

# 考虑通信时滞和采样周期的电力系统负荷频率控制

练红海<sup>1†</sup>, 覃事刚<sup>1</sup>, 肖伸平<sup>2</sup>, 李谟发<sup>1,3</sup>, 肖会芹<sup>2</sup>

(1. 湖南电气职业技术学院 风能工程学院, 湖南 湘潭 411101; 2. 湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412008;  
3. 湖南大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:** 针对电力系统负荷频率稳定控制问题, 本文提出了一种时滞/采样相关的离散负荷频率控制(LFC)方案. 首先, 考虑通信网络传输时滞和反馈信号采样周期对系统的影响, 建立闭环电力系统LFC模型. 然后, 基于建立的LFC模型, 利用双边闭环Lyapunov泛函和LMI技术, 提出了低保守性的时滞/采样相关稳定准则和控制器设计方法, 确保所提控制方案能在一个较大的通信时滞和采样周期条件下保持电力系统稳定运行. 最后, 通过单区域和三区域电力系统验证所提方法的有效性. 仿真结果表明, 所设计LFC方案比现有其他LFC方案的控制性能更佳, 鲁棒性更强, 并且能在一定大小的通信时滞条件下提升电力系统的动态性能.

**关键词:** 电力系统; LFC; 通信时滞; 采样周期; Lyapunov泛函

**引用格式:** 练红海, 覃事刚, 肖伸平, 等. 考虑通信时滞和采样周期的电力系统负荷频率控制. 控制理论与应用, 2023, 40(5): 891 – 902

DOI:10.7641/CTA.2021.10643

## Load frequency control for power systems considering communication delays and sampling periods

LIAN Hong-hai<sup>1†</sup>, QIN Shi-gang<sup>1</sup>, XIAO Shen-ping<sup>2</sup>, LI Mo-fa<sup>1,3</sup>, XIAO Hui-qin<sup>2</sup>

(1. School of Wind Energy Engineering, Hunan Electrical College of Technology, Xiangtan Hunan 411101, China;  
2. School of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China;  
3. School of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China)

**Abstract:** This paper proposes a delay/sampled-dependent discrete load frequency control (LFC) scheme for the load frequency stability control problem of power systems. First, a LFC model of closed-loop power systems is established by considering the impact of both transmission delays of communication network and sampling periods of feedback signals on the systems. Then, based on the LFC model, by employing a two-side looped Lyapunov functional and LMI technique, a less conservative and delay/sampled-dependent stability criterion and a controller design approach are developed, which guarantee that the proposed control scheme can maintain the system stable operation in a larger communication delay and sampling period. Finally, a one-area power system and a three-area power system are applied to verify the effectiveness of the proposed approach. It is demonstrated from the simulation that the proposed LFC scheme has better control performance and robustness than others in the existing literature, and it can also improve dynamic performance of the power systems under the communication delay of a certain size.

**Key words:** power systems; LFC; communication delays; sampled-data periods; Lyapunov functional

**Citation:** LIAN Honghai, QIN Shigang, XIAO Shenping, et al. Load frequency control for power systems considering communication delays and sampling periods. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(5): 891 – 902

## 1 引言

负荷频率控制 (load frequency control, LFC) 是实现电力系统安全稳定运行, 用于维持电力系统频率及

区域间联络线交换功率在设定范围内的有效方法之一<sup>[1-2]</sup>. 在现代电力系统LFC中, 使用开放式通信网络传输采样测量/控制信号, 在借助通信网络构成控制回

收稿日期: 2021-07-21; 录用日期: 2021-12-30.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: Lianhh.402@163.com; Tel.: +86 18867314491.

本文责任编辑: 曾志刚.

国家自然科学基金项目(61703153), 湖南省自然科学基金项目(2020JJ7023, 2018JJ5010), 湖南省教育厅科学研究项目(20C0425, 22B0955, 19C04-20), 湖南电气职院科研基金项目(2020RC001)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61703153), the National Natural Science Foundation of Hunan Province (2020JJ7023, 2018JJ5010), the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (20C0425, 22B0955, 19C0420) and the Scientific Research Fund of Hunan Electrical College of Technology (2020RC001).

路时,由于网络传输过程中存在时延、数据丢包/错序、网络阻塞/攻击等问题以及信号采样测量和执行环节均存在时滞<sup>[3-5]</sup>,使得LFC控制器不能实时获取反馈信号,且其更新的控制指令也无法实时到达各发电单元,也就是说,这些网络和时滞带来的问题可能使LFC控制器不仅无法实现预期的控制目标,而且可能会导致电力系统的动态性能恶化甚至不稳定<sup>[6-7]</sup>.因此,在网络电力系统的负荷频率稳定分析和控制设计中,考虑时滞和反馈信号采样周期(或控制信号更新周期)的影响,这对提升电力系统的安全稳定运行和改善通信网络的传输效率具有重要作用.

为了提高电力系统LFC的时滞鲁棒性,学者们对电力系统LFC的时滞相关稳定分析与控制设计进行了大量研究,采用的主要研究方法有频域直接法和时域间接法<sup>[8-11]</sup>.频域直接法主要是基于系统特征根来进行评估和分析,由于超越特征方程难以计算所有的特征根,因此该方法具有一定局限性.时域间接法主要使用Lyapunov泛函和线性矩阵不等式(linear matrix inequalities, LMI)技术来进行分析,该方法只能得到系统稳定或控制器存在的充分条件,不可避免引入保守性<sup>[12]</sup>,但该方法适用于处理含不确定参数以及不同类型时滞(如定常、时变和随机时滞)的LFC系统,被广泛使用.文献[13]使用时域分析的Lyapunov泛函方法,研究了考虑定常/时变时滞的电力系统LFC的时滞相关稳定性和PID型鲁棒控制器设计.使用类似的方法,文献[14-15]进一步研究了电力市场环境下的多区域LFC系统的时滞相关稳定问题,并讨论了控制器参数与时滞稳定裕度之间的关系,为控制器设计及参数选择提供了指导.文献[16-17]在Lyapunov泛函的二次型函数中增广一些系统状态变量,并采用估计值与实际值差距较小的估计方法(如Wirtinger和Bessel-Legendre不等式等),获得了较低保守性的电力系统LFC稳定与控制器设计的条件,这些条件能使系统容忍较大的时滞稳定裕度,有较强的时滞鲁棒性.

上述研究都是基于连续时间LFC模型进行分析与讨论的.而实际电力系统LFC一般工作在离散模式下,是一个典型的包含离散时间信号和连续时间信号的采样控制系统<sup>[18]</sup>,即被控对象为连续时间,控制器为离散时间,并且反馈/控制信号按一定的时间间隔(即采样周期或更新周期)进行更新<sup>[1,19]</sup>.对于采样系统而言,采样周期是衡量系统性能的一个重要指标,因为在维持系统稳定的前提下,一个大的采样周期能减少信息的传输量和计算量,进而可提高系统控制效率和网络传输效率<sup>[20-21]</sup>.在互联电力系统LFC中,信息的传输量和计算量很大,由于微处理器的计算能力有限以及通信网络带宽的限制,往往需要系统能在一个较大的采样周期下保持稳定<sup>[22]</sup>,也就是说,不合适的信号采样可能会导致电力系统故障甚至不稳定,因此,

有必要考虑采样对系统控制的影响.然而,现有大部分电力系统LFC的研究并没有考虑采样周期对系统的影响,只有少量文献进行了初步研究,文献[23]利用时域仿真简单分析了采样周期对电力系统LFC控制性能的影响.文献[24]针对电力系统LFC的稳定和控制问题,使用闭环Lyapunov泛函,给出了采样相关的负荷频率稳定准则和反馈控制器设计方法,但该方法的保守性较大,并且在LFC设计中认为反馈测量信号的采样时刻与零阶保持器(zero-order hold, ZOH)端控制信号的更新时刻是同步的,忽视了网络通信时滞和数据丢包/错序等问题.因此,综合考虑采样和网络传输问题,开展电力系统LFC的稳定分析和控制设计有待进一步研究.

本文提出一种时滞/采样相关的离散LFC方案,来进一步研究电力系统负荷频率稳定控制问题.其主要贡献总结如下:1)综合系统的采样周期和通信时滞,建立了安装离散状态反馈控制器的电力系统LFC模型;2)充分利用系统的时滞和采样信息,构造了一个双边闭环Lyapunov泛函,进而导出了低保守性的电力系统LFC的时滞/采样相关稳定准则.该准则用于分析控制器的性能,计算给定控制器下保持系统稳定的更新周期和时滞稳定裕度,确定系统的安全运行区域;3)基于所提稳定准则,并将更新周期、通信时滞以及指数衰减率 $\lambda$ 作为设计条件,提出了离散状态反馈LFC控制器的设计方法及控制器参数求解算法.最后,仿真结果表明,与已有文献方法相比,所提方法在保持系统稳定条件下能容忍更大的通信时滞和更新周期,控制器的效果更佳,鲁棒性更强.另外,通过仿真发现一定大小的通信时滞可加速系统的频率稳定和提升系统对更新周期以及负荷扰动的鲁棒性.

全文采用如下记号:0和 $I$ 代表适当维数的零矩阵和单位矩阵;上标“-1”和“ $T$ ”代表矩阵的逆和转置; $R > 0$ 代表 $R$ 是正定矩阵; $\text{sym}\{N\} = N + N^T$ 代表矩阵 $N$ 与矩阵 $N$ 转置之和; $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角阵;“\*”代表对称矩阵中的对称项.

## 2 系统模型描述

这部分将建立传统环境下和市场环境下考虑通信时滞和采样周期的互联电力系统LFC模型.互联电力系统包含 $N$ 个LFC控制区域,各控制区域通过联络线连接,且具有相似的结构,如图1所示,包括调速器、汽轮机、旋转惯量和负荷、控制器、通信网络等.在电力系统LFC建模中,将各控制区域的联络线交换功率以及与其他区域的耦合项视为负荷扰动,那么每个区域的LFC设计问题就只涉及到局部系统的信息,从而可以对每个控制区域进行单独的分散控制器设计<sup>[12]</sup>,即多区域互联电力系统LFC设计可以看作是多个独立的单区域电力系统LFC设计.

图1中, 指数块 $e^{-s \cdot \tau^{sc}}$ 和 $e^{-s \cdot \tau^{ca}}$ 表示网络传输时滞;  $\Delta f_i, \Delta P_{tie-i}, \Delta P_{mni}, \Delta P_{vni}, \Delta P_{ci}, \Delta P_{di}$ 分别表示系统第*i*个控制区域的频率偏差、联络线交换功率偏差、机械输出功率偏差、调节阀位置偏差、系统控制输入偏差和负荷扰动偏差;  $M_i, D_i$ 分别表示发电机的旋转惯量和阻尼系数;  $T_{gni}, T_{chni}, R_{ni}, \alpha_{ni}, \beta_i$ 分别为调速器时间常数、汽轮机时间常数、跌落系数、发

电机组的参与因子和频率偏差因子;  $T_{ij}$ 表示联络线同步系数;  $w_{ki}, k = 1, 2, 3, 4$ 为外部扰动,  $ACE_i$ 为区域控制偏差即 $ACE_i = \beta_i \Delta f_i + \Delta P_{tie-i}$ , 它是频率和联络线功率的线性组合. 文献[1]指出, 为了使LFC控制器实现对频率和联络线功率的无差调节, 需要在系统模型中引入 $ACE_i$ 信号的积分环节. 在下面的模型描述中, 为表达简洁, 一些变量的“(t)”被省略.

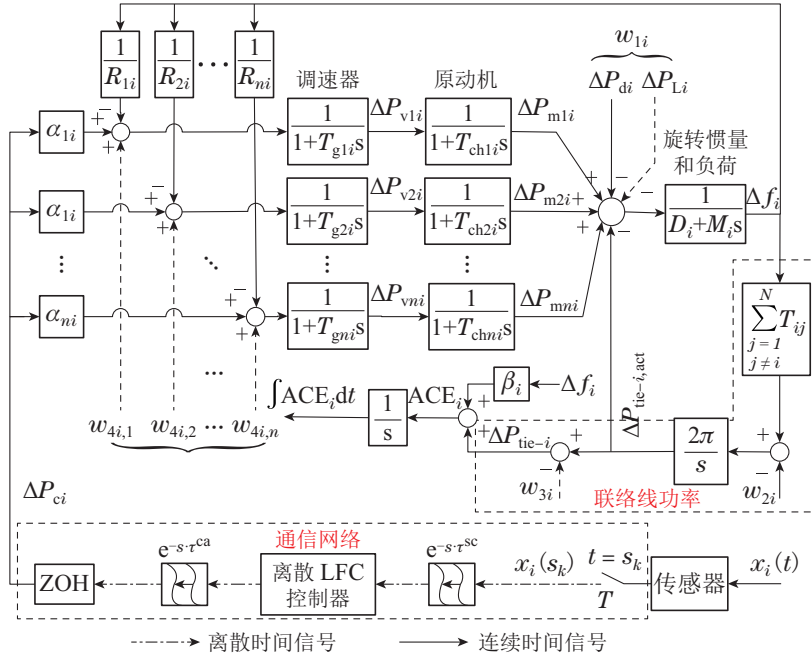


图 1 电力系统区域*i*的LFC控制结构

Fig. 1 LFC control structure of area *i* of power system

### 2.1 传统环境下电力系统LFC模型

图1中去除点虚线部分为传统环境下互联电力系统LFC的动态模型, 每个控制区域包含*n*台发电机组, 系统的原动机为非再热式汽轮机, 根据图1中的传递函数和信号流, 使用Laplace逆变换并选择合适的状态变量, 则区域*i*的LFC状态空间模型可描述为<sup>[24]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \hat{F}_i \hat{w}_i(t), \\ y_i(t) = C_i x_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} x_i^T &= [\Delta f_i \quad \Delta P_{tie-i} \quad \Delta P_{m1i} \quad \cdots \quad \Delta P_{mni} \\ &\quad \Delta P_{v1i} \quad \cdots \quad \Delta P_{vni} \quad \int ACE_i dt], \\ u_i &= \Delta P_{ci}, \quad y_i^T = [ACE_i \quad \int ACE_i dt], \\ \hat{w}_i &= [w_{1i} \quad w_{2i}] = [\Delta P_{di} \quad \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} \Delta f_j], \end{aligned}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22i} & A_{23i} & 0 \\ A_{31i} & 0 & A_{33i} & 0 \\ A_{41i} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{3i} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} C_i &= \begin{bmatrix} A_{41i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_i = \begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_{11i} &= \begin{bmatrix} -\frac{D_i}{M_i} & -\frac{1}{M_i} \\ 2\pi \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{M_i} & 0 \\ 0 & -2\pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{12i} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{M_i} & \cdots & \frac{1}{M_i} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{3i} = [\frac{\alpha_{1i}}{T_{g1i}} \quad \cdots \quad \frac{\alpha_{ni}}{T_{gni}}]^T, \\ A_{22i} &= -A_{23i} = -\text{diag}\{\frac{1}{T_{ch1i}}, \cdots, \frac{1}{T_{chni}}\}, \\ A_{31i} &= \begin{bmatrix} -1 & \cdots & -1 \\ R_{1i} T_{g1i} & \cdots & R_{ni} T_{gni} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad A_{41i} = [\beta_i \quad 1], \\ A_{33i} &= \text{diag}\{\frac{-1}{T_{g1i}}, \frac{-1}{T_{g2i}}, \cdots, \frac{-1}{T_{gni}}\}. \end{aligned}$$

### 2.2 市场环境下电力系统LFC模型

随着电力工业的发展, 现代电力系统处于解除管制的状态, 电力系统LFC在市场环境下与传统垂直管制环境下的不同在于: 每个控制区域的发电(或配电)公司可以通过市场竞价方式, 与其他各控制区域的

配电(或发电)公司签订双边合同, 这些合同可以通过广义发电参与矩阵 (augmented generation participation matrix, AGPM) 描述<sup>[1]</sup>. 对于含 $N$ 个控制区域的LFC方案, 每个区域有 $n$ 个发电公司和 $m$ 个配电公司, 它的AGPM可描述为

$$\text{AGPM} = \begin{bmatrix} \text{AGPM}_{11} & \cdots & \text{AGPM}_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{AGPM}_{N1} & \cdots & \text{AGPM}_{NN} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中

$$\text{AGPM}_{ij} = \begin{bmatrix} gf_{p_i+1, q_j+1} & \cdots & gf_{p_i+1, q_j+m} \\ \vdots & & \vdots \\ gf_{p_i+n, q_j+1} & \cdots & gf_{p_i+n, q_j+m} \end{bmatrix},$$

$p_i = n(i-1)$  和  $q_j = m(j-1)$ ;  $gf_{r,v}$  表示双边合同中第 $v$ 个发电公司在第 $r$ 个配电公司总体负荷需求的参与因子. 市场环境下电力系统LFC方案是在传统LFC结构中引入了一些新信号, 用来确定双边合同中相应的负荷需求, 如图1中的点虚线所示. 正如文献[25-27]所述, 这些引入信号可处理为传统环境下电力系统LFC方案的外部扰动, 可表示如下:

$$\begin{aligned} w_{1i} &= \Delta P_{Li} + \Delta P_{di} = \\ & \sum_{j=1}^m \Delta P_{Lj-i} + \sum_{j=1}^m \Delta P_{ULj-i}, \\ w_{3i} &= \sum_{k=1, k \neq i}^N \Delta P_{\text{tie, sch, ik}}, \\ \Delta P_{\text{tie, sch, ik}} &= \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^m gf_{p_i+j, q_k+t} \Delta P_{Lt-k} - \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^m gf_{q_k+j, p_i+t} \Delta P_{Lt-i}, \\ \Delta P_{\text{tie}-i} &= \Delta P_{\text{tie}-i, \text{act}} - \tilde{w}_{3i}, \\ w_{4i}^T &= [\tilde{w}_{4i,1} \quad \cdots \quad \tilde{w}_{4i,k} \quad \cdots \quad \tilde{w}_{4i,n}], \\ \tilde{w}_{4i,k} &= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^m gf_{p_i+k, q_k+t} \Delta P_{Lt-j}. \end{aligned}$$

式中:  $\Delta P_{Li}$  和  $\Delta P_{di}$  分别表示区域 $i$ 的合同总负荷需求和非合同负荷需求;  $\Delta P_{Lj-i}$  和  $\Delta P_{ULj-i}$  分别表示区域 $i$ 中的第 $j$ 配电公司的合同和非合同负荷需求;  $\Delta P_{\text{tie, sch, ik}}$  表示由合同计算所得的区域 $i$ 与 $k$ 之间联络线交换功率的设定值. 因此, 市场环境下电力系统区域 $i$ 的LFC状态空间模型可描述为<sup>[12]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \tilde{F}_i \tilde{w}_i(t), \\ y_i(t) = C_i x_i(t). \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $x_i, y_i, u_i, A_i, B_i$  和  $C_i$  的定义见式(1), 且

$$\tilde{F}_i = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_{1i} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -A_{33i} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}_{11i} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{M_i} & 0 & 0 & \\ & 0 & -2\pi & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{w}_i^T = [w_{1i}^T \quad w_{2i}^T \quad w_{3i}^T \quad w_{4i}^T].$$

**注1** 由系统模型(1)(3)可知, 解除管制市场环境下和传统垂直管制环境下的电力系统LFC方案区别在于系统的扰动项 $\tilde{F}_i \tilde{w}_i(t)$ 不同. 传统LFC方案不包含图1中点虚线所表示的扰动项 $w_{1i}, w_{3i}$ 和 $w_{4i}$ 的部分. 另外, 如文献[14]所述, 系统(1)(3)在平衡点的内部稳定性等价于系统在原点的稳定性 $\dot{w}_i(t) = 0/\tilde{w}_i(t) = 0$ , 也就是说, 系统(1)(3)内部稳定性分析是相同的.

### 2.3 传统/市场环境下闭环电力系统LFC模型

传统环境下(设 $F_i w_i(t) = \hat{F}_i \hat{w}_i(t)$ )和市场环境下(设 $F_i w_i(t) = \tilde{F}_i \tilde{w}_i(t)$ )电力系统LFC模型可统一描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + F_i w_i(t), \\ y_i(t) = C_i x_i(t). \end{cases} \quad (4)$$

电力系统工作在连续模式下, 状态变量 $x_i(t)$ 是直接用于产生控制信号( $u_i(t) = K_i x_i(t)$ ),  $K_i$ 为控制器增益. 然而, 在离散模式下, 只有采样时刻 $s_k$ 的测量信号 $x_i(s_k)$ 被用于产生控制信号( $u_i(t) = K_i x_i(s_k)$ ). 因此, 离散控制相对于连续控制而言, 可极大减小信息传输量, 节省网络带宽和提高控制效率. 如图1所示, 反馈信号 $x_i(t)$ 经过传感器和采集器进行量化和采样测量得到测量信号 $x_i(s_k)$ , 并利用通信网络传输到达控制器; 然后, 经过离散控制器处理生成控制信, 再通过网络传输到达零阶保持器ZOH, 并作用于电力系统.

反馈信号的处理和传输过程如图2所示.  $s_k$ 表示信号采样测量时刻序列, 其采样周期可定义为 $T = s_{k+1} - s_k$ ,  $d(t) = t - s_k$ 表示采样诱导输入时延. ZOH端控制信号的更新时刻序列 $t_k$ 满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < +\infty$ , 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} [t_k, t_{k+1}] = \bigcup_{k=1}^{\infty} [s_k + \tau_k, s_{k+1} + \tau_{k+1}]$ ,  $\tau = \tau_1 = \cdots = \tau_k = \cdots = \tau^{\text{sc}} + \tau^{\text{ca}}$ 为网络通信时滞. ZOH端控制信号的更新周期 $h_k$ 为两个相邻更新时刻 $t_k$ 与 $t_{k+1}$ 之间的间隔.

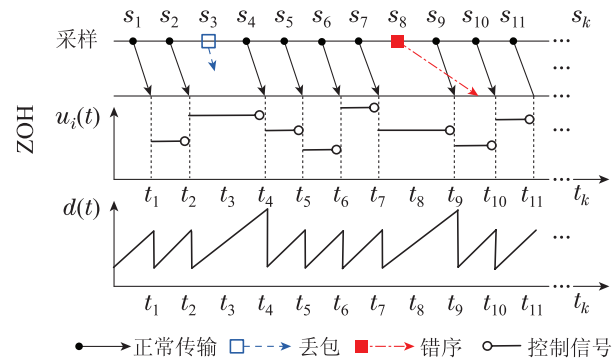


图2 反馈信号的传输过程

Fig. 2 The transmission process of feedback signal

由图2可知, 更新周期与采样测量电路的采样周

期, 网络通信时滞以及丢包/错序个数等因素相关, 这些因素往往也会导致更新周期 $h_k$ 存在不确定性. 即

$$h_k = t_{k+1} - t_k = s_{k+1+\gamma} + \tau_{k+1+\gamma} - (s_k + \tau_k),$$

$$h_k \in [h_1, h_2], k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

式中 $\gamma$ 为数据在网络传输过程中导致数据连续丢包/错序的个数. 不同的 $k$ 其 $h_k$ 大小可能不同, 体现了更新周期 $h_k$ 的不确定性,  $h_1$ 和 $h_2$ 为更新周期的最小值和最大值. 另外, 如果设 $h_1 = h_2$ 时,  $h_k$ 是一个常数即更新周期是固定, 即网络传输中不存在丢包/错序的情况<sup>[24-26]</sup>. 选择一个采样状态反馈控制器作为电力系统的离散LFC控制器, 如下:

$$u_i(t) = u_i(t_k) = K_i x_i(t_k - \tau), t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (6)$$

式中 $K_i$ 为区域 $i$ 的离散LFC控制器增益. 将式(6)代入式(4), 可得传统/市场环境闭环电力系统LFC模型

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i K_i x_i(t_k - \tau) + F_i w_i(t), \quad (7)$$

其中 $t \in [t_k, t_{k+1})$ . 系统(7)在平衡点的内部稳定, 可转化为如下系统设计镇定控制器使其在原点稳定:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i K_i x_i(t_k - \tau), t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (8)$$

**注 2** 若设 $u_i(t) = \hat{K}_i y_i(t_k - \tau) = -\hat{K}_i C_i x_i(t_k - \tau)$ ,  $\hat{K}_i = [K_{P_i} \ K_{I_i}]$ , 并代入系统(4), 可得安装PI型离散控制器的闭环电力系统LFC模型, 即用 $\hat{K}_i C_i$ 替换模型(8)中的 $K_i$ 可得. 文献[12-15, 28]在构建闭环系统时, 将ZOH端控制信号的更新周期视为输入时滞 $d(t) = t - s_k$ , 然后利用时滞系统理论进行分析, 没有充分考虑系统的采样特性. 文献[24-25]虽然考虑了系统采样特性, 但忽视了数据丢包、错序等网络传输特性, 认为信号测量周期和ZOH端数据更新周期是一致的. 而本文构建的闭环电力系统(8)综合考虑了系统的采样特性和网络传输特性.

另外, 在电力系统中, 通常希望系统频率偏差能快速回归至零, 使其具有较快的频率响应, 以确保供电质量. 针对这个问题, 可以通过分析系统的指数稳定来解决, 使用指数衰减率 $\lambda$ 来衡量电力系统频率的收敛速度. 借鉴文献[29]的方法, 设 $x(t) = e^{\lambda t} x_i(t)$ , 代入系统(8)可得

$$\dot{x}(t) = (A_i + \lambda I)x(t) + e^{\lambda(t-t_k+\tau)} B_i K_i x(t_k - \tau),$$

式中:  $e^{\lambda(t-t_k+\tau)} \in [\rho_1, \rho_2]$ ,  $\rho_1 = e^{\lambda\tau}$ ,  $\rho_2 = e^{\lambda(h_2+\tau)}$ . 此时, 上述系统可描述为如下多项式不确定系统<sup>[29]</sup>:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^2 \mu_j(t) [(A_i + \lambda I)x(t) + \rho_j B_i K_i x(t_k - \tau)], \quad (9)$$

其中:  $\mu_1(t) = \frac{\rho_2 - e^{\lambda(t-t_k+\tau)}}{\rho_2 - \rho_1}$ ,  $\mu_2(t) = \frac{e^{\lambda(t-t_k+\tau)} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$ ,  $\sum_{j=1}^2 \mu_j(t) = 1$ . 此时, 系统(8)指数稳定性问题等价于

系统(9)的渐进稳定性问题, 且指数衰减率为 $\lambda$ .

### 3 电力系统LFC的稳定分析与控制

综合考虑系统反馈和控制信号的更新周期以及通信时滞, 使用双边闭环Lyapunov泛函和LMI, 给出电力系统的采样/时滞相关稳定准则和控制器设计准则.

#### 3.1 时滞/采样相关稳定准则

针对 $K_i$ 已知的情形, 给出下面的稳定准则.

**定理 1** 对给定标量 $\lambda, \tau, h_2, h_1$ 和控制器增益 $K_i$ , 若存在合适维度对称矩阵 $P > 0, S > 0, Z > 0, R_j > 0, j = 1, 2, 3, 4, H$ 和任意合适维度矩阵 $X_1, X_2, M, G_j, j = 1, 2, 3, 4$ , 使得对 $h_k \in [h_1, h_2]$ , 满足下面的LMI, 则系统(8)是指渐近稳定的, 即

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1j} + h_k \Phi_2 & \sqrt{h_k} \mathcal{G}_{3.4} \\ * & -\mathcal{R}_{3.4} \end{bmatrix} < 0, j = 1, 2, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1j} + h_k \Phi_3 & \sqrt{h_k} \mathcal{G}_{1.2} \\ * & -\mathcal{R}_{1.2} \end{bmatrix} < 0, j = 1, 2, \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Phi_{1j} &= \Phi_{11} + \Phi_{12} - \Xi_5^T \mathcal{Z}_a \Xi_5 + \text{sym}\{\Xi_{14}^T M \Gamma_j\}, \\ \Phi_2 &= \text{sym}\{\Xi_7^T (X_1 \Xi_9 + X_2 \Xi_{10}) + \Xi_{11}^T X_1 \Xi_{13}\} + \\ &\quad \Xi_{10}^T H \Xi_{10} + e_3^T R_1 e_3 + e_4^T R_2 e_4, \\ \Phi_3 &= \text{sym}\{\Xi_8^T (X_1 \Xi_9 + X_2 \Xi_{10}) + \Xi_{12}^T X_1 \Xi_{13}\} - \\ &\quad \Xi_{10}^T H \Xi_{10} + e_3^T R_3 e_3 + e_4^T R_4 e_4, \\ \Phi_{11} &= \text{sym}\{\Xi_1^T P \Xi_2 + \Xi_6^T (X_1 \Xi_9 + X_2 \Xi_{10})\} + \\ &\quad \Xi_3^T S \Xi_3 - \Xi_4^T S \Xi_4 + \tau^2 e_3^T Z e_3, \\ \Phi_{12} &= \text{sym}\left\{\sum_{i=1}^4 G_i^T \Delta_i\right\}, \\ \mathcal{Z}_a &= \text{diag}\{Z, 3Z\}, \mathcal{R}_{1.2} = \text{diag}\{R_1, R_2\}, \\ \mathcal{R}_{3.4} &= \text{diag}\{R_3, R_4\}, \mathcal{G}_{1.2} = [G_1^T, G_2^T], \\ \mathcal{G}_{3.4} &= [G_3^T, G_4^T], \Xi_1 = [e_1^T, e_2^T, \tau e_9^T]^T, \\ \Xi_2 &= [e_3^T, e_4^T, e_1^T - e_2^T]^T, \Xi_3 = [e_1^T, e_3^T]^T, \\ \Xi_4 &= [e_2^T, e_4^T]^T, \Xi_5 = [e_1^T - e_2^T, e_1^T + e_2^T - 2e_9^T]^T, \\ \Xi_6 &= [-\Delta_1^T, -\Delta_2^T, \Delta_3^T, \Delta_4^T]^T, \\ \Xi_7 &= [e_3^T, e_4^T, 0, 0]^T, \Xi_8 = [0, 0, -e_3^T, -e_4^T]^T, \\ \Xi_9 &= [\Delta_1^T, \Delta_2^T, \Delta_3^T, \Delta_4^T]^T, \Xi_{11} = [\Delta_1^T, \Delta_2^T, 0, 0]^T, \\ \Xi_{10} &= [e_5^T, e_6^T, e_7^T, e_8^T]^T, \Xi_{12} = [0, 0, \Delta_3^T, \Delta_4^T]^T, \\ \Xi_{13} &= [e_3^T, e_4^T, -e_3^T, -e_4^T]^T, \Delta_1 = e_1 - e_5, \\ \Xi_{14} &= [e_1^T, e_3^T, e_5^T, e_6^T]^T, \Delta_2 = e_2 - e_6, \rho_1 = e^{\lambda\tau}, \\ \Delta_3 &= e_7 - e_1, \Delta_4 = e_8 - e_2, \rho_2 = e^{\lambda(h_2+\tau)}, \\ \Gamma_j &= (A_i + \lambda I)e_1 + \rho_j B_i K_i e_6 - e_3, j = 1, 2, \\ e_i &= [0_{n \times (i-1)n} \ I \ 0_{n \times (6-i)n}], i = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned}$$

定理1的证明过程详见附录A.

**注3** 文献[13–14, 28]把信号更新周期视为一个时滞, 然后基于时滞系统理论, 得到相应的电力系统时滞相关稳定准则, 这并不能充分反映系统采样特性. 文献[24, 26]得到的采样相关稳定准则, 只考虑了采样区间 $[t_k, t)$ 的信息, 并且认为控制信号更新周期是固定的, 即 $(h_1 = h_2 = h_k)$ , 没有考虑到数据丢包、错序等网络传输特性. 与上述文献相比, 本文提出的时滞/采样相关稳定准则, 同时考虑了系统的网络传输特性和采样特性, 并且所得稳定准则充分利用了区间 $[t_k, t)$ 和区间 $[t, t_{k+1})$ 的采样信息和时滞信息, 因此, 具有更低保守性. 另外, 若在定理1中设 $\lambda = 0$ , 可得系统(8)的渐进稳定性准则.

对于控制器 $K_i$ 已知的情形, 定理1提供了一个评估控制器性能的方法, 即评估控制器能在多大的通信时滞或更新周期范围内保持电力系统稳定. 接下来, 以求解最大通信时滞上界为例, 提出如下求解算法.

**算法1** 给定更新周期下界 $h_1$ 和上界 $h_2$ , 指数衰减率 $\lambda$ 以及控制器参数 $K_i$ , 搜索电力系统(8)所允许的最大通信时滞上界 $\tau_M$ 的算法步骤如下:

**步骤1** 初始化系统参数, 给定 $h_1, h_2$ 和 $\lambda$ , 设置合适大小的搜索区间 $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ 以及精度 $\tau_{ac}$ ;

**步骤2** 根据折半搜索方法设 $\tau_{\text{test}} = \frac{\tau_{\min} + \tau_{\max}}{2}$ , 然后将 $\tau_{\text{test}}$ 代入定理1中的LMI(10)–(11)进行求解;

**步骤3** 若定理1中的LMI(10)–(11)具有可行的解, 则 $\tau_{\min} = \tau_{\text{test}}$ ; 否则, 设 $\tau_{\max} = \tau_{\text{test}}$ ;

**步骤4** 若 $|\tau_{\max} - \tau_{\min}| \leq \tau_{ac}$ , 输出最大时滞上界 $\tau_M = \tau_{\min}$ , 搜索结束. 否则, 跳转至步骤2.

另外, 使用类似于上述算法的求解步骤, 若给定 $\tau$ 和 $\lambda$ (或固定 $\tau$ 和 $h_k$ ), 可以搜索到系统所允许的最大更新周期上界 $h_M$ (或最大指数衰减率的上界 $\lambda_M$ ). 相应的固定值和得到的最大值可设为保持系统稳定所允许的最大通信时滞、更新周期和指数衰减率.

### 3.2 时滞/采样相关控制器设计准则

针对 $K_i$ 未知的情形, 在定理1中存在耦合非线性项 $MB_iK_i$ , 不能直接使用LMI工具箱求解. 为此, 基于定理1, 提出下面的控制器设计准则及求解算法.

**定理2** 对给定标量 $\lambda, \tau, h_2$ 和 $h_1$ 以及调整参数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , 若存在对称矩阵 $\tilde{P} > 0, \tilde{S} > 0, \tilde{Z} > 0, \tilde{R}_j > 0, j = 1, 2, 3, 4, \tilde{H}$ 和任意合适维度矩阵 $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{M}, \tilde{G}_i, i = 1, 2, 3, 4, Y$ , 使得对 $h_k \in [h_1, h_2]$ , 满足下面的LMI:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{1j} + h_k \tilde{\Phi}_2 & \sqrt{h_k} \tilde{G}_{3,4} \\ * & -\tilde{R}_{3,4} \end{bmatrix} < 0, j = 1, 2, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{1j} + h_k \tilde{\Phi}_3 & \sqrt{h_k} \tilde{G}_{1,2} \\ * & -\tilde{R}_{1,2} \end{bmatrix} < 0, j = 1, 2, \quad (13)$$

其中:

$$\tilde{\Phi}_{1j} = \tilde{\Phi}_{11} + \tilde{\Phi}_{12} - \Xi_5^T \tilde{Z}_a \Xi_5 + \text{sym}\{\Xi_{14}^T \tilde{M} \tilde{I}_j\},$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \text{sym}\{\Xi_7^T (\tilde{X}_1 \Xi_9 + \tilde{X}_2 \Xi_{10}) + \Xi_{11}^T \tilde{X}_1 \Xi_{13}\} + \Xi_{10}^T \tilde{H} \Xi_{10} + e_3^T \tilde{R}_1 e_3 + e_4^T \tilde{R}_2 e_4,$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \text{sym}\{\Xi_8^T (\tilde{X}_1 \Xi_9 + \tilde{X}_2 \Xi_{10}) + \Xi_{12}^T \tilde{X}_1 \Xi_{13}\} - \Xi_{10}^T \tilde{H} \Xi_{10} + e_3^T \tilde{R}_3 e_3 + e_4^T \tilde{R}_4 e_4,$$

$$\tilde{\Phi}_{11} = \text{sym}\{\Xi_1^T \tilde{P} \Xi_2 + \Xi_6^T (\tilde{X}_1 \Xi_9 + \tilde{X}_2 \Xi_{10})\} + \Xi_3^T \tilde{S} \Xi_3 - \Xi_4^T \tilde{S} \Xi_4 + \tau^2 e_3^T \tilde{Z} e_3,$$

$$\tilde{\Phi}_{12} = \text{sym}\left\{\sum_{i=1}^4 \tilde{G}_i^T \Delta_i\right\},$$

$$\tilde{Z}_a = \text{diag}\{\tilde{Z}, 3\tilde{Z}\}, \tilde{R}_{1,2} = \text{diag}\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\},$$

$$\tilde{R}_{3,4} = \text{diag}\{\tilde{R}_3, \tilde{R}_4\}, \tilde{G}_{1,2} = [\tilde{G}_1^T \ \tilde{G}_2^T],$$

$$\tilde{G}_{3,4} = [\tilde{G}_3^T \ \tilde{G}_4^T], \tilde{M} = [I \ \gamma_1 I \ \gamma_2 I \ \gamma_3 I],$$

$$\tilde{I}_j = (A_i + \lambda I) Y^T e_1 + \rho_j B_i L e_6 - Y^T e_3, j = 1, 2.$$

那么电力系统(8)是指数渐近稳定的, 并且离散LFC控制器增益 $K_i$ 可由下式计算:

$$K_i = L(Y^T)^{-1}. \quad (14)$$

定理2的证明过程详见附录B.

在电力系统中, 通常希望设计的LFC控制器能使系统频率偏差 $\Delta f$ 尽可能快的回归到零. 因此, 可最大化系统指数衰减率 $\lambda$ 来求解LFC控制器. 提出如下算法来搜索最优的LFC控制器.

**算法2** 基于定理2, 搜索电力系统最大化指数衰减率 $\lambda_M$ 及相应控制器的算法步骤如下:

**步骤1** 初始化系统参数, 给定 $h_1, h_2$ 和 $\tau$ , 设置调整参数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 和搜索区间 $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ 以及精度 $\lambda_{ac}$ ;

**步骤2** 用折半搜索方法, 设 $\lambda_{\text{test}} = \frac{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}{2}$ , 然后将 $\lambda_{\text{test}}$ 代入定理2中的LMI(12)–(13)进行求解;

**步骤3** 若求解定理2中的LMI(12)–(13)有可行的解, 则 $\lambda_{\min} = \lambda_{\text{test}}$ ; 否则, 设 $\lambda_{\max} = \lambda_{\text{test}}$ ;

**步骤4** 若 $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| \leq \lambda_{ac}$ , 输出 $\lambda_M = \lambda_{\min}$ , 并通过式(14)获得控制器增益 $K_i$ . 此时, 搜索结束. 否则, 跳转至步骤2.

**注4** 若系统需要较快的系统状态收敛速度(即稳定速度), 可以通过最大化系统指数收敛率 $\lambda$ 获得的控制器来解决, 这类控制器可通过算法2搜索获得. 若系统信息的传输量大, 为了提高网络传输效率和控制效率, 可以通过最大化系统更新周期 $h_k$ 获得的控制器来解决. 若系统的网络传输时滞较大, 可以通过最大化系统通信时滞 $\tau$ 获得的控制器来解决. 后面两类控制器也可以通过类似于上述的算法来获得.

### 4 实例分析

通过对单区域系统和三区域系统的理论计算和仿真分析来展示所提LFC设计方法的有效性和优越性.



### 4.1 单区域系统的LFC设计

如表1所示, 提供两种单区域电力系统LFC的参数<sup>[13,24]</sup>, 进行LFC控制器设计以及控制器性能分析与仿真验证.

表 1 单区域电力系统的参数

测试系统	参数					
	$T_{ch}$	$T_g$	$R$	$D$	$M$	$\beta$
系统1 <sup>[24]</sup>	0.3	0.08	2.40	1/120	1/6	1.0
系统2 <sup>[13]</sup>	0.3	0.10	0.05	1.0	10.0	21.0

1) LFC控制器设计: 针对测试系统1<sup>[24]</sup>, 设系统的更新周期和通信时滞分别为 $h = 1$  s和 $\tau = 4$  s, 调整参数 $\gamma_1 = 10, \gamma_2 = \gamma_3 = 0.01$ . 使用算法2, 可得系统所允许的最大指数衰减率 $\lambda_{max} = 0.16$ 以及相应的离散状态反馈LFC控制器增益见表2, 为了比较, 文献[24]和文献[10]设计的控制器也列入表2并命名为 $K_{12}$ 和 $K_{13}$ . 其中 $K_{13}$ 是一个PID型LFC控制器.

表 2 单区域LFC的控制器增益

文献	名称	控制器参数
本文	$K_{11}$	[-0.0151 -0.0272 -0.0073 -0.0386]
文献[24]	$K_{12}$	[-0.0622 -0.1231 -0.0226 -0.1723]
文献[10]	$K_{13}$	[-0.4306 -0.6535 -0.1832]

2) 控制器性能分析与仿真验证: 针对安装表2中3种LFC控制器的单区域电力系统, 设 $\lambda = 0$ , 使用算法1, 对不同的更新周期 $h$ , 得到系统所允许的通信时滞 $\tau$ 上界见表3, 表中的横线“-”表示无可行解. 类似的, 对不同的通信时滞 $\tau$ , 得到系统所允许的更新周期 $h$ 上界见表4. 由表3和表4可知, 与其他文献设计的控制器 $K_{12}$ 和 $K_{13}$ 相比, 在设计LFC控制器 $K_{11}$ 能容忍更大的通信时滞(或更新周期), 说明 $K_{11}$ 具有更强的时滞鲁棒性和更新周期鲁棒性. 另外, 由表4可发现在一定通信时滞条件下( $\tau \in \{0.1, 1.0, 3.0\}$ )计算得到的更新周期比没有通信时滞( $\tau = 0$ )计算得到的更新周期更大, 说明了一定大小的通信时滞能增大系统所容忍的更新周期, 即可改善LFC控制器对更新周期的鲁棒性. 另外, 与 $K_{12}$ 和 $K_{13}$ 相比,  $K_{11}$ 能在一个较大的时滞范围内( $\tau \in (0, 3)$ )提升系统的性能, 体现了设计方法的优越性.

利用Simulink搭建电力系统仿真模型, 测试控制器 $K_{11}, K_{12}, K_{13}$ 在不同 $\tau$ 和 $h$ 条件下对负荷扰动的鲁棒性. 假设 $t \geq 0$ 时刻系统出现0.01 pu幅度的阶跃负荷扰动即 $\Delta P_d = 0.01$  pu, 基于上述3个控制器, 得到不同的 $\tau$ 和 $h$ 条件下的系统频率偏差 $\Delta f$ 响应曲线如图3所示.

表 3 不同 $h$ 条件下的时滞 $\tau$ 上界

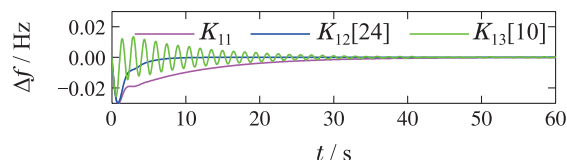
Table 3 Upper bound of  $\tau$  for different  $h$

控制器	更新周期 $h$				
	0.10	1.00	2.00	4.00	6.00
$K_{11}$ (本文)	17.19	16.74	16.21	15.04	13.76
$K_{12}$ (文献[24])	3.77	3.30	2.65	1.38	-
$K_{13}$ (文献[10])	0.33	-	-	-	-

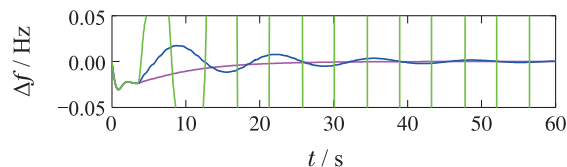
表 4 不同 $\tau$ 条件下的更新周期 $h$ 上界

Table 4 Upper bound of  $h$  for different  $\tau$

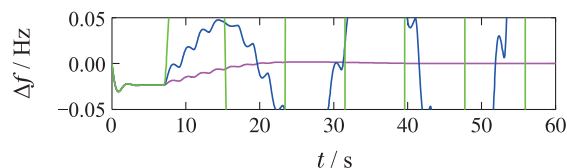
控制器	通信时滞 $\tau$				
	0	0.10	1.00	3.00	3.10
$K_{11}$ (本文)	22.01	22.07	22.63	22.23	20.07
$K_{12}$ (文献[24])	4.98	5.06	5.09	1.49	1.33
$K_{13}$ (文献[10])	0.62	0.64	-	-	-



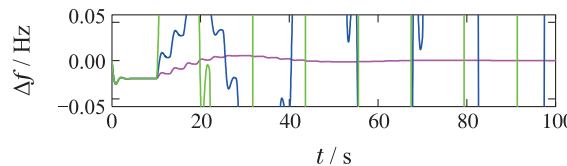
(a)  $h = 0.1$  s,  $\tau = 0.3$  s



(b)  $h = 1$  s,  $\tau = 2.5$  s



(c)  $h = 2$  s,  $\tau = 5$  s



(d)  $h = 3$  s,  $\tau = 7$  s

图 3 不同 $h$ 和 $\tau$ 条件下的 $\Delta f$ 响应曲线

Fig. 3 Response curves of  $\Delta f$  under different  $h$  and  $\tau$

由图3可见, 当出现负荷扰动时,  $K_{12}$ 和 $K_{13}$ 只能在较小的 $h$ 和 $\tau$ 条件下保持系统频率稳定, 当 $h$ 和 $\tau$ 较大时,  $K_{12}$ 和 $K_{13}$ 对系统频率控制失效, 如图3(c)-(d)所

示. 然而, 所设计LFC控制器 $K_{11}$ 仍然能保持系统频率稳定. 同时, 由图3还可见, 随着 $h$ 和 $\tau$ 的增加,  $K_{11}$ 的控制性能基本保持不变, 而 $K_{12}$ 与 $K_{13}$ 控制性能却急剧下降甚至无法保持频率稳定, 这展示了提出LFC控制方案的有效性和优越性.

另外, 由图3不难发现, 当 $\tau = 0.3$ 时,  $K_{11}$ 稳定频率的时间约为35 s, 见图3(a). 然而, 当 $\tau = 2.5$ 时,  $K_{11}$ 稳定频率的时间约为18 s, 见图3(b). 这表明增加一定的时滞可以加速频率的收敛速度, 改善控制器的性能. 为进一步验证这一结论, 对安装 $K_{11}$ 的电力测试系统1, 设 $h = 5$ , 对不同的时滞 $\tau$ , 使用定理1得到系统所允许的最大指数衰减率 $\lambda_{\max}$ 见表5. 由表5可知,  $\tau \in (0.3, 2.5]$ 比 $\tau = 0$ 的指数衰减率更大, 进一步说明了一定大小范围的时滞可加快系统状态的收敛速度, 提升系统的性能. 但时滞大小超出一定范围时, 系统性能会下降.

表5  $K_{11}$ 对不同 $\tau$ 的最大 $\lambda_{\max}$

Table 5 Maximum  $\lambda_{\max}$  for different  $\tau$  under  $K_{11}$

控制器	通信时滞 $\tau$					
	0	0.3	1.0	1.5	2.5	3.5
$K_{11}$	0.089	0.092	0.099	0.104	0.096	0.077

对安装 $K_{11}$ 的电力测试系统1, 设 $h = 20$ ,  $\Delta P_d = 0.1$  pu, 利用Simulink仿真得到系统有/无时滞条件下的频率偏差 $\Delta f$ 响应曲线见图4. 由图4可见,  $\tau \in \{1, 1.5, 2.5\}$ 时, 电力系统频率恢复时间在150 s以内,  $\tau = 0$ 时, 系统频率恢复时间约为400 s. 显然, 这验证了上述的结论, 即一定大小的时滞可以改善系统的性能.

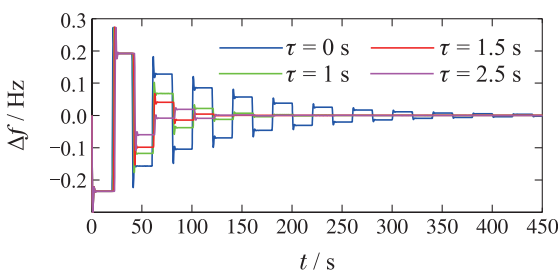


图4 时滞 $\tau = 0$ 和 $\tau = 1.5$ 时的 $\Delta f$ 响应曲线

Fig. 4 Response curves of  $\Delta f$  under  $\tau = 0$  and  $\tau = 1.5$

为了比较不同稳定准则的保守性并进一步验证时滞对系统性能的促进作用, 对安装PI型LFC控制器的单区域电力系统即测试系统2<sup>[13]</sup>开展进一步分析. 给定 $\lambda = 0$ ,  $h = 2$ 以及不同的PI型LFC控制器参数, 使用所提方法(定理1和注3)及文献[13, 26, 28]中的方法计算得到系统所允许的最大通信时滞 $\tau$ 上界见表6. 同时, 基于时域仿真方法得到系统所允许的最大时滞上界的实际值也列入表6. 这里定义: 若给定更新周期 $\bar{h}$ ,

计算得到最大时滞上界记为 $\bar{\tau}_{\max}$ , 那么,  $[0, \bar{h}]$ 称为更新周期稳定域,  $[0, \bar{\tau}_{\max}]$ 称为时滞稳定域,  $h \in [0, \bar{h}]$ ,  $\tau \in [0, \bar{\tau}_{\max}]$ 为系统的安全稳定运行区域. 由表6可见, 与文献[13, 26, 28]的方法相比, 在相同的PI型控制器和更新周期稳定域条件下, 定理1获得的时滞稳定域更大, 且计算结果的准确度更高, 因为所得结果更接近系统的实际时滞稳定域, 说明了所提稳定准则具有更低保守性, 可更好指导LFC控制的设计.

表6 不同PI控制器条件下的时滞 $\tau$ 上界

Table 6 Upper bound of  $\tau$  for different PI controller

方法	$[K_P, K_I]$			
	[0.1, 0.15]	[0.1, 0.2]	[0.2, 0.4]	[0.4, 0.6]
文献[13]	1.28	0.90	-	-
文献[28]	4.07	3.23	0.36	-
文献[26]	7.88	5.49	1.81	0.43
定理1	9.46	6.68	2.58	1.03
实际值	9.51	6.88	2.96	1.36

将测试系统2安装PI型LFC控制器 $K = [K_P, K_I] = [0.2, 0.4]$ , 对不同的 $\tau$ , 使用定理1( $\lambda = 0$ )得到系统所允许的更新周期上界见表7. 同时, 对不同的 $\tau$ , 使用定理1( $h = 4$ )得到系统所允许的最大指数衰减率见表8. 从表7和表8中的数据来看, 得到的结论与测试系统1的是一致的, 即时滞对系统的性能具有促进作用.

表7 不同 $\tau$ 条件下的更新周期 $h$ 上界

Table 7 Upper bound  $h$  for different  $\tau$

方法	通信时滞 $\tau$					
	0.0	0.3	0.7	1.0	1.5	2.0
文献[26]	4.20	3.72	3.24	2.93	2.38	1.76
定理1	4.59	5.09	5.48	5.10	3.34	2.67

表8 不同 $\tau$ 条件下的最大 $\lambda_{\max}$

Table 8 Maximum  $\lambda_{\max}$  for different  $\tau$

方法	通信时滞 $\tau$				
	0.0	0.3	0.5	0.7	1.0
定理1	0.030	0.054	0.055	0.043	0.020

注意到现有研究中基本认为通信时滞是损害电力系统性能的(如文献[26]所得结果见表7, 随着时滞的增加, 系统的更新周期稳定域是减小的). 事实上, 最近的文献[32]在采样控制系统中指出通信时滞可以改善系统性能. 就作者所知, 目前还没相关文献研究通过时滞来改善电力系统性能的. 然而, 基于所提方法对两个测试电力系统的理论计算以及仿真表明一定大小的时滞也可以改善电力系统的性能, 只有时滞超出一定范围时才会损害系统性能(见表7).



为验证提出方法的有效性, 根据表7, 设 $(\tau, h) \in \{(0, 4.59), (0.3, 5.09), (0.7, 5.48), (1, 5.10)\}$ 和 $\Delta P_d = 0.01$  pu, 以及PI控制器 $[0.2, 0.4]$ . 通过Simulink仿真得到4种情况下的频率偏差 $\Delta f$ 响应曲线如图5所示. 从图5可知, 由所提方法计算得到结果均能保持系统频率稳定, 特别地, 虽然 $\tau = 0.3/0.7/1.0$ 的采样周期 $(5.09/5.48/5.10)$ 比 $\tau = 0.0$ 的采样周期 $(4.59)$ 更大, 但仍然保持系统频率稳定, 并且频率稳定的速度相对更快, 这验证了提出方法的有效性.

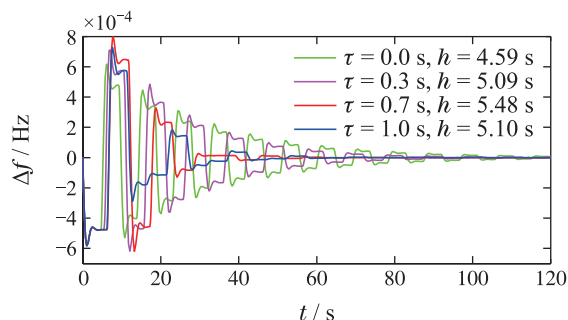


图 5 不同 $\tau$ 和 $h$ 条件下 $\Delta f$ 的响应曲线

Fig. 5 Response curves of  $\Delta f$  under different  $\tau$  and  $h$

类似的, 选择采样周期 $h = 5.0$ , 对不同的通信时滞 $\tau \in \{0, 0.3, 0.7, 1\}$ , 得到系统频率偏差 $\Delta f$ 响应曲线如图6所示. 由图6可知,  $\tau = 0$ 的情况下无法保持系统频率稳定, 反而通信时滞增加到0.3, 0.7或1.0的情况下却能保持系统的频率稳定, 这验证一定大小的时滞可以改善系统性能, 也验证了结论的有效性.

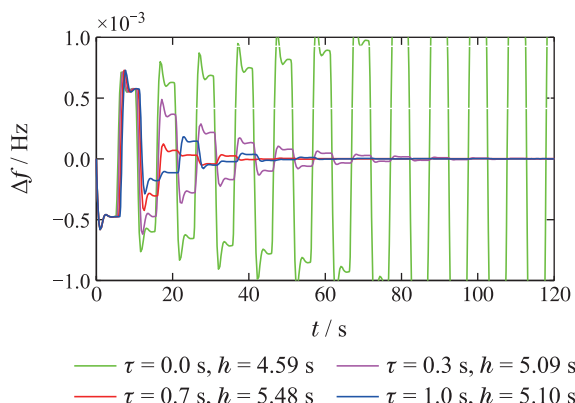


图 6 不同时滞 $\tau$ 条件下 $\Delta f$ 的响应曲线

Fig. 6 Response curves of  $\Delta f$  under different  $\tau$

### 4.2 市场环境下三区域系统的LFC设计

针对市场环境下三区域电力系统, 假设各控制区域有2个发电公司和2个配电公司, 其电力系统相关参数详见文献[11].

1) 离散LFC控制器设计: 设电力系统的3个区域的时滞和更新周期均为3 s, 即 $\tau = 3$  s和 $h = 3$  s, 调整参数 $\gamma_1 = 10, \gamma_2 = \gamma_3 = 0.01$ , 使用算法2, 得到3个区域的最大指数衰减率均为 $\lambda = 0.12$ 以及相应的离散

LFC控制器 $K_{31}$ 见表9, 作为比较, 文献[24]设计的控制器 $K_{32}$ 列入表9.

表 9 三区域LFC的控制器增益

Table 9 Controller gains of three-area LFC

区域	$K_{31}$ (本文)
1	$[-0.0157 \ -0.0131 \ -0.0299 \ -0.0280$ $-0.0058 \ -0.0076 \ -0.0933]$
2	$[-0.0196 \ -0.0233 \ -0.0280 \ -0.0298$ $-0.0058 \ -0.0067 \ -0.0933]$
3	$[-0.0151 \ -0.0302 \ -0.0289 \ -0.0317$ $-0.0077 \ -0.0058 \ -0.0933]$
区域	$K_{32}$ (文献[24])
1	$[-0.0165 \ -0.0076 \ -0.0453 \ -0.0425$ $-0.0084 \ -0.0113 \ -0.1417]$
2	$[-0.0378 \ -0.0255 \ -0.0796 \ -0.0850$ $-0.0145 \ -0.0175 \ -0.2650]$
3	$[-0.0289 \ -0.0387 \ -0.0823 \ -0.0904$ $-0.0202 \ -0.0148 \ -0.2651]$

2) 控制器性能分析与仿真验证: 对于安装LFC控制器 $K_{31}$ 和 $K_{32}$ 的三区域电力系统, 设 $\lambda = 0$ , 使用算法1, 对不同的 $h$ , 得到系统所允许的通信时滞 $\tau$ 上界见表10. 同时, 对不同的 $\tau$ , 计算得到系统控制区域2所允许的更新周期 $h$ 上界见表11. 从表10和表11可知, 与文献[24]相比, 所提方法获得的更新周期/时滞稳定域更大, 说明 $K_{31}$ 的控制性能更好, 即更新周期鲁棒性和时滞鲁棒性更好. 从表11还可看出,  $\tau = 2/2.5/3$ 相比于 $\tau = 0$ 的更新周期稳定域更大, 这说明一定大小的时滞能增加控制器对更新周期的鲁棒性.

表 10 不同 $h$ 条件下的时滞 $\tau$ 上界

Table 10 Upper bound of  $\tau$  for different  $h$

控制器	$h = 2$ s	$h = 5$ s
	区域1/2/3	区域1/2/3
$K_{31}$ (本文)	15.7/15.7/15.7	14.0/14.0/14.0
$K_{32}$ (文献[24])	9.9/4.6/4.6	8.0/2.6/2.6

表 11 不同 $\tau$ 条件下区域2的更新周期 $h$ 上界

Table 11 Upper bound  $h$  of area 2 for different  $\tau$

方法	通信时滞 $\tau$					
	0.0	2.0	2.5	3.0	4.0	7.0
$K_{31}$ (本文)	21.4	22.4	22.5	22.4	21.0	14.8
$K_{32}$ (文献[24])	7.7	6.5	5.3	4.5	3.0	-

通过Simulink搭建如图1的三区域电力系统仿真模型, 测试 $K_{31}$ 和 $K_{32}$ 对通信时滞、更新周期和

负荷扰动的鲁棒性. 其各区域配电公司与发电公司之间的广义发电参与矩阵AGPM见文献[11], 假设电力系统各控制区域的配电公司均增加0.1 pu负荷需求(合同内), 并且3个区域的的负荷扰动分别为 $\Delta P_{d1} = 0.06$  pu,  $\Delta P_{d2} = -0.1$  pu,  $\Delta P_{d3} = 0.08$  pu, 仿真得到 $K_{31}$ 和 $K_{32}$ 在不同时滞和更新周期条件下区域2的频率偏差 $\Delta f_2$ 响应曲线见图7(区域1/3的 $\Delta f_1/\Delta f_3$ 响应曲线类似, 这里省略). 另外, 设 $h = 20$  s, 基于离散控制器 $K_{31}$ , 得到 $\tau = 0/2.5$  s条件下区域2的 $\Delta f_2$ 响应曲线见图8.

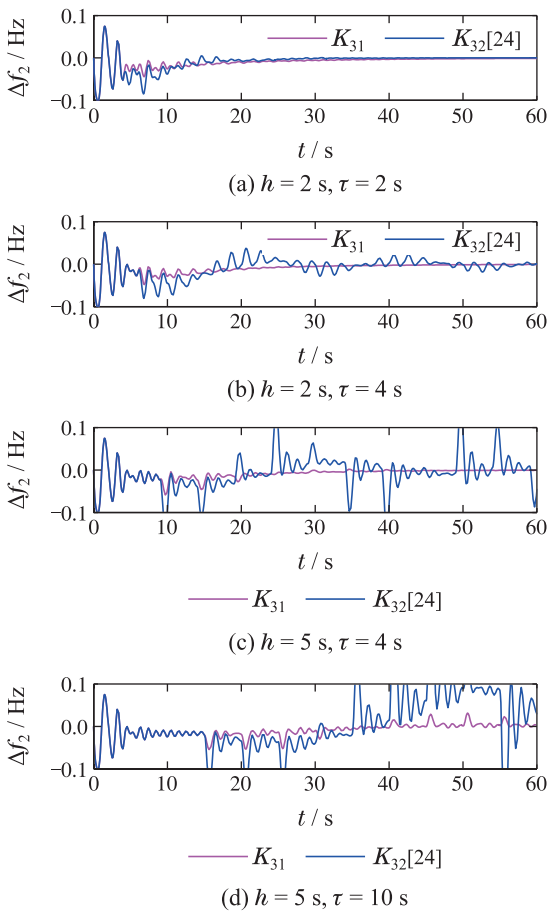


图7 不同 $h$ 和 $\tau$ 条件下的 $\Delta f$ 响应曲线

Fig. 7 Response curves of  $\Delta f$  under different  $h$  and  $\tau$

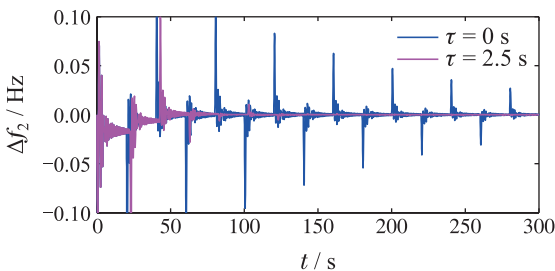


图8  $\tau = 0$ 和 $\tau = 2.5$ 条件下的 $\Delta f$ 响应曲线

Fig. 8 Response curves of  $\Delta f$  under  $\tau = 0$  and  $\tau = 2.5$

由图7可见, 随着 $h$ 和 $\tau$ 的增加,  $K_{31}$ 的控制性能能保持基本不变, 而 $K_{32}$ 的控制性能却急剧下降, 说明本

文设计的控制器 $K_{31}$ 具有更好的时滞鲁棒性和更新周期鲁棒性. 图8展示了一定大小的时滞加快了系统的频率稳定速度, 即改善了系统的性能. 现有文献研究中普遍认为通信时滞只会损害电力系统性能, 而上述的理论分析和仿真验证表明, 一定大小的通信时滞不仅没有损害电力系统的性能, 反而提升了系统的性能. 因此, 可利用这一特点来改善电力系统的性能.

### 5 结论

基于一种离散LFC方案, 本文研究了电力系统的负荷频率稳定控制问题. 考虑通信时滞和更新周期的影响, 构建了基于采样数据网络的电力系统LFC模型. 使用双边闭环Lyapunov泛函, 本文提出了电力系统LFC的时滞/采样相关稳定准则和控制器设计方法. 通过理论分析和仿真验证表明, 与其他文献LFC方案相比, 本文所设计LFC方案的控制性能更佳, 鲁棒性更强. 同时, 本文发现了一个重要现象: 一定大小的通信时滞能有效提升电力系统LFC的性能, 这个有趣的问题值得将来进一步研究.

### 参考文献:

- [1] BEVRANI H. *Robust Power System Frequency Control*. New York: Springer, 2014.
- [2] ZHANG Yi, LIU Xiangjie. Robust distributed model predictive control for load frequency control of uncertain power systems. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 621 – 630. (张怡, 刘向杰. 互联电力系统鲁棒分布式模型预测负荷频率控制. 控制理论与应用, 2016, 33(5): 621 – 630.)
- [3] WANG S, MENG X, CHEN T. Wide-area control of power systems through delayed network communication. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(2): 495 – 503.
- [4] LUO H, HU Z. Stability analysis of sampled-data load frequency control systems with multiple delays. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2022, 30(1): 434 – 442.
- [5] ZUO Jian, WANG Ziqi, LI Yinhong, et al. Optimal fractional-order PID controller design for interconnected power grid load frequency control considering time-delay. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(9): 1151 – 1160. (左剑, 王子琪, 李银红, 等. 计及时滞的互联电网负荷频率控制最优分数阶PID控制器设计. 控制理论与应用, 2017, 34(9): 1151 – 1160.)
- [6] CHEN P, ZHANG J, YAN H. Adaptive event-triggering  $H_\infty$  load frequency control for network-based power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2018, 65(2): 1685 – 1694.
- [7] ZHAO Xilin, HE Jinjin, FU Bo, et al. An AGC method for interconnected power grid with two-channel random delays. *Power System Protection and Control*, 2018, 46(8): 50 – 57. (赵熙临, 何晶晶, 付波, 等. 考虑双通道随机时延的区域互联电网AGC方法. 电力系统保护与控制, 2018, 46(8): 50 – 57.)
- [8] MILANO F, ANGHEL M. Impact of time delays on power system stability. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2012, 59(4): 889 – 900.
- [9] SONMEZ S, AYASUN S, NWANKPA C O. An exact method for computing delay margin for stability of load frequency control systems with constant communication delays. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2016, 31(1): 370 – 377.

- [10] TAN W. Unified tuning of PID load frequency controller for power system via IMC. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2010, 25(1): 341 – 345.
- [11] ZHU Q, JIANG L, YAO W, et al. Robust load frequency control with dynamic demand response for deregulated power systems considering communication delays. *Electric Power Components and Systems*, 2017, 45(1): 75 – 87.
- [12] ZHANG C K, JIANG L, WU Q, et al. Delay-dependent robust load frequency control for time delay power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2013, 28(3): 2192 – 2201.
- [13] JIANG L, YAO W, WU H Q, et al. Delay-dependent stability for load frequency control with constant and time-varying delays. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2012, 27(2): 932 – 941.
- [14] ZHANG C K, JIANG L, WU Q, et al. Further results on delay-dependent stability of multi-area load frequency control. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2013, 28(4): 4465 – 4474.
- [15] JIN L, ZHANG C K, HE Y, et al. Delay-dependent stability analysis of multi-area load frequency control with enhanced accuracy and computation efficiency. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2019, 34(5): 3687 – 3696.
- [16] YANG F, HE J, WANG D. New stability criteria of delayed load frequency control systems via infinite-series-based inequality. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 14(1): 231 – 240.
- [17] SHEN H, JIAO S, PARK J H, et al. An improved result on  $H_\infty$  load frequency control for power systems with time delays. *IEEE Systems Journal*, 2020, DOI: 10.1109/JSYST.2020.3014936.
- [18] RAMAKRISHNA K S, BHATTI T S. Sampled-data automatic load frequency control of a single area power system with multi-source power generation. *Electric Power Components and Systems*, 2007, 35(8): 955 – 980.
- [19] VANKAT A N, HISKENS I A, RAWLINGS J B. Distributed MPC strategies with application to power system automatic generation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, 16(6): 1192 – 1206.
- [20] ZENG H B, TEO K L, HE Y. A new looped-functional for stability analysis of sampled-data systems. *Automatica*, 2017, 82: 328 – 331.
- [21] LIAN Honghai, DENG Peng, XIAO Shenping, et al. Robust sampled-data control for nonlinear systems based on T-S fuzzy model. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(7): 1601 – 1610.  
(练红海, 邓鹏, 肖伸平, 等. 基于T-S模糊模型的非线性系统鲁棒采样控制. *控制理论与应用*, 2020, 37(7): 1601 – 1610.)
- [22] WEN S, YU S, ZENG Z, et al. Event-triggering load frequency control for multi-area power systems with communication delays. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(2): 1308 – 1317.
- [23] NANDA J, MANGLA A, SURI S. Some new findings on automatic generation control of an interconnected hydrothermal system with conventional controllers. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2006, 21(1): 187 – 194.
- [24] SHANGGUAN X C, HE Y, ZHANG C K, et al. Sampled-data based discrete and fast load frequency control for power systems with wind. *Applied Energy*, 2020, 259: 114202.
- [25] LUO H, HISKENS I A, HU Z. Stability analysis of load frequency control systems with sampling and transmission delay. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2020, 35(5): 3603 – 3615.
- [26] SHANG-GUAN X C, ZHANG C K, HE Y, et al. Robust load frequency control for power system considering transmission delay and sampling period. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2021, 17(8): 5292 – 5303.
- [27] SHAYEGHI H, SHAYANFAR H A, JALILI A. Multi-stage fuzzy PID and power system automatic generation controller in deregulated environments. *Energy Conversion and Management*, 2006, 47(18/19): 2829 – 2845.
- [28] RAMAKRISHNAN K, RAY G. Stability criteria for nonlinearly perturbed load frequency systems with time-delay. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 2015, 5(3): 383 – 392.
- [29] LIU K, FRIDMAN E. Wirtinger's inequality and Lyapunov-based sampled-data stabilization. *Automatica*, 2012, 48(1): 102 – 108.
- [30] SEURET A, GOUAISBAUT F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860 – 2866.
- [31] ZHANG X M, HAN Q L. Novel delay-derivative-dependent stability criteria using new bounding techniques. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(13): 1419 – 1432.
- [32] ZENG H B, ZHAI Z L, HE Y, et al. New insights on stability of sampled-data systems with time-delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 374: 125 – 134.

## 附录A

### 定理1的证明

证 为了简化定理证明过程中相关式子描述, 定义如下符号:

$$\begin{aligned}
 v_1(s) &= [x^T(s) \ x^T(s-\tau)]^T, \quad v_2(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t x(s) ds, \\
 v_3(t) &= [x^T(t) - x^T(t_k) \ x^T(t-\tau) - x^T(t_k-\tau)]^T, \\
 v_4(t) &= [x^T(t_{k+1}) - x^T(t) \ x^T(t_{k+1}-\tau) - x^T(t-\tau)]^T, \\
 \eta_1(t) &= [v_1^T(t) \ \tau v_2^T(t)]^T, \quad \eta_2(t) = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t)]^T, \\
 \eta_3(t) &= [(t_{k+1}-t)v_3^T(t) \ (t-t_k)v_4^T(t)]^T, \\
 \eta_4(t) &= [v_3^T(t) \ v_4^T(t)]^T, \quad \eta_{5k} = [v_1^T(t_k) \ v_1^T(t_{k+1})]^T, \\
 \eta_6(t) &= [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t_k) \ x^T(t_k-\tau)]^T, \\
 \xi(t) &= [v_1^T(t) \ \dot{v}_1^T(t) \ v_1^T(t_k) \ v_1^T(t_{k+1}) \ v_2^T(t)]^T, \\
 e_i &= [0_{n \times (i-1)n} \ I \ 0_{n \times (9-i)n}], \quad i = 1, 2, \dots, 9.
 \end{aligned}$$

针对电力LFC系统(8), 考虑系统中的采样和时滞信息, 构造如下的双边闭环Lyapunov泛函:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (\text{A1})$$

其中:

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \eta_1^T(t) P \eta_1(t) + \int_{t-\tau}^t \eta_2^T(s) S \eta_2(s) ds + \\
 &\quad \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds d\theta, \\
 V_2(t) &= 2\eta_3^T(t) (X_1 \eta_4(t) + X_2 \eta_{5k}) + (t_{k+1}-t)(t-t_k) \times \\
 &\quad \eta_{5k}^T H \eta_{5k} + (t_{k+1}-t)(\mathcal{J}_{t1}(t_k) + \mathcal{J}_{t2\tau}(t_k)) - \\
 &\quad (t-t_k)(\mathcal{J}_3(t_{k+1}) + \mathcal{J}_{4\tau}(t_{k+1})),
 \end{aligned}$$

在 $V_2(t)$ 中:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{t1}(t_k) &= \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds, \\
 \mathcal{J}_{t2\tau}(t_k) &= \int_{t_k-\tau}^{t-\tau} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds, \\
 \mathcal{J}_{t3}(t_{k+1}) &= \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds, \\
 \mathcal{J}_{t4\tau}(t_{k+1}) &= \int_{t-\tau}^{t_{k+1}-\tau} \dot{x}^T(s) R_4 \dot{x}(s) ds.
 \end{aligned}$$

泛函 $V(t)$ 中各矩阵定义见定理1.  $V_1(t)$ 是一个二次型Lyapunov泛函, 它的构造充分利用了系统中的网络传输时滞项信息, 如时滞状态信息 $x(t-\tau)$ 、含时滞的一次积分项信息和二次积分项信息等.  $V_2(t)$ 充分考虑了系统双边采样区间 $[t_k, t)$ 和 $[t, t_{k+1})$ 的采样信息和时滞信息, 且 $V_2(t_k) =$

$V_2(t_{k+1})$ , 满足闭环函数条件<sup>[29]</sup>. 因此,  $V(t)$ 称之为双边闭环Lyapunov泛函. 接下来, 对泛函 $V(t)$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) = \\ &\xi^T(t) [\Phi_{11} + (t_{k+1} - t)\Phi_2 + (t_{k+1} - t)\Phi_3] \xi(t) - \\ &\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds - \mathcal{J}_{t_1}(t_k) - \mathcal{J}_{t_{2\tau}}(t_k) - \\ &\mathcal{J}_3(t_{k+1}) - \mathcal{J}_{4\tau}(t_{k+1}). \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

使用Wirtinger积分不等式<sup>[30]</sup>对泛函导数 $\dot{V}(t)$ 中的第1个积分项进行估计, 可得

$$-\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \leq -\xi^T(t) \Xi_5^T Z_a \Xi_5 \xi(t). \quad (\text{A3})$$

存在任意合适维度矩阵 $G_i, i = 1, 2, 3, 4$ , 使用自由权积分不等式<sup>[31]</sup>对积分项 $\mathcal{J}_{t_1}(t_k), \mathcal{J}_{t_{2\tau}}(t_k), \mathcal{J}_3(t_{k+1}), \mathcal{J}_{4\tau}(t_{k+1})$ 进行估计, 可得

$$\begin{aligned} &-\mathcal{J}_{t_1}(t_k) - \mathcal{J}_{t_{2\tau}}(t_k) - \mathcal{J}_3(t_{k+1}) - \mathcal{J}_{4\tau}(t_{k+1}) \leq \\ &\xi^T(t) [(t_{k+1} - t)(G_3^T R_3^{-1} G_3 + G_4^T R_4^{-1} G_4) + \\ &(t - t_k)(G_1^T R_1^{-1} G_1 + G_2^T R_2^{-1} G_2) + \Phi_{12}] \xi(t), \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

另外, 存在任意合适维度矩阵 $M$ , 可得如下零值等式:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\eta_6^T(t) M \sum_{j=1}^2 \mu_j(t) [(A_i + \lambda I)x(t) + \\ &\rho_j B_i K_i x(t_k - \tau) - \dot{x}(t)] = \\ &2\xi^T(t) \Xi_{14}^T M \Gamma \xi(t), \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

式中 $\Gamma = \sum_{j=1}^2 \mu_j(t) \Gamma_j$ . 然后, 对式(A2)–(A5)进行整理可得

$$\dot{V}(t) = \xi^T(t) \left[ \frac{(t_{k+1} - t)}{h_k} \Pi_1 + \frac{(t - t_k)}{h_k} \Pi_2 \right] \xi(t), \quad (\text{A6})$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Phi_1 + h_k \Phi_2 + h_k \mathcal{G}_{3,4} \mathcal{R}_{3,4}^{-1} \mathcal{G}_{3,4}^T, \\ \Pi_2 &= \Phi_1 + h_k \Phi_3 + h_k \mathcal{G}_{1,2} \mathcal{R}_{1,2}^{-1} \mathcal{G}_{1,2}^T, \\ \Phi_1 &= \sum_{j=1}^2 \mu_j(t) \Phi_{1j}. \end{aligned}$$

此时, 若 $\Pi_1 < 0$ 和 $\Pi_2 < 0$ , 则 $\dot{V}(t) < 0$ , 根据Lyapunov稳定性理论可知, 系统(9)是渐近稳定的, 也就是说, 电力系统LFC(8)是指渐近稳定的. 然而, 由Schur补引理可知, LMI(10)和LMI(11)是分别等价于 $\Pi_1 < 0$ 和 $\Pi_2 < 0$ 的. 证毕.

## 附录B

### 定理2的证明

证 定义如下矩阵变量:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= \text{diag}\{\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_i\}, \hat{Y}_i = \hat{Y}, i = 1, 2, 3, \dots, \\ \hat{Y} &= Y^{-1}, M = [Y^T \quad \gamma_1 Y^T \quad \gamma_2 Y^T \quad \gamma_3 Y^T]^T, \\ \tilde{P} &= \hat{Y}_3 P \hat{Y}_3^T, \tilde{S} = \hat{Y}_2 S \hat{Y}_2^T, \tilde{Z} = \hat{Y} Z \hat{Y}^T, \\ \tilde{R}_i &= \hat{Y} R_i \hat{Y}^T, i = 1, 2, 3, 4, \\ \tilde{X}_1 &= \hat{Y}_4 X_1 \hat{Y}_4^T, \tilde{X}_2 = \hat{Y}_4 X_2 \hat{Y}_4^T, \\ \tilde{H} &= \hat{Y}_4 H \hat{Y}_4^T, \tilde{G}_1 = \hat{Y} G_1 \hat{Y}_9^T, \\ \tilde{G}_2 &= \hat{Y} G_2 \hat{Y}_9^T, \tilde{G}_3 = \hat{Y} G_3 \hat{Y}_9^T, \tilde{G}_4 = \hat{Y} G_4 \hat{Y}_9^T, \\ \tilde{M} &= [I \quad \gamma_1 I \quad \gamma_2 I \quad \gamma_3 I]^T, L = K_i \hat{Y}^T. \end{aligned}$$

将定理1中的条件(10)–(11)分别左乘 $\mathcal{Y}_{11}^T$ 和右乘 $\mathcal{Y}_{11}$ , 可得条件(12)–(13). 类似于定理1, 若条件(12)–(13)成立, 则电力系统LFC(8)是指渐近稳定的, 且离散控制器增益为 $K_i = L(Y^T)^{-1}$ . 证毕.

### 作者简介:

**练红海** 特聘教授, 目前研究方向为电力系统稳定分析与控制、时滞系统、采样控制系统和网络控制系统的鲁棒控制, E-mail: Lianhh\_402@163.com;

**覃事刚** 副教授, 目前研究方向为智能电网运行状态监测、大数据与人工智能技术应用等, E-mail: xizao2008@126.com;

**肖仲平** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、过程控制、智能控制和电力系统稳定性等, E-mail: xsph\_519@163.com;

**李谟发** 博士, 工程师, 目前研究方向为逆变器控制、分布式电源接入配电网的特性分析与保护、智能电网的稳定性等, E-mail: limofa@126.com;

**肖会芹** 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为时滞系统鲁棒控制和网络控制等, E-mail: xiaohq\_610@126.com.