{-1} \tilde{P}_{ik} \tilde{G}_{ik} \tilde{G}_{ik}^T \tilde{P}_{ik}. \end{aligned}$$

考虑到定义2, 引入如下的辅助不等式:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathfrak{S}V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t)\} &< \\ \eta V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t) + \theta d^T(t) d(t), & \quad (20) \end{aligned}$$

其中式(14)可保证式(20)成立.

进而, 对于任意的 $t \in [0, T]$, 对式(20)从0到 t 进行积分, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t)\} - \mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(0), Z(0))\} &< \\ \eta \int_0^t \mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(\tau), Z(\tau), \tau)\} d\tau + & \\ \theta \int_0^t d^T(\tau) d(\tau) d\tau. & \quad (21) \end{aligned}$$

设 $\tilde{P}'_{ik} = \tilde{R}_{ik}^{-1/2} \tilde{P}_{ik} \tilde{R}_{ik}^{-1/2}$ 和 $\bar{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} = \max_{(i,k) \in \nu} \varphi_{\max}(\tilde{P}'_{ik})$ 并考虑到定义2, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t)\} &< (c_1 \bar{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} + \theta d) + \\ \eta \int_0^t \mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(\tau), Z(\tau), \tau)\} d\tau. & \quad (22) \end{aligned}$$

由Gronwall不等式方法可知式(22)等价于

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t)\} &< e^{\eta t} (c_1 \bar{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} + \theta \varpi) < \\ e^{\eta T} (c_1 \bar{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} + \theta \varpi). & \quad (23) \end{aligned}$$

另一方面, 定义 $\underline{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} = \min_{(i,k) \in \nu} \varphi_{\min}(\tilde{P}'_{ik})$, 可由Rayleigh不等式方法得到

$$\mathbf{E}\{V(\tilde{\omega}(t), Z(t), t)\} > \underline{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} \mathbf{E}\{\tilde{\omega}^T \tilde{R}_{ik} \tilde{\omega}(t)\} (t). \quad (24)$$

结合式(23)–(24), 可得

$$\mathbf{E}\{\tilde{\omega}^T \tilde{R}_{ik} \tilde{\omega}(t)\} (t) < \frac{e^{\eta T} (c_1 \bar{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}} + \theta \varpi)}{\underline{\varphi}_{\tilde{P}'_{ik}}}. \quad (25)$$

考虑到式(15)可知, 对于任意的 $t \in [0, T]$,

$$\mathbf{E}\{\tilde{\omega}^T \tilde{R}_{ik} \tilde{\omega}(t)\} (t) < c_2$$

成立. 证毕.

注 5 由式(18)知, 不确定不匹配扰动 $f(x(t), d(t), t)$ 及其变化率 $b(t)$ 对增广跳变系统具有一定的影响. 为了分析并得到基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统且有限时间有界的充分条件, 本文假设不确定的不匹配扰动函数 $f(x(t), d(t), t)$ 及其变化率 $b(t)$ 和外部干扰 $d(t)$ 是未知有界函数, 且满足假设1和假设2给定的有界条件.

注 6 定理2给出了保证基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统、且关于 $(c_1, c_2, T, \tilde{R}_{ik}, \varpi)$ 有限时间有界的充分条件. 需要指出的是, 由于矩阵不等式(14)中含有非线性项, 不能直接利用MATLAB工具箱求解. 在定理3中, 本文将结合矩阵不等式转换法将式(14)中的非线性项进行处理, 得到可直接求解 E_{ik}, K_{1k} 和 K_{2k} 的线性矩阵不等式. 同时, 定理3将对系统(8)的正性进行分析, 给出满足随机隐Markov增广跳变系统为正系统的充分条件.

定理 3 对于给定的常数 $T > 0, c_1 > 0, \eta > 0, \varpi > 0$, 如果存在常数 $0 < c_1 < c_2, \varphi_1 > 0, \bar{\varphi}_1 > 0, \mu_i > 0, \theta > 0, \rho_i > 0$, 依赖于 $Z(t)$ 的对称正定矩阵 X_{ik}, R_{ik} , 其中 $(i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$, 依赖于 $\epsilon(t)$ 的对称正定矩阵 Q_k , 依赖于 $\epsilon(t)$ 的矩阵 S_k , 使得下式成立:

$$\Pi_{1ik} + \Pi_{2ik} < 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \theta\varpi - \frac{c_2 e^{-\eta T}}{\bar{\varphi}_1} & \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_1} & -\underline{\varphi}_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

$$\underline{\varphi}_1 R_{ik}^{-1} < X_{ik} < R_{ik}^{-1}, \quad (28)$$

$$\bar{A}_i L_i Q_k + B_i S_k + \alpha_i I \succeq 0, \quad (29)$$

$$\bar{A}_i L_i Q_k + \alpha_i I \succeq 0, \quad -\bar{B}_i S_k \succeq 0, \quad (30)$$

其中:

$$\Pi_{1ik} = \mathbf{Her} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\Pi_{2ik} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ik} & \mathbf{D}_{ik} & \mathbf{E}_{ik} \\ * & \mathbf{F}_i & 0 \\ * & * & \mathbf{G}_{ik} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{ik} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i L_i Q_k + \bar{B}_i S_k & -\bar{B}_i S_k \\ 0 & \bar{A}_i L_i Q_k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \rho_i I & 0 \\ 0 & \rho_i I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{ik} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ik} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{ik} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{G}_i X_{ik} & 0 \\ X_{ik} \bar{C}_{1i}^T & \bar{G}_i X_{ik} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_{ik} = \begin{bmatrix} X_{ik} \Phi_{ik} & 0 \\ 0 & X_{ik} \Phi_{ik} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_i = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{2}, \mu_i I, (\mu_i - \theta) I \right\},$$

$$\mathbf{G}_{ik} = \begin{bmatrix} -\Omega'_{ik} & 0 \\ 0 & -\Omega'_{ik} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{ik} =$$

$$[\sqrt{\nu_{ik} \lambda_{(i,k)}^{(1)}} I \sqrt{\nu_{(i,k)} \lambda_{(i,k)}^{(2)}} I \cdots \sqrt{\nu_{(i,k)} \lambda_{(i,k)}^{(r(i,k))}} I],$$

$$\Omega'_{ik} = \text{diag} \{ X_{\lambda_{(i,k)}^{(1)}}^{-1}, X_{\lambda_{(i,k)}^{(2)}}^{-1}, \dots, X_{\lambda_{(i,k)}^{(r(i,k))}}^{-1} \},$$

$$\mathbf{C}_{ik} = (\nu_{(i,k)} - \eta) X_{ik} + \mu_i I,$$

那么, 存在有限时间异步状态反馈控制和观测器(6), 使得基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统, 且关于\$(c_1, c_2, T, \tilde{R}_{ik}, \varpi)\$有限时间有界. 并且, 依赖于\$Z(t)\$的观测器增益和依赖于\$\epsilon(t)\$的控制器增益分别为\$E_{ik} = X_{ik} \bar{C}_{1i}^T, K_k = S_k Q_k^{-1}\$.

证 将式(8)中的\$\tilde{A}_{ik}\$和\$\tilde{G}_{ik}\$代入到式(14)中, 并定义\$\tilde{P}_{ik} = \text{diag}\{P_{ik}, P_{ik}\}\$, 可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ik} + \mathbf{I}_{ik} & \mathbf{J}_{ik} & 0 \\ * & -\mu_i I & 0 \\ * & * & (\mu_i - \theta) I \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

其中:

$$\mathbf{H}_{ik} =$$

$$\mathbf{Her} \left(\begin{bmatrix} P_{ik}(\bar{A}_i + \bar{B}_i K_k) & -P_{ik} \bar{B}_i K_k \\ 0 & P_{ik}(\bar{A}_i - E_{ik} \bar{C}_{1i}) \end{bmatrix} \right)^+$$

$$\sum_{(j,l) \in \nu} \nu_{(i,k)(j,l)} \begin{bmatrix} P_{il} & 0 \\ 0 & P_{il} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_{ik} = \begin{bmatrix} \mu_i I - \eta P_{ik} & 0 \\ 0 & \mu_i I - \eta P_{ik} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{ik} = \begin{bmatrix} P_{ik} \bar{G}_i \\ P_{ik} \bar{G}_i \end{bmatrix},$$

$$\sum_{(j,l) \in \nu} \nu_{(i,k)(j,l)} \begin{bmatrix} P_{il} & 0 \\ 0 & P_{il} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ik} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{ik} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{ik} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{ik} = \Phi_{ik} \Omega_{ik}^{-1} \Phi_{ik}, \quad \mathbf{E}_{ik} = \nu_{(i,k)(i,k)} P_{ik},$$

$$\nu' = \{(j, l) \in \nu, (i, k) \neq (j, l), \nu_{(i,k)(j,l)} \neq 0\} =$$

$$\{\lambda_{(i,k)}^{(1)}, \lambda_{(i,k)}^{(2)}, \dots, \lambda_{(i,k)}^{(r(i,k))}\nu\},$$

$$\Phi_{ik} =$$

$$[\sqrt{\nu_{ik} \lambda_{(i,k)}^{(1)}} I \sqrt{\nu_{(i,k)} \lambda_{(i,k)}^{(2)}} I \cdots \sqrt{\nu_{(i,k)} \lambda_{(i,k)}^{(r(i,k))}} I],$$

$$\Omega_{ik} = \text{diag} \{ P_{\lambda_{(i,k)}^{(1)}}^{-1}, P_{\lambda_{(i,k)}^{(2)}}^{-1}, \dots, P_{\lambda_{(i,k)}^{(r(i,k))}}^{-1} \}.$$

用 \$\text{diag}\{P_{ik}^{-1}, P_{ik}^{-1}, I, I\}\$ 左右乘式(31), 并令 \$X_{ik} = P_{ik}^{-1}, Y_{ik} = K_k X_{ik}\$, 可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ik} + \mathbf{C}_{ik} & \mathbf{M}_{ik} & \mathbf{E}_{ik} \\ * & \mathbf{N}_{ik} & 0 \\ * & * & \mathbf{G}_{ik} \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

其中:

$$\mathbf{L}_{ik} = \mathbf{Her} \left(\begin{bmatrix} \bar{A}_i X_{ik} + \bar{B}_i Y_{ik} & -\bar{B}_i Y_{ik} \\ 0 & \bar{A}_i X_{ik} - E_{ik} \bar{C}_{1i} X_{ik} \end{bmatrix} \right),$$

$$\mathbf{M}_{ik} = \begin{bmatrix} \bar{G}_i X_{ik} & 0 \\ \bar{G}_i X_{ik} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{ik} = \begin{bmatrix} -\mu_i I & 0 \\ 0 & (\mu_i - \theta) I \end{bmatrix}.$$

对于式(32)中的 \$\mathbf{L}_{ik}\$, 令 \$E_{ik} = X_{ik} \bar{C}_{1i}^T, X_{ik} = \rho_i L_i Q_k\$, 其中 \$L_i\$ 是非奇异单位矩阵. 因此, 可以由 \$\mathbf{L}_{ik}\$ 得

$$\begin{cases} \bar{A}_i X_{ik} + \bar{B}_i Y_{ik} = \\ \rho_i (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_k) L_i Q_k - \bar{B}_i Y_{ik} = \\ -\rho_i \bar{B}_i K_k L_i Q_k, \\ \bar{A}_i X_{ik} = \rho_i \bar{A}_i L_i Q_k. \end{cases} \quad (33)$$

由于 \$L_i\$ 是非奇异单位矩阵, 定义 \$S_k = K_k L_i Q_k\$, 并利用Schur补引理, 可知式(32)可由式(26)保证. 由式(26), 知 \$\mathbf{Her}(L_i Q_k) > 0\$, 即 \$\mathbf{Her}(Q_k) > 0\$, 则 \$Q_k\$ 也是一个非奇异矩阵, 即 \$K_k = S_k Q_k^{-1}\$.

设

$$\tilde{X}_{ik} = \text{diag}\{X_{ik}, X_{ik}\}, \quad \bar{X}_{ik} = \tilde{R}_{ik}^{-1/2} \tilde{X}_{ik} \tilde{R}_{ik}^{-1/2},$$

$$\bar{\varphi}_{\bar{X}_{ik}} = \max_{(i,k) \in \nu} \varphi_{\max}(\bar{X}_{ik}), \quad \underline{\varphi}_{\bar{X}_{ik}} = \min_{(i,k) \in \nu} \varphi_{\min}(\bar{X}_{ik}).$$

令 $\underline{\varphi}_1 \leq \underline{\varphi}_{\bar{X}_{ik}}, \bar{\varphi}_1 \geq \bar{\varphi}_{\bar{X}_{ik}}$, 并考虑到

$$\bar{\varphi}_{\bar{X}_{ik}} = \frac{1}{\underline{\varphi}_{\bar{P}'_{ik}}}, \underline{\varphi}_{\bar{X}_{ik}} = \frac{1}{\bar{\varphi}_{\bar{P}'_{ik}}},$$

那么, 式(15)可改写为

$$\left(\frac{c_1}{\underline{\varphi}_1} + \theta\varpi\right)e^{\eta T} < \frac{c_2}{\bar{\varphi}_1}. \quad (34)$$

因此, 利用Schur补引理和特征值转换法, 可由式(34)得到式(27)–(28).

接下来, 证明基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统. 由式(29)–(30)可知 $(\bar{A}_i L_i Q_k + \bar{B}_i S_k)$ 和 $\bar{A}_i L_i Q_k$ 是 Metzler 矩阵, $-\bar{B}_i S_k$ 是正矩阵, 并考虑到 $S_k = K_k L_i Q_k$, 可知 $(\bar{A}_i + \bar{B}_i K_k) L_i Q_k$ 和 $\bar{A}_i L_i Q_k$ 是 Metzler 矩阵, $-\bar{B}_i K_k L_i Q_k$ 是正矩阵. 因此, 式(8)中的 \bar{A}_{ik} 是 Metzler 矩阵. 同时, 由于 \bar{G}_{ik} 和 \bar{C}_{2i} 是正矩阵. 结合定义1和引理1知基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统. 证毕.

4 数值算例

例 1 考虑如下的具有两个模态的含有不匹配函数的二阶随机Markov跳变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{i11}x_1(t) + a_{i12}x_2(t) + b_i u(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{i21}x_1(t) + a_{i22}x_2(t) + g_i(e^{x_2(t)} + \sin x_2(t)), \\ y_1(t) = c_{1i11}x_1(t) + c_{1i12}x_2(t), \\ y_2(t) = c_{2i11}x_1(t) + c_{2i12}x_2(t), \end{cases} \quad (35)$$

其中各模态参数的选取如表2所示.

表 2 二阶随机Markov跳变系统(35)参数
Table 2 The parameters of the second-order stochastic Markov jump systems (35)

参数	$i = 1$	$i = 2$	参数	$i = 1$	$i = 2$
a_{i11}	-17	-16	c_{1i11}	0.8	0.3
a_{i12}	6.86	7.34	c_{1i12}	0.6	0.4
a_{i21}	5.2	5.2	c_{2i11}	0.5	0.3
a_{i22}	-15	-16.3	c_{2i12}	0.3	0.7
b_i	0.2	0.3	g_i	0.6	0.3

由式(35)和表4可知随机隐Markov正跳变系统的隐藏状态 $r(t)$ 在集合 $\mathcal{N} := \{1, 2\}$ 中取值, 其系统参数矩阵为

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -17 & 6.86 \\ 5.2 & -15 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -16 & 7.34 \\ 5.2 & -16.3 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \\ G_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}, C_{11} = [0.8 \ 0.6], C_{12} = [0.3 \ 0.4], \\ C_{21} &= [0.5 \ 0.3], C_{22} = [0.7 \ 0.3]. \end{aligned}$$

不确定的不匹配扰动函数取 $f(x(t), d(t), t) = e^{x_2(t)} + \sin x_2(t)$. 假设随机隐Markov正跳变系统的隐藏状态 $r(t)$ 的转移率矩阵为

$$\Pi = [\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix},$$

同时, 考虑到控制器增益 K_k 依赖于观测状态 $\epsilon(t)$, 其中 $\epsilon(t) \in \mathcal{M}$. 假设随机隐Markov正跳变系统具有两种控制策略, 即, $\mathcal{M} := \{1, 2\}$, 且依赖于 Π 的条件概率率矩阵为

$$\aleph^1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix}, \aleph^2 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0.6 & -0.6 \end{bmatrix},$$

隐藏状态 $r(t)$ 和观测状态 $\epsilon(t)$ 分别为

$$\alpha_1 = \alpha_{jl}^1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \alpha_{jl}^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

通过求解式(26)–(30), 可以得到观测器增益 E_{ik} 和控制器增益 K_{1k} 为

$$\begin{aligned} E_{11} &= \text{col}[0.5669 \ 0.8178 \ 0.0001], \\ E_{12} &= \text{col}[0.5562 \ 0.7745 \ -0.0016], \\ E_{21} &= \text{col}[0.1931 \ 0.6105 \ 0.0016], \\ E_{22} &= \text{col}[0.1927 \ 0.5886 \ 0.0008], \\ K_{11} &= [-1.5920 \ 13.3417], \\ K_{12} &= [-1.0492 \ 12.3597]. \end{aligned}$$

同时, 考虑到定理1, 可以求解出扰动补偿增益分别为: $K_{21} = -2.7483, K_{22} = -4.6064$ 以及系统参数 $c_2 = 3.3776$. 假设系统初始状态为: $x(0) = \text{col}[0.6 \ 0.6], c_1 = 0.9, R_{ik} = I$. 通过对系统在 $t \in [0 \ 3]$ 内进行仿真, 可以得到如下图1–5所示的仿真结果.

图1给出了隐Markov系统的跳变模态, 其中图(a)是隐藏状态 $r(t)$ 的跳变模态, 图(b)是观测状态 $\epsilon(t)$ 的跳变模态. 图2是基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统轨迹 $\mathbf{E}\{\tilde{\omega}^T(t)\tilde{R}_{ik}\tilde{\omega}(t)\}$, 通过图2可以看出基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统(8)是正系统、且关于 $(0.9, 3.3776, 3, 1, 0.3)$ 有限时间有界. 图3–5分别给出了闭环随机隐Markov跳变系统的实际状态轨迹 $x(t)$ 、估计状态轨迹 $\bar{x}(t)$ 、估计误差轨迹 $e_1(t)$ 、控制输出 $y_2(t)$ 、估计输出 $\bar{y}_2(t)$ 和估计输出误差 $\tilde{y}_2(t)$. 由图3–5可以看出本文所设计的异步状态反馈控制器和观测器的有效性.

例 2 为了验证所设计的ESO方法的实用性, 本文以RL电路系统为例, 并考虑建模过程中的外部不确定不匹配干扰和随机故障影响, 具体如图6所示.

假设图6所示的RL电路系统具有两个位置, 以随机的方式从一个位置切换到另外一个位置且遵循隐Markov过程. 外部不确定不匹配干扰和随机故障会影

响电路系统的支路电流,进而会给整个电路的稳定性带来影响.为了解决外部不确定不匹配干扰和随机故障对整个电路系统的影响,本文采用ESO方法对RL电路系统进行分析与设计.由基尔霍夫定律,可由RL电路系统得

$$\begin{cases} R_3(i_1 - i_2) + R_1 i_1 + a(r(t)) \frac{di_1}{dt} = e_1, \\ R_3(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + b(r(t)) \frac{di_2}{dt} + \\ f(i_2(t), d(t), t) = e_1, \\ y_1 = R_1 i_1, y_2 = R_2 i_2, \end{cases} \quad (36)$$

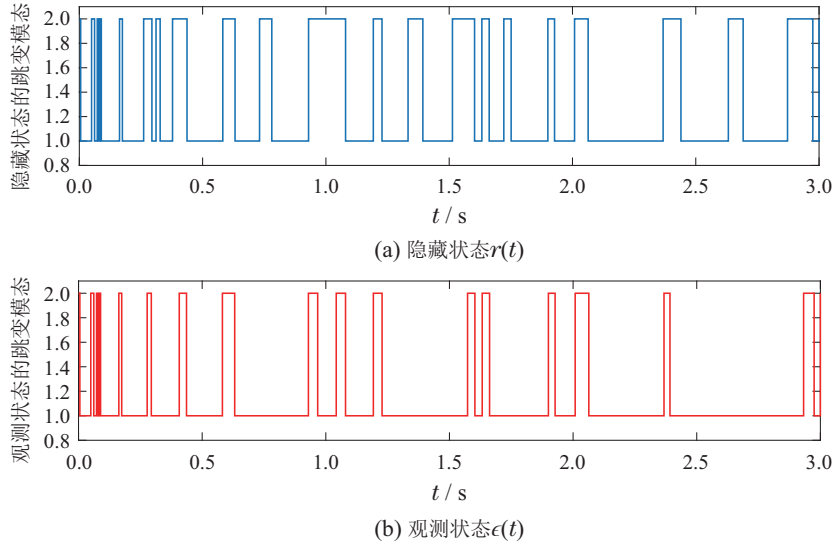


图1 跳变模式

Fig. 1 The jump modes

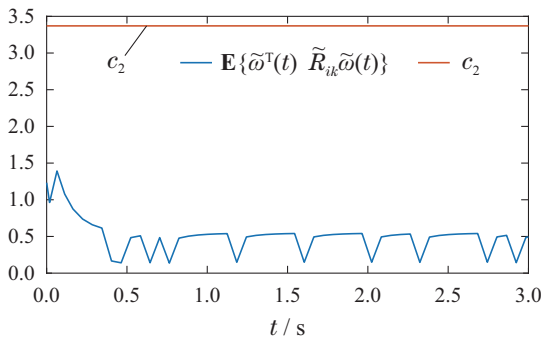


图2 基于ESO的闭环随机隐Markov增广跳变系统轨迹 $\mathbf{E}\{\tilde{\omega}^T(t) \tilde{R}_{ik} \tilde{\omega}(t)\}$

Fig. 2 The state trajectory $\mathbf{E}\{\tilde{\omega}^T(t) \tilde{R}_{ik} \tilde{\omega}(t)\}$ of the closed-loop ESO-based stochastic hidden Markov augmented jump systems

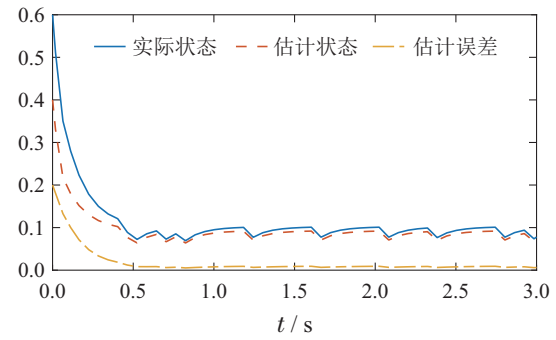


图4 闭环随机隐Markov跳变系统的实际状态 $x_2(t)$ 、估计状态 $\bar{x}_2(t)$ 和估计误差 $e_{12}(t)$

Fig. 4 The real state $x_2(t)$, the estimated state $\bar{x}_2(t)$ and the estimation error $e_{12}(t)$ of the closed-loop stochastic hidden Markov jump systems

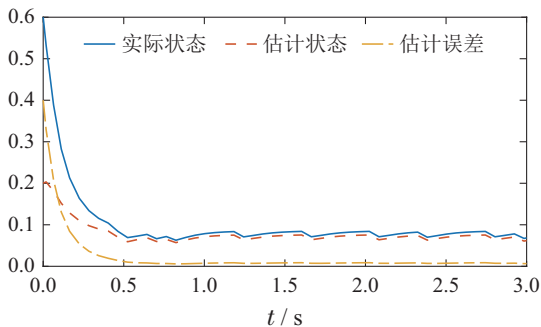


图3 闭环随机隐Markov跳变系统的实际状态 $x_1(t)$ 、估计状态 $\bar{x}_1(t)$ 和估计误差 $e_{11}(t)$

Fig. 3 The real state $x_1(t)$, the estimated state $\bar{x}_1(t)$ and the estimation error $e_{11}(t)$ of the closed-loop stochastic hidden Markov jump systems

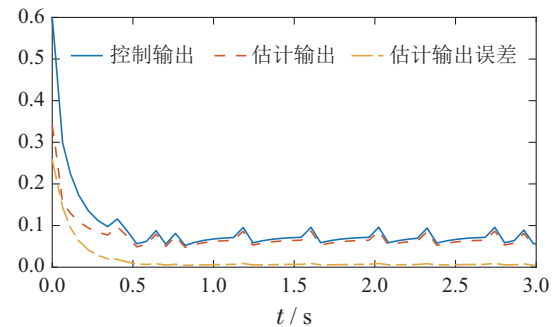


图5 闭环随机隐Markov跳变系统的控制输出 $y_2(t)$ 、估计输出 $\bar{y}_2(t)$ 和估计输出误差 $\tilde{y}_2(t)$

Fig. 5 The controlled output $y_2(t)$, the estimated output $\bar{y}_2(t)$ and the estimation output error $\tilde{y}_2(t)$ of the closed-loop stochastic hidden Markov jump systems

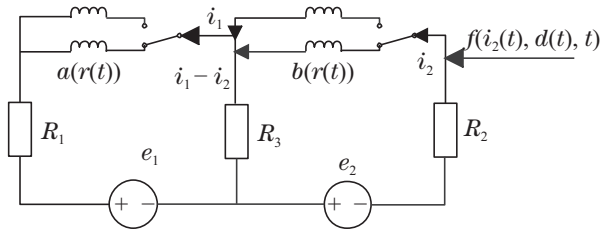


图 6 RL电路系统

Fig. 6 The RL circuit systems

因此, 对式(36)整理可得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = A_i \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + B_i \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + G_i f(i_2(t), d(t), t), \\ y_1 = C_1 \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, y_2 = C_2 \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (37)$$

其中:

$$A_i = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_3}{a(r(t))} & \frac{R_3}{a(r(t))} \\ \frac{R_3}{b(r(t))} & -\frac{R_2 + R_3}{b(r(t))} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{a(r(t))} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b(r(t))} \end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b(r(t)) \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [R_1 \ 0], C_2 = [0 \ R_2],$$

$$a(r(t)) = \begin{cases} L_1, & i = 1, \\ L_2, & i = 2, \end{cases} b(r(t)) = \begin{cases} L_3, & i = 1, \\ L_4, & i = 2. \end{cases}$$

由式(37)知 A_i 是 Metzler 矩阵, B_i, G_i 和 C 是正矩阵. 因此, RL 电路系统(37)可建模为正系统. 同时, 考虑到如下表3所示的RL电路系统(37)各模态参数(R 单位: 欧姆, L 单位: 亨):

表 3 RL 电路系统(37)参数

Table 3 The parameters of the RL circuit systems (37)

参数	R_1	R_2	R_3	L_1	L_2	L_3	L_4
数值	28.7	27.5	2.4	1.1	1.5	1.3	1.6

不确定的不匹配扰动函数取 $f(x(t), d(t), t) = e^{i_2(t)} + \sin i_2(t)$. 对于任意的 $M := \{1, 2\}$, 选择与例1相同的隐藏状态 $r(t)$ 的转移率矩阵 $\Pi = [\pi_{ij}]$ 和依赖于 Π 的条件概率矩阵 \aleph^1, \aleph^2 . 通过求解式(26)–(30), 可以得到观测器增益 E_{ik} 和控制器增益 K_{1k} 为

$$\begin{aligned} E_{11} &= E_{12} = \text{col}[0.2048 \ 0.0002 \ 0], \\ E_{21} &= \text{col}[0.2255 \ -0.0004 \ 0], \\ E_{22} &= \text{col}[0.2251 \ -0.0003 \ 0.0008], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= \begin{bmatrix} 0.3609 & -0.0261 \\ -0.0326 & 0.3789 \end{bmatrix}, \\ K_{12} &= \begin{bmatrix} 0.3606 & -0.0261 \\ -0.0326 & 0.3783 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

同时, 考虑到定理1, 可以求解出扰动补偿增益分别为

$$K_{21} = K_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

假设系统初始状态为: $i_1(0) = 0.4, i_2(0) = 0.3, c_1 = 0.6, R_{ik} = I$. 通过对系统在 $t \in [0 \ 5]$ 内进行仿真, 可以得到如下图7所示的RL电路系统的控制输出、估计输出和估计输出误差仿真结果.

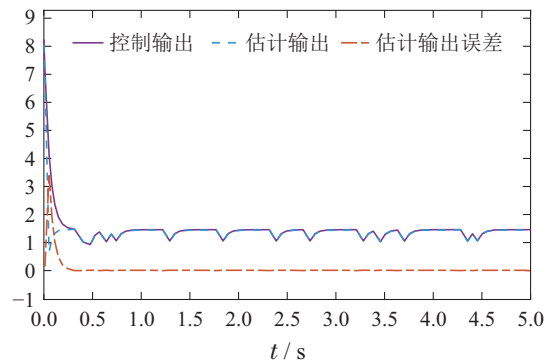


图 7 电路系统的控制输出、估计输出和估计输出误差
Fig. 7 The controlled output, the estimated output and the estimation output error of the RL circuit systems

由图7可以看出本文所设计的基于ESO的异步状态反馈控制器和观测器可以补偿不匹配扰动在控制输出中的影响.

5 结论

本文研究了基于ESO的连续时间随机隐Markov正跳变系统的有限时间异步控制问题. 为了补偿不匹配扰动对隐Markov跳变系统的影响, 本文引入一组扩展变量将随机隐Markov正跳变系统转换成一组新的随机扩展系统. 结合Lyapunov–Krasovskii泛函和线性矩阵不等式方法, 给出了使得增广跳变系统是正系统, 且有限时间有界的充分条件. 同时, 本文采用矩阵不等式转换法得到了可以直接求解观测器增益和控制器增益的充分条件. 最后, 通过数值算例和RL电路模型验证了本文所设计的异步状态反馈控制器和观测器的有效性和可行性.

参考文献:

[1] CHEN B, NIU Y, LIU H. Input-to-state stabilization of stochastic Markovian jump systems under communication constraints: genetic algorithm-based performance optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, DOI: 10.1109/TCYB.2021.3066509.
[2] CAO Z, NIU Y, LAM J, et al. A hybrid sliding mode control scheme of Markovian jump systems via transition rates optimal design. *IEEE*

- Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, DOI: 10.1109/TSMC.2020.2980851.
- [3] XIE W, ZHANG R, ZENG D, et al. Strictly dissipative stabilization of multiple-memory Markov jump systems with general transition rates: A novel event-triggered control strategy. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(5): 1956 – 1978.
- [4] STADTMANN F, COSTA O. H_2 -control of continuous-time hidden markov jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(8): 4031 – 4037.
- [5] STADTMANN F, COSTA O. Exponential hidden markov models for H_∞ control of jumping systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2018, 2(4): 845 – 850.
- [6] SONG J, NIU Y, ZOU Y. Asynchronous output feedback control of time-varying Markovian jump systems within a finite-time interval. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(15): 6747 – 6765.
- [7] SONG J, NIU Y, ZOU Y. Asynchronous sliding mode control of Markovian jump systems with time-varying delays and partly accessible mode detection probabilities. *Automatica*, 2018, 93: 33 – 41.
- [8] DONG S, WU Z, PAN Y, et al. Hidden-Markov-model-based asynchronous filter design of nonlinear Markov jump systems in continuous-time domain. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(6): 2294 – 2304.
- [9] REN C, HE S, LUAN L, et al. Finite-time L_2 -gain asynchronous control for continuous-time positive hidden Markov jump systems via T-S fuzzy model approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(1): 77 – 87.
- [10] ZHAO X, ZHANG L, SHI P, et al. Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching. *Automatica*, 2012, 48(6): 1132 – 1137.
- [11] ZHU S, HAN Q, ZHANG C. L_1 stochastic stability and L_1 -gain performance of positive Markov jump linear systems with time-delays: necessary and sufficient conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3634 – 3639.
- [12] CAVALCANTI J, BALAKRISHNAN H. Sign-stability of positive Markov jump linear systems. *Automatica*, 2020, 111: 108638.
- [13] DENG X, ZHANG J, LI S, et al. Event-triggered control of positive Markov jump systems without/with input saturation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2017, 43(7): 1503 – 1518.
- [14] ZHANG J, RAISSI T, LI S. Non-fragile saturation control of nonlinear positive Markov jump systems with time-varying delays. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97: 1495 – 1513.
- [15] PARK I S, KWON N K, PARK P. A linear programming approach for stabilization of positive Markovian jump systems with a saturated single input. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 29(7): 322 – 332.
- [16] HAN Jingqing. Expansion state observer for a class of uncertain objects. *Control and Decision*, 1995, 10(1): 85 – 88. (韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器. 控制与决策, 1995, 10(1): 85 – 88.)
- [17] LIU Andong, ZHANG Rongchao, YU Li, et al. Extended state observer-based decentralized model predictive control. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1093 – 1098. (刘安东, 张荣超, 俞立, 等. 基于扩张状态观测器的分散模型预测控制. 控制与决策, 2016, 31(6): 1093 – 1098.)
- [18] LI S, YANG J, CHEN W, et al. Generalized extended state observer based Control for systems with mismatched uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(12): 4792 – 4802.
- [19] XU H, ZHANG J, YANG H, et al. Extended state functional observer-based event-driven disturbance rejection control for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, DOI: 10.1109/TCYB.2020.3043385.
- [20] LIU J, VAZQUEZ S, WU L, et al. Extended state observer-based sliding-mode control for three-phase power converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(1): 22 – 31.
- [21] YAO J, JIAO Z, MA D. Extended-state-observer-based output feedback nonlinear robust control of hydraulic systems with backstepping. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(11): 6285 – 6293.
- [22] DENG W, YAO J. Extended-state-observer-based adaptive control of electrohydraulic servomechanisms without velocity measurement. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2020, 25(3): 1151 – 1161.
- [23] WANG J, LI S, YANG J, et al. Extended state observer-based sliding mode control for PWM-based DC-DC buck power converter systems with mismatched disturbances. *IET Control Theory and Applications*, 2015, 9(4): 579 – 586.
- [24] AMATO F, ARIOLA M, DORATO P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances. *Automatica*, 2001, 37(9): 1459 – 1463.

作者简介:

任乘乘 博士研究生, 主要研究方向为智能信息处理与智能控制,

E-mail: chengcheng-ren@ahu.edu.cn;

宋 军 副研究员, 博士, 主要研究方向为网络滑模控制、控制理论及应用, E-mail: sjky5211@163.com;

何舒平 教授, 博士, 主要研究方向为随机系统控制、强化学习与智能信息处理, E-mail: shuping.he@ahu.edu.cn.