

# 基于牵制控制的切换布尔网络的分布式集合镇定

蒋梦涵, 李海涛<sup>†</sup>

(山东师范大学 数学与统计学院, 山东 济南 250014)

**摘要:** 切换布尔网络是一种典型的网络化控制系统, 在基因调控、信息安全、人工智能、电路设计等领域具有重要应用. 本文基于牵制控制方法, 研究切换布尔网络在任意切换下的分布式集合镇定问题. 首先, 利用矩阵半张量积方法, 得到切换布尔网络的代数形式. 其次, 基于代数形式, 提出构造性的算法来实现切换布尔网络在牵制控制的作用下任意切换集合镇定, 并设计出状态反馈牵制控制器. 再次, 利用逻辑矩阵分解技术和分布式控制方法, 设计任意切换下切换布尔网络的分布式集合镇定控制器, 并提出分布式控制器存在的充分条件. 文中给出 3 个例子来说明所获得结果的有效性.

**关键词:** 切换布尔网络; 镇定; 牵制控制; 分布式控制; 矩阵半张量积

**引用格式:** 蒋梦涵, 李海涛. 基于牵制控制的切换布尔网络的分布式集合镇定. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1754 – 1760

DOI: 10.7641/CTA.2021.10644

## Distributed set stabilization of switched Boolean networks via pinning control

JIANG Meng-han, LI Hai-tao<sup>†</sup>

(School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong 250014, China)

**Abstract:** Switched Boolean network is a typical kind of networked control systems, which has important applications in gene regulation, information security, artificial intelligence, circuit design, and so on. Based on the pinning control method, this paper is devoted to studying the distributed set stabilization of switched Boolean networks under arbitrary switching signal. Firstly, the algebraic form of switched Boolean networks is obtained by the semi-tensor product of matrices. Secondly, based on the algebraic form, a constructive algorithm is proposed to design state feedback pinning controllers for the set stabilization of switched Boolean networks under arbitrary switching signal. Thirdly, the combination of logical matrix factorization technique and distributed control method is applied to design distributed controllers for the set stabilization of switched Boolean networks under arbitrary switching signal, and a sufficient condition is proposed for the existence of distributed controllers. Three examples are worked out to demonstrate the effectiveness of the obtained new results.

**Key words:** switched Boolean network; stabilization; pinning control; distributed control; semi-tensor product of matrices.

**Citation:** JIANG Menghan, LI Haitao. Distributed set stabilization of switched Boolean networks via pinning control. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1754 – 1760

## 1 引言

1969年, 考夫曼<sup>[1]</sup>提出了用布尔网络去建模基因调控网络. 布尔网络是一类离散时间有限值动态系统. 用布尔网络建模基因调控网络时, 每个基因有“1”和“0”两种表达形式, 分别表示基因的激活与非激活状态, 并且每个基因的状态更新受自己及其邻居基因的影响. 因此, 利用布尔网络来研究基因调控网络的结构和性质是一种有效的方法, 其网络特性对该问题的研究起到了至关重要的作用, 成为学术界的一个热点

研究问题. 布尔网络不仅被用在生物系统中<sup>[2]</sup>, 而且还被用来研究网络演化博弈<sup>[3]</sup>、大规模集成电路<sup>[4]</sup>、内燃机<sup>[5]</sup>、网络故障定位<sup>[6]</sup>、移位寄存器<sup>[7]</sup>.

程代展教授提出了矩阵半张量积这一有效数学工具来研究布尔网络. 使用矩阵半张量积, 布尔网络可被转化为代数状态空间形式<sup>[8]</sup>, 进而为利用经典控制理论研究布尔网络搭建了桥梁<sup>[9]</sup>. 近年来, 使用矩阵半张量积方法, 关于布尔网络的若干基本问题得到了深入研究, 包括能控性<sup>[10-13]</sup>、能观性<sup>[14-17]</sup>、干扰

收稿日期: 2021-07-22; 录用日期: 2021-10-13.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: haिताoli09@gmail.com; Tel.: +86 15253130216.

本文责任编辑: 洪奕光.

国家自然科学基金项目(62073202), 泰山学者青年专家项目(tsqn201909076)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62073202) and the Young Experts of Taishan Scholar Project (tsqn201909076).

解<sup>[18-20]</sup>、输出跟踪<sup>[21-22]</sup>等. 值得一提的是, 作为自动控制领域的基本问题, 稳定和镇定在布尔网络的研究中起着重要作用, 包括揭示一些生命现象以及设计疾病的干预治疗方案等. 矩阵半张量积方法在布尔网络的稳定和镇定方面也得到了较为成熟的应用, 一些有效的控制设计方法被提出, 包括能达集方法<sup>[23]</sup>、Lyapunov 函数方法<sup>[24-25]</sup>、采样控制<sup>[26-27]</sup>、牵制控制<sup>[28-29]</sup>、事件触发控制<sup>[30]</sup>、凸规划<sup>[31]</sup>等.

研究表明, 对于生物系统或复杂网络, 当对一部分节点施加控制时, 可能更易表现出系统或网络的优良特性<sup>[32]</sup>. 例如, 对状态Mdm2和Wipl施加控制可以促进细胞凋亡<sup>[33]</sup>. 这种控制策略称为牵制控制. 文献<sup>[34]</sup>将牵制控制引入到布尔网络中. 一般来说, 布尔网络的牵制控制有两种方法: 第1种为选择一些牵制节点来施加控制<sup>[34]</sup>; 第2种方法是通过改变状态转移矩阵的列来构造牵制控制<sup>[28]</sup>.

在实际基因调控网络中, 多模态切换过程大量存在. 从细胞层面来看, 真核细胞的生长与分裂可以看作由四大过程形成的多模态切换过程<sup>[35]</sup>. 将控制输入看作切换信号时, 布尔控制网络可以看作切换系统<sup>[36]</sup>. 近年来, 切换系统在理论发展和实际应用上得到了广泛的关注<sup>[37]</sup>. 特别地, 国内外很多学者使用矩阵半张量积研究了切换布尔网络的能控性<sup>[38]</sup>、稳定和镇定<sup>[39]</sup>、同步控制<sup>[40]</sup>、输出跟踪<sup>[21]</sup>等问题, 并取得了许多优秀的成果. 据笔者所知, 目前尚未发现使用牵制控制方法研究切换布尔网络任意切换集合可稳的文献.

集合镇定是非线性控制中一个非常重要的问题, 有着重要的实际应用<sup>[41-42]</sup>. 它的基本思想为, 一个系统或一组相互关联的系统是否能收敛或镇定到状态空间中的某个集合<sup>[42]</sup>. 集合镇定问题可以认为是传统镇定问题的推广. 近年来, 布尔网络的集合镇定问题也得到了广泛关注, 在同步控制<sup>[43]</sup>、输出跟踪<sup>[44]</sup>等方面得到了重要应用. 然而, 切换布尔网络的分布式集合镇定问题尚无相关研究结果.

本文使用牵制控制策略, 研究切换布尔网络的分布式集合镇定问题. 本文的创新点总结如下: 一方面, 本文给出带牵制控制的切换布尔网络的代数形式, 并建立切换布尔网络在任意切换信号下集合镇定控制器的设计方法; 另一方面, 本文定义新的矩阵除法对控制器进行降维, 给出分布式控制器的设计方法.

本文剩余部分组织如下: 第2节给出矩阵半张量积的基本知识. 第3节给出切换布尔网络以及带牵制控制的切换布尔网络的方程及等价代数形式. 第4节给出本文的主要结果. 第5节给出本文的结论.

本文使用的符号列举如下:

- 1)  $\mathbb{Z}_+$  和  $\mathbb{N}$  分别表示正整数集和自然数集.
- 2)  $\text{Col}_i(A)$  表示矩阵  $A$  的第  $i$  列,  $\text{Col}(A)$  表示矩阵

$A$  的所有的列组成的集合.

$$3) \mathcal{D} := \{0, 1\}.$$

$$4) \mathbf{1}_n := \underbrace{[1 \ \cdots \ 1]}_n^T.$$

$$5) \mathcal{D}^n := \underbrace{\mathcal{D} \times \cdots \times \mathcal{D}}_n.$$

6)  $\Delta_n := \{\delta_n^i = \text{Col}_i(I_n) : i = 1, \cdots, n\}$ , 这里  $I_n$  表示  $n$  维单位矩阵.

7) 将逻辑矩阵  $M = [\delta_n^{i_1} \ \delta_n^{i_2} \ \cdots \ \delta_n^{i_n}]$  简写为  $M = \delta_n[i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_n]$ .

8)  $\mathcal{M}_{m \times n}$  表示所有  $m \times n$  维矩阵. 所有逻辑矩阵的集合记为  $\mathcal{L}$ . 所有  $n \times s$  维逻辑矩阵的集合记为  $\mathcal{L}_{n \times s}$ .

9)  $x_{N_i^n}(t) = x_{i_1}(t) x_{i_2}(t) \cdots x_{i_n}(t)$ . 其中假设  $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}\}$  为  $x_i$  的邻居集.

## 2 预备知识

本文使用的主要工具为矩阵半张量积, 本节对其定义和主要性质进行回顾.

**定义 1** 令  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ .  $A$  与  $B$  的矩阵半张量积表示为  $A \ltimes B$ , 其定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{l_n})(B \otimes I_{l_p}), \quad (1)$$

这里  $l = \text{lcm}(n, p)$  是  $n$  和  $p$  的最小公倍数,  $\otimes$  表示矩阵的张量积.

**注 1** 当  $n = p$  时,  $A \ltimes B$  退化为普通矩阵乘积  $AB$ . 事实上, 矩阵半张量积打破了普通矩阵乘积的维数限制.

**注 2** 给定  $\alpha \in \mathbb{R}^{t \times 1}$  和  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 那么使用矩阵半张量积可得

$$\alpha \ltimes B = (I_t \otimes B) \ltimes \alpha. \quad (2)$$

**引理 1** 令  $f : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$  是一个  $n$  维逻辑函数. 那么存在唯一的矩阵  $F \in \mathcal{M}_{2 \times 2^n}$  使得

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = F \ltimes a_1 \ltimes \cdots \ltimes a_n, \quad (3)$$

这里,  $F$  称为逻辑函数  $f$  的结构矩阵.

## 3 问题描述

有  $n$  个节点和  $m$  个模态的切换布尔网络可以描述为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1^{\sigma(t)}(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n^{\sigma(t)}(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \end{cases} \quad (4)$$

这里:  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{W} = \{1, \cdots, w\}$  是切换信号,  $x_i \in \mathcal{D}$ ,  $i = 1, \cdots, n$  是逻辑状态变量,  $f_i^j : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $i = 1, \cdots, n$ ,  $j = 1, \cdots, w$  是逻辑函数.

使用逻辑变量的向量形式并令  $x(t) = \ltimes_{i=1}^n x_i(t)$ . 假设  $f_i^{\sigma(t)}$  对应的结构矩阵是  $M_{\sigma(t), i}$ ,  $i = 1, \cdots, n$ . 可得系统(4)的代数状态空间表示为

$$x(t+1) = L_{\sigma(t)}x(t), \quad (5)$$

其中  $\text{Col}_i(L_{\sigma(t)}) = \times_{j=1}^n \text{Col}_i(M_{\sigma(t),j}), i = 1, \dots, 2^n,$   
 $L_{\sigma(t)} \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}.$

本文的目的是使系统(4)在任意切换下集合镇定, 为此对系统(4)施加牵制控制.

本文所使用的牵制控制为引言中所提及的第二种, 即通过改变状态转移矩阵  $L_{\sigma(t)}$  的列来反推找出需要施加牵制控制的状态节点. 假设集合  $\Theta$  表示需要施加牵制控制的状态节点组成的集合. 那么施加牵制控制后系统(4)转化为如下系统:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = F_i^{\sigma(t)}(u_{\sigma,i}(t), x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \quad i \in \Theta, \\ x_j(t+1) = f_j^{\sigma(t)}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \Theta, \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $F_i^{\sigma(t)}, f_j^{\sigma(t)}$  是逻辑函数,  $u_{\sigma,i}$  是状态反馈控制器. 在下面的研究中, 本文将致力于如何选择集合  $\Theta$ , 并设计  $F_i^{\sigma(t)}, u_{\sigma,i}.$

### 4 主要结果

#### 4.1 牵制控制设计

首先给出系统(4)任意切换集合可稳和切换-状态转移图的定义.

**定义 2**(任意切换集合可稳) 给定非空集合  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{D}^n$ , 如果对于任意切换信号  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{W}$  和任意初始状态  $x_0 \in \mathcal{D}^n$ , 都存在正整数  $T$ , 使得对于任意正整数  $t \geq T$ , 都有  $x(t; x_0) \in \mathcal{O}$ , 则称切换布尔网络(4)任意切换可稳到集合  $\mathcal{O}$ .

**定义 3**(切换-状态转移图) 系统(4)的切换-状态积空间定义为  $\zeta = \{(\lambda, X) : \lambda \in \mathcal{W}, X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}^n\}$ . 令  $s_i = (\lambda^i, X^i) \in \zeta, s_j = (\lambda^j, X^j) \in \zeta$ , 其中  $X^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ . 若  $x_k^j = f_k^{\lambda^i}(X^j), k = 1, \dots, n$ , 则称  $(s_i, s_j)$  为一条有向边. 有向边的集合记为  $\nu \subseteq \zeta \times \zeta$ .  $(\zeta, \nu)$  形成了一个有向图, 称为切换布尔网络的切换-状态转移图. 令  $\Pi$  表示切换-状态转移图中所有环上的状态构成的集合.

**定理 1** 若  $\Pi \subseteq \mathcal{O}$ , 则系统(4)任意切换可稳到集合  $\mathcal{O}$ .

**证** 用反证法. 若  $\Pi \subseteq \mathcal{O}$ , 但系统(4)不能任意切换可稳到集合  $\mathcal{O}$ , 即存在切换信号  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{W}$ , 存在初始状态  $x_0 \in \mathcal{D}^n$ , 对于任意正整数  $T$ , 存在时刻  $t \geq T$ , 满足  $x(t; x_0) \notin \mathcal{O}$ . 当  $T$  充分大时,  $x(t; x_0) \in \Pi$ , 这与  $\Pi \subseteq \mathcal{O}$  矛盾. 证毕.

令  $L_i = \delta_{2^n}[r_{i,1} \ \dots \ r_{i,2^n}], i = 1, \dots, w$ . 基于定理1, 下面给出一个算法使系统(4)任意切换可稳到给定集合  $\mathcal{O}$ .

#### 算法 1

**步骤 1** 假设集合  $\mathcal{O} = \{\delta_{2^n}^{r_1}, \dots, \delta_{2^n}^{r_m}\}$ , 将  $L_i, i$

$= 1, \dots, w$  中的第  $r_1, \dots, r_m$  列元素转化为集合  $\mathcal{O}$  中的元素, 得到  $L'_i, i = 1, \dots, w$ ;

**步骤 2** 使用深度搜索算法, 找到以  $L'_i, i = 1, \dots, w$  为状态转移矩阵的系统在切换-状态转移图中所有的环, 令  $\Lambda$  和  $\Gamma$  分别为不动点及极限环组成的集合;

**步骤 3** 令

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= \{\delta_{2^n}^{i,j} : \delta_{2^n}^{i,j} \in \Lambda, \delta_{2^n}^{i,j} \notin \mathcal{O}, i \in \{1, \dots, w\}, \\ &\quad j \in \{1, \dots, 2^n\}\}, \\ \Gamma^* &= \{(\delta_{2^n}^{i_1, j_1} \rightarrow \delta_{2^n}^{i_2, j_2} \rightarrow \dots \rightarrow \delta_{2^n}^{i_l, j_l}) : \\ &\quad \forall \delta_{2^n}^{i_\mu, j_\nu} \notin \mathcal{O}, i_\mu \in \{1, \dots, w\}, \\ &\quad j_\nu \in \{1, \dots, 2^n\}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+\}; \end{aligned}$$

**步骤 4** 任意给定  $\Gamma^*$  的某一元素中的一个状态, 用该状态和集合  $\Lambda^*$  的并集构造集合  $\Phi$ , 令  $\text{Col}_j(L''_i) \in \mathcal{O}, \forall \delta_{2^n}^{i,j} \in \Phi; \text{Col}_\theta(L''_i) = \text{Col}_\theta(L'_i), i = 1, \dots, w; \theta \in \{1, \dots, 2^n\} \setminus \{j : \delta_{2^n}^{i,j} \in \Phi\}$ . 此时  $L'_i, i = 1, \dots, w$  转化为  $L''_i, i = 1, \dots, w$ .

**注 3** 深度搜索算法<sup>[45]</sup> 是一个基本的递归算法, 可以用来找出图中所有环.

**推论 1** 对于系统(4)来说, 通过算法1, 当状态转移矩阵从  $L_i, i = 1, \dots, w$  转化为  $L''_i, i = 1, \dots, w$  时, 系统任意切换可稳到集合  $\mathcal{O}$ .

**证** 通过算法1, 当  $L_i, i = 1, \dots, w$  转化为  $L''_i, i = 1, \dots, w$  时, 其切换-状态转移图满足  $\Pi \subseteq \mathcal{O}$ , 故根据定理1, 系统(4)任意切换可稳到集合  $\mathcal{O}$ . 证毕.

根据定理1及推论1, 可得下述控制器求解过程. 对  $\sigma(t) = i$ , 当结构矩阵  $L_i$  转化为  $L''_i$  时, 我们假设对  $L_i$  的第1列到第  $k$  列进行了改变, 也就是说  $M_{i,1}, \dots, M_{i,k}$  变为  $M'_{i,1}, \dots, M'_{i,k}$ . 相应地, 假设

$$f_1^i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_k^i(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

变为

$$\begin{aligned} &F_1^i(u_{i,1}(t), x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, \\ &F_k^i(u_{i,k}(t), x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} &F_1^i(u_{i,1}(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) = \\ &u_{i,1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \oplus_{i,1} f_1^i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \\ &M_{\oplus_{i,1}} \widehat{M}_{i,1} x_1(t) \cdots x_n(t) M_{i,1} x_1(t) \cdots x_n(t) = \\ &M_{\oplus_{i,1}} \widehat{M}_{i,1} (I_{2^n} \otimes M_{i,1}) \Phi_n x_1(t) \cdots x_n(t), \\ &\quad \vdots \\ &F_k^i(u_{i,k}(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) = \\ &u_{i,k}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \oplus_{i,k} f_k^i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \\ &M_{\oplus_{i,k}} \widehat{M}_{i,k} x_1(t) \cdots x_n(t) M_{i,k} x_1(t) \cdots x_n(t) = \end{aligned}$$

$$M_{\oplus_{i,k}} \widehat{M}_{i,k} (I_{2^n} \otimes M_{i,k}) \Phi_n x_1(t) \cdots x_n(t),$$

其中:  $M_{\oplus_{i,1}}, \dots, M_{\oplus_{i,k}} \in \mathcal{L}_{2 \times 4}$  分别是逻辑函数  $\oplus_{i,1}, \dots, \oplus_{i,k}$  的结构矩阵,  $\widehat{M}_{i,1}, \dots, \widehat{M}_{i,k} \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$  分别是反馈控制函数  $u_{i,1}, \dots, u_{i,k}$  的结构矩阵. 特别地,  $\Phi_n = \delta_{2^{2n}} [1 \ 2^n + 2 \ 2^{n+1} + 3 \ \dots \ (2^n - 2) \times 2^n + 2^n - 1 \ 2^{2n}]$  为降幂矩阵.

根据下述矩阵方程计算出  $M_{\oplus_{i,1}}, \dots, M_{\oplus_{i,k}}, \widehat{M}_{i,1}, \dots, \widehat{M}_{i,k}$ :

$$\begin{cases} M_{\oplus_{i,1}} \widehat{M}_{i,1} (I_{2^n} \otimes M_{i,1}) \Phi_n = M'_{i,1}, \\ \vdots \\ M_{\oplus_{i,k}} \widehat{M}_{i,k} (I_{2^n} \otimes M_{i,k}) \Phi_n = M'_{i,k}. \end{cases} \quad (7)$$

**命题 1** 若方程(7)可解, 则存在牵制控制器使系统(4)任意切换可稳到集合  $\mathcal{O}$ .

**注 4** 方程(7)可解性的证明可参考文献[28].

**例 1** 考虑下面的切换布尔网络:

$$x_i(t+1) = f_i^{\sigma(t)}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

其中:  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{W} := \{1, 2\}$ ,  $f_1^1 = x_2 \wedge x_3, f_2^1 = x_1, f_3^1 = x_1 \wedge x_3; f_1^2 = x_1 \wedge x_2, f_2^2 = x_2 \wedge x_3, f_3^2 = x_1 \wedge x_3$ . 下面设计一个牵制控制器, 使系统任意切换可稳到集合  $\mathcal{O} = \{\delta_8^4, \delta_8^5\}$ . 可以得到

$$x(t+1) = L_{\sigma(t)} x(t),$$

其中:

$$L_1 = \delta_8 [1 \ 6 \ 5 \ 6 \ 4 \ 8 \ 8 \ 8],$$

$$L_2 = \delta_8 [1 \ 4 \ 7 \ 8 \ 6 \ 8 \ 8 \ 8].$$

应用算法1中步骤1可得

$$L'_1 = \delta_8 [1 \ 6 \ 5 \ 5 \ 4 \ 8 \ 8 \ 8],$$

$$L'_2 = \delta_8 [1 \ 4 \ 7 \ 5 \ 5 \ 8 \ 8 \ 8].$$

进而, 根据定义3,  $L_{\sigma(t)}$  所对应的切换-状态转移图即可获得, 如图1所示.

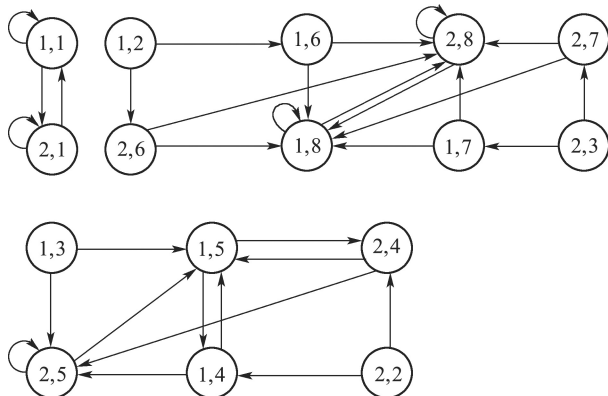


图 1 例 1 中对应  $L'_1$  和  $L'_2$  的切换-状态转移图

Fig. 1 Switching-state transition graph corresponding to  $L'_1$  and  $L'_2$  in Example 1

使用深度搜索算法搜索出图1中所有的环, 根据算

法1中步骤3和步骤4, 求得  $\Phi = \{\delta_8^{1,1}, \delta_8^{1,8}, \delta_8^{2,1}, \delta_8^{2,8}\}$ , 故  $L'_1, L'_2$  转化为

$$L'_1 = \delta_8 [4 \ 6 \ 5 \ 5 \ 4 \ 8 \ 8 \ 5],$$

$$L'_2 = \delta_8 [4 \ 4 \ 7 \ 5 \ 5 \ 8 \ 8 \ 5].$$

对应的切换-状态转移图如图2所示.

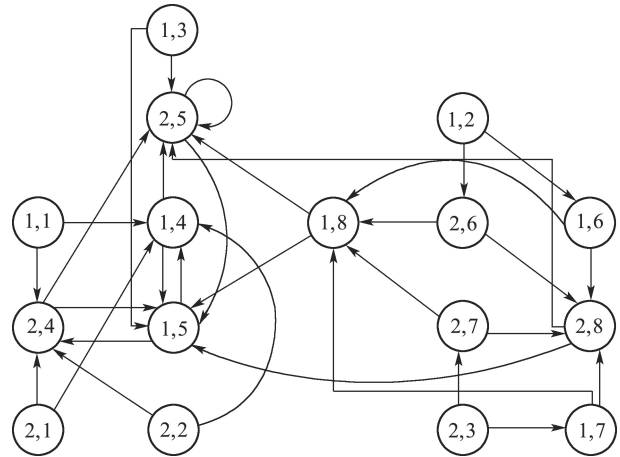


图 2 例 1 中对应  $L'_1$  和  $L'_2$  的切换-状态转移图

Fig. 2 Switching-state transition graph corresponding to  $L'_1$  and  $L'_2$  in Example 1

此时  $\Pi \subseteq \mathcal{O}$ , 故下面对牵制控制器进行设计. 当  $\sigma(t) = 1, L_1$  的第 1 列从  $\delta_8^1$  转化为  $\delta_8^4$ , 即  $M_{1,1}, M_{1,2}, M_{1,3}$  的第 1 列分别从  $\delta_2^1, \delta_2^1, \delta_2^1$  转化为  $\delta_2^2, \delta_2^2, \delta_2^2$ .  $L_1$  的第 4 列从  $\delta_8^6$  转化为  $\delta_8^5$ , 即  $M_{1,1}, M_{1,2}, M_{1,3}$  的第 4 列从  $\delta_2^2, \delta_2^1, \delta_2^2$  转化为  $\delta_2^2, \delta_2^1, \delta_2^1$ .  $L_1$  的第 8 列从  $\delta_8^8$  转化为  $\delta_8^5$ , 也就是说,  $M_{1,1}, M_{1,2}, M_{1,3}$  的第 8 列从  $\delta_2^2, \delta_2^2, \delta_2^2$  转化为  $\delta_2^2, \delta_2^1, \delta_2^1$ . 所以, 只需对节点  $x_2, x_3$  施加牵制控制即可.

首先计算节点  $x_2$  需要施加的牵制控制器, 此时

$$M_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M'_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

将  $M_{1,2}, M'_{1,2}$  代入方程(7)计算得

$$M_{\oplus_{1,2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned} F_1^2(u_{1,2}(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)) &= \\ u_{1,2}(t) &\leftrightarrow f_1^2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \\ u_{1,2}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) &= \\ [x_1(t) \wedge [(\neg x_2(t)) \vee (\neg x_3(t))]] \vee \\ [\neg x_1(t) \wedge (x_2(t) \vee x_3(t))]. \end{aligned}$$

再求节点 $x_3$ 需要施加的牵制控制器,此时

$$M_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M'_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

将 $M_{1,3}, M'_{1,3}$ 代入方程(7)计算得

$$M_{\oplus 1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而有

$$F_1^3(u_{1,3}(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)) =$$

$$u_{1,3}(t) \nabla f_1^3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

$$u_{1,3}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) =$$

$$[x_1(t) \wedge (x_2(t) \leftrightarrow x_3(t))] \vee$$

$$[\neg x_1(t) \wedge [(\neg x_2(t)) \wedge (\neg x_3(t))]].$$

同理,当 $\sigma(t) = 2$ 时,牵制控制设计结果为

$$F_2^2(u_{2,2}(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)) =$$

$$u_{2,2}(t) \leftrightarrow \vee f_2^2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

$$u_{2,2}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) =$$

$$[x_1(t) \wedge (x_2(t) \nabla x_3(t))] \vee$$

$$[\neg x_1(t) \wedge (x_2(t) \vee x_3(t))];$$

$$F_2^3(u_{2,3}(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)) =$$

$$u_{2,3}(t) \nabla f_2^3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

$$u_{2,3}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) =$$

$$[x_1(t) \wedge (x_2(t) \leftrightarrow x_3(t))] \vee$$

$$[\neg x_1(t) \wedge (x_2(t) \leftrightarrow x_3(t))].$$

### 4.2 分布式控制设计

本节考虑设计分布式控制器实现任意切换集合可稳.将系统(6)转化为如下代数形式:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = f_i^k(u_{k,i}(t), x_{N_i^{in}}(t)), i \in \Theta, \\ \vdots \\ x_j(t+1) = f_j^k(x_{N_j^{in}}(t)), j \in \{1, \dots, n\} \setminus \Theta. \end{cases} \quad (8)$$

使用矩阵半张量积方法,系统(8)可以表示为如下

代数形式:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = \widetilde{M}_{\oplus k,i} G_{k,i} (I_{2^{|x_{N_i^{in}}|}} \otimes A_{k,i}) \Phi_{|x_{N_i^{in}}|} \\ u_{k,i}(t) x_{N_i^{in}}(t), i \in \Theta, \\ \vdots \\ x_j(t+1) = A_{k,j} x_{N_j^{in}}(t), j \in \{1, \dots, n\} \setminus \Theta, \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\widetilde{M}_{\oplus k,i} \in \mathcal{L}_{2 \times 4}, G_{k,i} \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|x_{N_i^{in}}|}}, A_{k,i} \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|x_{N_i^{in}}|}}.$$

由于 $x_{N_i^{in}} = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$ 为 $x_i$ 的邻居集,则

$$x_{N_i^{in}}(t) = x_{j_1}(t) x_{j_2}(t) \cdots x_{j_n}(t) =$$

$$(\mathbf{1}_{2^{j_1-1}}^T \otimes I_2) [\times_{i=1}^{n-1} (I_{2^{j_i}} \otimes \mathbf{1}_{2^{j_{i+1}-j_i-1}}^T \otimes I_2)] (I_{2^{j_n}} \otimes \mathbf{1}_{2^{n-j_n-1}}^T) x(t) :=$$

$$\Upsilon_{k,i} x(t),$$

其中

$$\Upsilon_{k,i} = (\mathbf{1}_{2^{j_1-1}}^T \otimes I_2) [\times_{i=1}^{n-1} (I_{2^{j_i}} \otimes \mathbf{1}_{2^{j_{i+1}-j_i-1}}^T \otimes I_2)] (I_{2^{j_n}} \otimes \mathbf{1}_{2^{n-j_n-1}}^T). \quad (10)$$

利用矩阵 $\Upsilon_{k,i}$ ,可根据如下思路对牵制控制器进行分布式设计.

对于

$$u_{k,i}(t) = G_{k,i} x_{N_i^{in}}(t) = G_{k,i} \Upsilon_{k,i} x(t) = \widehat{G}_{k,i} x(t),$$

其中 $\widehat{G}_{k,i}$ 已在命题1中设计出来,求解分布式控制增益矩阵 $G_{k,i}$ 就转化为使用矩阵 $\Upsilon_{k,i}$ 分解矩阵 $\widehat{G}_{k,i}$ .为此,基于下面的算法,我们定义一种矩阵除法.

**注5** 文中所提及的邻居集包含自身及邻居的全部信息.

#### 算法2

**步骤1** 给定两个逻辑矩阵 $A \in \mathcal{L}_{m \times n}$ 和 $C \in \mathcal{L}_{q \times n}$ ,基于文献[46]中的置换矩阵 $P, Q$ ,将矩阵 $A, C$ 转化为如下形式:

$$\widehat{A} = AP = \delta_m [\underbrace{\widehat{a}_1 \cdots \widehat{a}_1}_{s_1} \cdots \underbrace{\widehat{a}_j \cdots \widehat{a}_j}_{s_j} \cdots \underbrace{\widehat{a}_r \cdots \widehat{a}_r}_{s_r}] :=$$

$$\delta_m [\alpha_1 \cdots \alpha_n],$$

$$\widehat{C} = CQ = \delta_q [\underbrace{\widehat{b}_1 \cdots \widehat{b}_1}_{v_1} \cdots \underbrace{\widehat{b}_j \cdots \widehat{b}_j}_{v_j} \cdots \underbrace{\widehat{b}_t \cdots \widehat{b}_t}_{v_t}] :=$$

$$\delta_q [\beta_1 \cdots \beta_n].$$

**步骤2** 构造矩阵 $B = \delta_m [\gamma_1 \cdots \gamma_q]$ ,满足 $\text{Col}_{\beta_j}(B) = \text{Col}_j(A), j = 1, \dots, n$ ;当 $k \in \{1, \dots, 2^n\} \setminus \{\beta_j : j = 1, \dots, n\}$ 时,  $\text{Col}_k(B) \in \Delta_m$ .

**定义4** 给定逻辑矩阵 $A \in \mathcal{L}_{m \times n}, C \in \mathcal{L}_{q \times n}$ ,若存在 $B \in \mathcal{L}_{m \times q}$ 使得 $A = BC$ ,则通过算法2得到矩阵 $B$ 的运算叫做 $A$ 对 $C$ 的矩阵除法.

**注 6** 矩阵除法合法的前提条件与文献[46]中定理4的前提条件相同。

**例 2** 矩阵  $A = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$ , 矩阵  $C = \delta_4[4 \ 4 \ 4 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$ , 则根据算法2和定义4得矩阵  $B = \delta_4[3 \ 4 \ 2 \ 1]$ .

**定理 2** 若矩阵方程  $\widehat{G}_{k,i} = G_{k,i} \Upsilon_{k,i}$  中  $\widehat{G}_{k,i}$  对  $\Upsilon_{k,i}$  的矩阵除法是合法的, 则存在分布式控制器使系统(4)实现任意切换集合可稳。

若矩阵方程  $\widehat{G}_{k,i} = G_{k,i} \Upsilon_{k,i}$  中  $\widehat{G}_{k,i}$  对  $\Upsilon_{k,i}$  的矩阵除法是合法的, 即在  $\widehat{G}_{k,i}, \Upsilon_{k,i}$  已知的情况下,  $G_{k,i}$  可通过算法2得到, 那么分布式控制器可由  $u_{k,i}(t) = G_{k,i} x_{N^{in}}(t)$  给出, 即只需要使用邻居集的信息即可设计出分布式状态反馈控制器。

**例 3** 对例1所得到的控制器进行分布式设计。

根据注6,  $u_{1,2}, u_{2,3}$  满足矩阵除法合法的条件, 故可进行分布式设计。

首先对  $x_{1,2}$  进行分布式控制器设计, 其中

$$\widehat{G}_{1,2} = \widehat{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据算法2,

$$G_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$u_{1,2}(t) = x_1(t) \vee x_2(t).$$

同理, 得  $x_3$  的分布式控制器为

$$u_{2,3}(t) = x_1(t).$$

## 5 结论

本文使用牵制控制的方法解决了切换布尔网络在任意切换下集合可稳的问题。基于代数状态空间方法, 给出了具有牵制控制的切换布尔网络的代数形式。基于该代数形式, 给出了一个通过改变列来使得切换布尔网络任意切换集合可稳的算法, 并根据变化后的状态转移矩阵, 设计出相应的状态反馈牵制控制。此外, 本文使用逻辑矩阵分解的思想解决了切换布尔网络的分布式集合镇定问题。未来的研究可致力于优化本文所提出的分布式牵制控制方法, 并用来解决同步控制, 跟踪控制等问题。

## 参考文献:

[1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology*, 2007,

244(4): 670 – 679.

- [2] ALBERT R, OTHMER H. The topology of the regulatory interactions predicts the expression pattern of the segment polarity genes in *Drosophila melanogaster*. *Journal of Theoretical Biology*, 2003, 223(1): 1 – 18.
- [3] WANG Yuanhua, LIU Xiyu. Dynamics and optimization of control networked evolutionary games with local information. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 279 – 285. (王元华, 刘希玉. 局部信息约束下网络演化博弈的动力学与优化. *控制理论与应用*, 2019, 36(2): 279 – 285.)
- [4] ARNOUT G, DE MAN H J. The use of threshold functions and Boolean-controlled network elements for macromodeling of LSI circuits. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2003, 13(3): 326 – 332.
- [5] WU Y, SHEN T. Policy iteration approach to control residual gas fraction in IC engines under the framework of stochastic logical dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, 25(3): 1100 – 1107.
- [6] LIU Yuna, LI Haitao. Verification and implementation of network fault location rules based on solving logic equations. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(6): 1335 – 1341. (刘玉娜, 李海涛. 基于逻辑方程求解的网络故障定位规则的验证与实现. *控制理论与应用*, 2020, 37(6): 1335 – 1341.)
- [7] LU J, LI B, ZHONG J, et al. A novel synthesis method for reliable feedback shift registers via Boolean networks. *Science China Information Sciences*, 2021, 64(5): 152207.
- [8] CHENG D, QI H, LI Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: a Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011.
- [9] CHENG Daizhan, QI Hongsheng. Algebraic state space approach to logical dynamic systems and its applications. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(12): 1632 – 1639. (程代展, 齐洪胜. 逻辑系统的代数状态空间方法的基础、现状及其应用. *控制理论与应用*, 2014, 31(12): 1632 – 1639.)
- [10] CHENG D, QI H. Controllability and observability of Boolean control networks. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.
- [11] LIANG J, CHEN H, LAM J. An improved criterion for controllability of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(11): 6012 – 6018.
- [12] ZHU Q, GAO Z, LIU Y, et al. Categorization problem on controllability of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(5): 2297 – 2303.
- [13] LI H, WANG S, LI X, et al. Perturbation analysis for controllability of logical control networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, 58(6): 3632 – 3657.
- [14] YANG Y, LIU Y, LOU J, et al. Observability of switched Boolean control networks using algebraic forms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2021, 14(4): 1519 – 1533.
- [15] ZHU S, LU J, LIN L, et al. Minimum-time and minimum-triggering control for the observability of stochastic Boolean networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, DOI: 10.1109/TAC.2021.3069739.
- [16] CHENG D, LI C, HE F. Observability of Boolean networks via set controllability approach. *Systems & Control Letters*, 2018, 115: 22 – 25.
- [17] WANG S, LI H. Graph-based function perturbation analysis for observability of multi-valued logical networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, DOI: 10.1109/TNNLS.2020.3025912.
- [18] CHENG D. Disturbance decoupling of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 2 – 10.
- [19] YU Y, FENG J, PAN J, et al. Block decoupling of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(8): 3129 – 3140.

- [20] MENG M, FENG J. Topological structure and the disturbance decoupling problem of singular Boolean networks. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(13): 1247 – 1255.
- [21] LI H, WANG Y. Output tracking of switched Boolean networks under open-loop/closed-loop switching signals. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2016, 22: 137 – 146.
- [22] ZHONG J, HO D, LU J, et al. Switching-signal-triggered pinning control for output tracking of switched Boolean networks. *IET Control Theory and Applications*, 2017, 11(13): 2089 – 2096.
- [23] LIR, YANG M, CHU T. State feedback stabilization for Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853 – 1857.
- [24] LI H, WANG Y. Lyapunov-based stability and construction of Lyapunov functions for Boolean networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, 55(6): 3437 – 3457.
- [25] LI H, DING, X. A control Lyapunov function approach to feedback stabilization of logical control networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019, 57(2): 810 – 831.
- [26] LIU Y, CAO J, SUN L, et al. Sampled-data state feedback stabilization of Boolean control networks. *Neural Computation*, 2016, 28(4): 778 – 799.
- [27] LU J, SUN L, LIU Y, et al. Stabilization of Boolean control networks under aperiodic sampled-data control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(6): 4385 – 4404.
- [28] LI F. Pinning control design for the stabilization of Boolean networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(7): 1585 – 1590.
- [29] LU J, LIU R, LOU J, et al. Pinning stabilization of Boolean control networks via a minimum number of controllers. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 51(1): 373 – 381.
- [30] LI Y, LI H, SUN W. Event-triggered control for robust set stabilization of logical control networks. *Automatica*, 2018, 95: 556 – 560.
- [31] MENG M, LAM J, FENG J, et al. Stability and stabilization of Boolean networks with stochastic delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(2): 790 – 796.
- [32] IEDA M, FU J D, DELGADO-OLGUIN P, et al. Direct reprogramming of fibroblasts into functional cardiomyocytes by defined factors. *Cell*, 2010, 142(3): 375 – 386.
- [33] LIN G, AO B, CHEN J, et al. Modeling and controlling the two-phase dynamics of the p53 network: a Boolean network approach. *New Journal of Physics*, 2014, 16(12): 125010.
- [34] LU J, ZHONG J, HUANG C, et al. On pinning controllability of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2016, 61(6): 1658 – 1663.
- [35] LI H, WANG Y, LIU Z. Stability analysis for switched Boolean networks under arbitrary switching signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1978 – 1982.
- [36] LASCHOV D, MARGALOT M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory. *Automatica*, 2012, 48(6): 1218 – 1223.
- [37] CHENG Daizhan, GUO Yuqian. Advances on switched systems. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(6): 954 – 960. (程代展, 郭宇骞. 切换系统进展. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 954 – 960.)
- [38] LI H, WANG Y. Controllability analysis and control design for switched Boolean networks with state and input constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2015, 53(5): 2955 – 2979.
- [39] LI Haitao, WANG Yuzhen. Stability analysis for switched singular Boolean networks. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 908 – 914. (李海涛, 王玉振. 切换奇异布尔网络的稳定性分析. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 908 – 914.)
- [40] CHEN H, LIANG J, HUANG T, et al. Synchronization of arbitrarily switched Boolean networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 28(3): 612 – 619.
- [41] LI S, LIN X, TIAN Y. Set stabilization of Chua's circuit via piecewise linear feedbacks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 26(2): 571 – 579.
- [42] GUO Y, WANG P, GUI W, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets. *Automatica*, 2015, 61: 106 – 112.
- [43] CHEN H, LIANG J. Local synchronization of interconnected Boolean networks with stochastic disturbances. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(2): 452 – 463.
- [44] LI H, WANG Y, XIE L. Output tracking control of Boolean control networks via state feedback: constant reference signal case. *Automatica*, 2015, 59: 54 – 59.
- [45] FANG Huan, HE Lulu, FANG Xianwen, et al. A search-tree-based abstraction method for business process Petri nets models. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(1): 92 – 102. (方欢, 何路路, 方贤文, 等. 基于搜索树的业务流程Petri网模型抽象化简方法. 控制理论与应用, 2018, 35(1): 92 – 102.)
- [46] LI H, WANG Y. Logical matrix factorization with application to topological structure analysis of Boolean network. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(5): 1380 – 1385.

#### 作者简介:

蒋梦涵 硕士研究生, 目前研究方向为逻辑动态系统, E-mail: mhj10232021@126.com;

李海涛 教授, 博士生导师, 目前研究方向为网络化系统控制理论, E-mail: haitaoli09@gmail.com.