

# 离散时间部分状态反馈模型参考自适应控制

桑英丽<sup>1</sup>, 张正强<sup>1,2†</sup>

(1. 曲阜师范大学 工学院, 山东 日照 276826;

2. 日照汇联众创智能技术研究院 智能控制实验室, 山东 日照 276826)

**摘要:** 本文针对线性不确定性系统, 给出了部分状态反馈直接模型参考自适应控制设计方案以及详细的系统稳定性、输出跟踪性能分析. 控制器设计基于降维观测器和参数化方法. 此方案采用反馈控制, 反馈信号不仅仅依赖全状态信息或者输出信号, 而是任意不超过系统维数的可测信号. 因此, 部分状态反馈控制是包含状态反馈、输出反馈控制的新的控制方案, 缓解了状态反馈对状态信息的限制, 降低了输出反馈控制结构的复杂性. 通过引入辅助信号, 本文证明了输出匹配条件的存在性、所有闭环系统信号的有界性以及渐近输出跟踪性能. 仿真结果验证了该方案的有效性.

**关键词:** 离散时间; 模型参考自适应控制; 部分状态反馈; 输出跟踪

**引用格式:** 桑英丽, 张正强. 离散时间部分状态反馈模型参考自适应控制. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1874 – 1882

DOI: 10.7641/CTA.2021.10659

## Discrete time partial-state feedback model reference adaptive control

SANG Ying-li<sup>1</sup>, ZHANG Zheng-qiang<sup>1,2†</sup>

(1. School of Engineering, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China;

2. Intelligent Control Laboratory, Rizhao Huilian Zhongchuan Institute of Intelligent Technology, Rizhao Shandong 276826, China)

**Abstract:** A partial-state feedback direct model reference adaptive control is designed for uncertain linear systems. Detailed stability analysis and output tracking performance are presented. The design of the controller is based on the reduced order observer and parameterization method. The novel scheme adopts feedback control. Feedback signals are not only depend on the full state information or the output signals, but also on any measurable signals whose order is no more than system dimension. Thus, partial-state feedback control as a new control scheme includes state feedback control and output feedback control, and reduces more constraints on state information than state feedback control does and decreases complexity of control structure compared to output feedback control. By introducing auxiliary signals, the existence of output matching condition, boundedness of all closed-loop system signals and performance of asymptotic output tracking are proved. The simulation results verify the effectiveness of the proposed scheme.

**Key words:** discrete time; model reference adaptive control; partial-state feedback; output tracking

**Citation:** SANG Yingli, ZHANG Zhengqiang. Discrete time partial-state feedback model reference adaptive control. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1874 – 1882

## 1 引言

模型参考自适应控制 (model reference adaptive control, MRAC) 是自适应控制的重要研究方法之一, 在连续时间系统和离散时间系统都有深入研究<sup>[1-2]</sup>. 模型参考自适应控制的目标是设计自适应律和控制器, 使得被控对象输出渐近跟踪到参考模型输出, 闭环系统所有信号有界.

由于系统状态难以获取, 所以在实践中, 满足一定假设条件下, 大多采用容易获得的输出信号进行输出反馈控制, 控制输入仅与输出信号和参考输入信号有关, 不依赖状态信号. 文献[1]基于观测器设计输出反馈MRAC结构

$$u(t) = \theta_1^T(t)\omega_1(t) + \theta_2^T(t)\omega_2(t) + \theta_3(t)r(t),$$

其中:  $\omega_1 = \alpha_1(z)[u](t)$ ,  $\omega_2 = \alpha_2(z)[y](t)$ ,  $\alpha_1(z) =$

收稿日期: 2021-07-24; 录用日期: 2021-11-11.

†通信作者. E-mail: qufuzzq@126.com; Tel.: +86 63-33980488.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(61873330), 山东省泰山学者青年专家支持计划项目(tsqn20161032), 山东省中央引导地方科技发展资金项目(YDZX20203700001633), 山东省自然科学基金重大基础研究项目(ZR2021ZD13)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873330), the Taishan Scholarship Project of Shandong Province (tsqn20161032), the Central Government Guides Local Funds for Science and Technology Development of Shandong Province (YDZX20203700001633) and the Shandong Provincial Natural Science Foundation (ZR2021ZD13).

$[z^{-n+1} \dots z^{-1}]$ ,  $\alpha_2(z) = [z^{-n+1} \dots z^{-1} \ 1]$ ,  $\theta_i(t)$  是标称控制器参数  $\theta_i^*(i = 1, 2, 3)$  的自适应估计, 并给出详尽的稳定性分析. 文献[3]基于投影算法和最小二乘法分别设计输出反馈输出跟踪控制方案, 并给出详细的系统稳定性和跟踪误差收敛性Lyapunov证明. 但输出反馈控制结构复杂.

相对于输出反馈控制, 状态反馈MRAC方案拥有更简单的控制结构. 文献[4]对离散时间分段线性系统设计出切换自适应控制器, 使闭环系统渐近稳定. 文献[5]针对离散时间不确定性动态系统, 提出了一种新的状态反馈模型参考自适应控制结构, 有效地提高系统瞬态性能, 并运用对数Lyapunov函数证明闭环系统的Lyapunov稳定性以及状态跟踪误差的渐近收敛性. 但状态反馈控制依赖难以得到的全状态信息, 限制了此控制方案的实际应用.

近年, 针对连续时间系统, 提出一种新的部分状态反馈控制方案<sup>[6-8]</sup>. 部分状态反馈控制以可测信号为反馈信号, 巧妙地联系了全状态反馈控制与输出反馈控制, 结合了两种反馈控制的优势, 控制结构简单, 受较少条件的限制, 拓宽了反馈控制的应用前景, 且可以实现闭环系统的稳定性以及对象与参考模型的渐近输出跟踪. 文献[9]提出了新的离散时间模型参考自适应控制方案, 采用部分状态反馈设计新的控制结构, 实现线性不确定性系统的输出跟踪以及所有闭环信号的有界性, 但文章缺乏相关引理、定理的证明.

本文提出部分状态反馈MRAC满足一定的输出匹配条件, 通过引入辅助信号对离散时间部分状态反馈输出跟踪MRAC方案<sup>[9]</sup>作出严谨的输出匹配条件存在性、闭环系统稳定性以及渐近输出跟踪证明, 对不同的反馈方式作出了仿真, 证明离散时间部分状态反馈控制的有效性.

## 2 问题描述

考虑离散时间线性时不变系统

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = cx(t), \quad (1)$$

其中: 矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c^T \in \mathbb{R}^n$ .  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$  分别是系统状态和系统输出,  $u(t) \in \mathbb{R}$  是控制输入. 系统(1)的输入输出描述为

$$y(t) = \frac{k_p Z(z)}{P(z)} [u](t), \quad (2)$$

“ $z$ ”不仅代表前进算子, 还代表  $Z$  变换变量, 令  $G(z) = \frac{k_p Z(z)}{P(z)}$ ,  $G(z)$  是系统传递函数,  $Z(z) = z^m + \dots + z_1 z + z_0$ ,  $P(z) = z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$ ,  $n > m \geq 0$ .

控制目标是设计部分状态反馈控制律使得闭环系统所有信号有界, 对象(1)的输出  $y(t)$  渐近跟踪到参考模型输出  $y_m(t)$ .

参考模型定义为

$$y_m(t) = \frac{1}{P_m(z)} [r](t), \quad (3)$$

其中:  $P_m(z)$  是首项系数为1的稳定多项式(一般取为  $z^{n^*}$ ),  $r(t)$  是有界的参考输入信号.

在状态反馈输出跟踪控制问题中, 作如下假设:

**假设 1**  $Z(z)$  是首项系数为1的稳定多项式.

**假设 2**  $P(z)$  的阶次  $n$  以及系统相对阶已知.

**假设 3** 系统增益  $k_p$  符号已知.

值得注意的是, 输出反馈控制中反馈信号是状态信号的一个线性组合, 也就是说, 输出反馈是一类特殊的状态反馈; 可测信号往往不仅是输出信号, 得到的信息就不会局限于输出信号; 另外, 可测信号的阶次不大于系统阶次  $n$ . 因此可测信号表述为

$$y_0(t) = c_0 x(t), \quad (4)$$

其中:  $c_0 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times n}$ ,  $\text{rank}(c_0) = \bar{n}$  且  $(A, c_0)$  能观测.  $y_0(t)$  亦可表示为  $y_0(t) = G_0(z)[u](t)$ ,  $G_0(z) = \frac{Z_0(z)}{P(z)} = c_0(zI - A)^{-1}b$ . 可测信号  $y_0(t)$  是系统状态信息的线性组合, 也就是说, 反馈信号  $y_0(t)$  不仅仅局限于全状态信息以及输出信号, 还有可能是其他不超过系统维数的向量信号.

## 3 部分状态反馈标称控制设计

### 3.1 状态观测器设计

系统参数已知时, 设计基于部分状态反馈的标称控制方案. 在部分状态反馈控制中, 本文将可测的信号  $y_0(t)$  作为反馈信号进行控制设计, 因此需要对状态信号进行处理. 首先, 增加假设

**假设 4** 向量信号  $y_0(t) = c_0 x(t)$ ,  $y_0(t)$  是可量测信号并且满足  $(A, c_0)$  能观测,  $\text{rank}(c_0) = \bar{n}$ .

对于单输入单输出系统,  $y_0(t)$  是  $\bar{n}$  维信号,  $1 \leq \bar{n} \leq n$ , 且  $y_0(t)$  不一定包含输出信号  $y(t)$  或等于输出信号  $y(t)$ . 其次, 作如下变换:

$$\tilde{x}(t) = Px(t) = [\tilde{x}_1^T(t) \ \tilde{x}_2^T(t)]^T, \quad (5)$$

其中  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是可逆变换矩阵, 满足  $c_0 P^{-1} = [I_{\bar{n}} \ 0 \ \dots \ 0]$ , 因此  $y_0(t) = \tilde{x}_1(t)$ , 且

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t+1) \\ \tilde{x}_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} u(t), \quad (6)$$

$\tilde{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $\tilde{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}$ ,  $\tilde{b}_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $\tilde{b}_2 \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}$ ,  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$ ,  $\tilde{A}_{12} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (n-\bar{n})}$ ,  $\tilde{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}) \times \bar{n}}$ ,  $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}) \times (n-\bar{n})}$ .

因为  $y_0(t) = \tilde{x}_1(t)$ ,  $y_0(t)$  可量测, 所以只需要对

$\tilde{x}_2(t)$ 进行观测器估计, 得到

$$\begin{cases} w(t+1) = (\tilde{A}_{22} - l\tilde{A}_{12})w(t) + ((\tilde{A}_{22} - l\tilde{A}_{12})l + \\ \tilde{A}_{21} - l\tilde{A}_{11})y_0(t) + (\tilde{b}_2 - l\tilde{b}_1)u(t), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $w(t) = \hat{x}_2(t) - ly_0(t)$ , 选择矩阵 $l \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}) \times \bar{n}}$ 使得矩阵 $\tilde{A}_{22} - l\tilde{A}_{12}$ 的特征值在 $Z$ 平面单位圆内. 上式进一步表达为

$$\begin{cases} w(t) = (zI - \tilde{A}_{22} + l\tilde{A}_{12})^{-1}((\tilde{A}_{22} - l\tilde{A}_{12})l + \\ \tilde{A}_{21} - l\tilde{A}_{11})y_0(t) + (zI - \tilde{A}_{22} + l\tilde{A}_{12})^{-1} \times \\ (\tilde{b}_2 - l\tilde{b}_1)u(t) + \varepsilon_0(t) = \\ \frac{\alpha_1(z)}{\Delta(z)}[y_0](t) + \frac{\alpha_2(z)}{\Delta(z)}[u](t) + \varepsilon_0(t), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $I \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}) \times (n-\bar{n})}$ ,  $l \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}) \times \bar{n}}$ 且

$$\varepsilon_0(t) = (\tilde{A}_{22} - l\tilde{A}_{12})^t w(0), \quad (9)$$

$$\alpha_1(z) = \text{adj}(zI - \tilde{A}_{22} + l\tilde{A}_{12})((\tilde{A}_{22} - l\tilde{A}_{12})l + \tilde{A}_{21} - l\tilde{A}_{11}), \quad (10)$$

$$\alpha_2(z) = \text{adj}(zI - \tilde{A}_{22} + l\tilde{A}_{12})(\tilde{b}_2 - l\tilde{b}_1), \quad (11)$$

$$\Delta(z) = \det(zI - \tilde{A}_{22} + l\tilde{A}_{12}), \quad (12)$$

$\alpha_1(z) \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}) \times \bar{n}}$ 是阶次不大于 $n - \bar{n} - 1$ 的多项式矩阵,  $\alpha_2(z) \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}$ 是阶次不大于 $n - \bar{n} - 1$ 的多项式向量. 选择矩阵 $l$ 使得 $\Delta(z)$ 是 $n - \bar{n}$ 次稳定多项式,  $\varepsilon_0(t)$ 是指数衰减项.

### 3.2 部分状态反馈控制器结构设计

由上节可知, 在降维观测器下有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) - \hat{x}(t) = 0$ , 经过变换 $\tilde{x} = Px$ 可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}(t) = 0$ . 基于状态观测器的控制结构为

$$u(t) = k_1^{*T} \hat{x}(t) + k_2^* r(t), \quad (13)$$

其中:  $\hat{x}(t)$ 是状态观测估计,  $r(t)$ 是外部输入信号. 将以上控制器结构通过观测器(8)转换为期望的形式. 首先, 由式(8)得到

$$\hat{x}_2(t) = \frac{\alpha_1}{\Delta}[y_0](t) + \frac{\alpha_2}{\Delta}[u](t) + ly_0(t) + \varepsilon_0(t). \quad (14)$$

其次

$$\begin{aligned} k_1^{*T} \hat{x}(t) &= k_1^{*T} P^{-1} \hat{x}(t) = \\ k_{p2}^{*T} \frac{\alpha_1(z)}{\Delta(z)}[y_0](t) &+ k_{p2}^{*T} \frac{\alpha_2(z)}{\Delta(z)}[u](t) + \\ (k_{p1}^{*T} + k_{p2}^{*T} l)y_0(t) &+ k_{p2}^{*T} \varepsilon_0(t). \end{aligned} \quad (15)$$

对式(15)参数化

$$\begin{aligned} k_1^{*T} \hat{x}(t) &= \phi_1^{*T} \frac{\nu_1(z)}{\Delta(z)}[u](t) + \phi_2^{*T} \frac{\nu_2(z)}{\Delta(z)}[y_0](t) + \\ &\phi_3^{*T} y_0(t) + k_{p2}^{*T} \varepsilon_0(t), \end{aligned} \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} k_{p1}^{*T} P^{-1} &= [k_{p1}^{*T} \quad k_{p2}^{*T}], \quad k_{p1}^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad k_{p2}^* \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}, \\ k_{p2}^{*T} \alpha_2(z) &= \phi_1^{*T} \nu_1(z), \quad \phi_1^* \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}, \\ \nu_1(z) &= [1 \quad z \quad \cdots \quad z^{n-\bar{n}-1}]^T, \quad k_{p2}^{*T} \alpha_1(z) = \phi_2^{*T} \nu_2(z), \\ \nu_2(z) &= [I_{\bar{n}} \quad zI_{\bar{n}} \quad \cdots \quad z^{n-\bar{n}-1} I_{\bar{n}}]^T, \quad \phi_2^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}(n-\bar{n})}, \\ \phi_3^{*T} &= k_{p1}^{*T} + k_{p2}^{*T} l, \quad \phi_3^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}. \end{aligned}$$

代入式(13)得到部分状态反馈控制器结构

$$\begin{aligned} u(t) &= \phi_1^{*T} \frac{\nu_1(z)}{\Delta(z)}[u](t) + \phi_2^{*T} \frac{\nu_2(z)}{\Delta(z)}[y_0](t) + \\ &\phi_3^{*T} y_0(t) + \phi_4^* r(t) + k_{p2}^{*T} \varepsilon_0(t). \end{aligned} \quad (17)$$

令 $\phi_4^* = k_2^*$ , 选取矩阵 $l$ 使得 $\tilde{A}_{22} - l\tilde{A}_{12}$ 渐近稳定或满足极点配置, 即其特征值在 $Z$ 平面单位圆内. 忽略上式中的衰减项, 得到标称系统部分状态反馈控制结构

$$\begin{aligned} u(t) &= \phi_1^{*T} \omega_1(t) + \phi_2^{*T} \omega_2(t) + \\ &\phi_3^{*T} y_0(t) + \phi_4^* r(t), \end{aligned} \quad (18)$$

其中:  $\omega_1(t) = \frac{\nu_1(z)}{\Delta(z)}[u](t)$ ,  $\omega_2(t) = \frac{\nu_2(z)}{\Delta(z)}[y_0](t)$ .

### 3.3 部分状态反馈控制的输出匹配问题

**引理 1** 存在常参数 $\phi_1^* \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}$ ,  $\phi_2^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}(n-\bar{n})}$ ,  $\phi_3^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $\phi_4^* \in \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{aligned} \phi_1^{*T} \nu_1(z)P(z) &+ (\phi_2^{*T} \nu_2(z) + \phi_3^{*T} \Delta(z))Z_0(z) = \\ \Delta(z)P - k_p \phi_4^* \Delta(z)P_m(z)Z(z). \end{aligned} \quad (19)$$

**证** 假设多项式 $Z_0(z)$ 的阶次为 $(m_0 \ m_0 \ \cdots \ m_0)^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ , 选择前馈增益 $\phi_4^* = k_p^{-1}$ . 定义以下多项式向量以及矩阵:

$$\begin{aligned} B(z) &= \Delta(z)P(z) - k_p \phi_4^* \Delta(z)P_m(z)Z(z) = \\ &\beta_{2n-\bar{n}-1} z^{2n-\bar{n}-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\beta = [\beta_{2n-\bar{n}-1} \quad \cdots \quad \beta_1 \quad \beta_0]^T \in \mathbb{R}^{2n-\bar{n}}, \quad (21)$$

$$\Delta = z^{n-\bar{n}} + \lambda_{n-\bar{n}-1} z^{n-\bar{n}-1} + \cdots + \lambda_0, \quad (22)$$

$$Z_0 = [Z_1 \quad Z_2 \quad \cdots \quad Z_{\bar{n}}]^T, \quad (23)$$

$$Z_i = \mu_{m_0}^i z^{m_0} + \mu_{m_0-1}^i z^{m_0-1} + \cdots + \mu_0^i, \quad (24)$$

$$\phi_1^* = [\phi_{1n-\bar{n}-1}^* \quad \cdots \quad \phi_{11}^* \quad \phi_{10}^*]^T \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}, \quad (25)$$

$$\phi_2^* = [\phi_{2\bar{n}(n-\bar{n})-1}^* \quad \cdots \quad \phi_{21}^* \quad \phi_{20}^*]^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}(n-\bar{n})}, \quad (26)$$

$$\phi_3^* = [\phi_{3\bar{n}-1}^* \quad \cdots \quad \phi_{31}^* \quad \phi_{30}^*]^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad (27)$$

$$\phi_4^* = [\phi_1^{*T} \quad \phi_2^{*T} \quad \phi_3^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{n+\bar{n}(n-\bar{n})}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} w^i &= [\mu_{m_0}^i \quad \mu_{m_0-1}^i + \lambda_{n-\bar{n}-1} \mu_{m_0}^i \quad \cdots \quad \mu_{m_0-j+1}^i + \\ &\lambda_{n-\bar{n}-1} \mu_{m_0-j+2}^i + \cdots + \lambda_{n-\bar{n}-j+1} \mu_{m_0}^i \quad \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{k-1}\mu_0^i + \lambda_{k-2}\mu_1^i + \cdots + \lambda_0\mu_{k-1}^i \cdots \\ & \lambda_1\mu_0^i + \lambda_0\mu_1^i \quad \lambda_0\mu_0^i]^T \in \mathbb{R}^{n+m-\bar{n}+1}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$p = [1 \quad p_{n-1} \quad p_{n-2} \quad \cdots \quad p_1 \quad p_0]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (30)$$

$$q = \begin{pmatrix} \mu_{m_0}^1 & \mu_{m_0}^2 & \cdots & \mu_{m_0}^{\bar{n}} \\ \mu_{m_0-1}^1 & \mu_{m_0-1}^2 & \cdots & \mu_{m_0-1}^{\bar{n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_0^1 & \mu_0^2 & \cdots & \mu_0^{\bar{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_0+1) \times \bar{n}}, \quad (31)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n-\bar{n}) \times (n-\bar{n})}, \quad (32)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n-\bar{n}) \times \bar{n}(n-\bar{n})}, \quad (33)$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ w^1 & w^2 & \cdots & w^{\bar{n}-1} & w^{\bar{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n-\bar{n}) \times \bar{n}}, \quad (34)$$

$$S = [S_1 \quad S_2 \quad S_3] \in \mathbb{R}^{(2n-\bar{n}) \times (n+\bar{n}(n-\bar{n}))}. \quad (35)$$

由以上定义的向量以及矩阵, 得到方程

$$S\phi^* = \beta. \quad (36)$$

因此, 参数 $\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*$ 的存在性等价于式(36)解的存在性. 若 $P(z)$ 与 $Z(z), Z_i(z)$ 互质,  $\text{rank}(S) = 2n - \bar{n}$ , 式(36)有解. 当且仅当 $n = \bar{n}$ 时矩阵 $S$ 非奇异, 方程有唯一解, 即有唯一的参数 $\phi^*$ 满足式(19); 若 $P(z)$ 与 $Z(z), Z_i(z)$ 不互质, 存在 $n_c$ 阶多项式 $Q(z)$ 满足 $P(z) = \bar{P}(z)Q(z), Z(z) = \bar{Z}(z)Q(z)$ 和 $Z_i(z) = \bar{Z}_i(z)Q(z)$ , 且得到类似于式(36)的方程

$$\bar{S}\bar{\phi}^* = \bar{\beta}, \quad (37)$$

$\bar{S} \in \mathbb{R}^{(2n-\bar{n}-n_c) \times (n+\bar{n}(n-\bar{n}))}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}^{2n-\bar{n}-n_c}$ . 由 $\bar{P}(z)$ 与 $\bar{Z}(z), \bar{Z}_i(z)$ 互质, 式(37)有解, 但解不唯一, 得证.

证毕.

**注 1** 若多项式 $Z_0(z)$ 的阶为 $(m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_{\bar{n}})^T, m_i \neq m_j, i \neq j (i, j = 1, 2, \cdots, \bar{n})$ , 仍能得到与引理1相同的结论.

由于带有参数 $\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*$ 和 $\phi_4^*$ 的控制输入使得闭环系统的控制输出 $y(t)$ 可以匹配到参考模型输出 $y_m(t)$ , 所以参数 $\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*$ 和 $\phi_4^*$ 被称为是匹配参数. 利用引理1, 有以下结果.

**定理 1** 在假设1、假设2和假设4下, 存在控制

器参数 $\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*, \phi_4^* = 1/k_p$ 使得基于观测器的部分状态反馈控制器(18)保证所有闭环信号的有界性, 实现对象与参考模型(3)的输出匹配:  $y(t) - y_m(t) = \delta(t)$ ,  $\delta(t)$ 是与初始条件相关的指数衰减项.

**证** 首先, 在方程式(19)等式两端作用 $y(t)$ , 有

$$\begin{aligned} & \Delta(z)P(z)[y](t) = \\ & k_p\phi_4^*\Delta(z)P_m(z)Z(z) + (\phi_1^{*T}\nu_1(z)P(z) + \\ & \phi_2^{*T}\nu_2(z)Z_0(z) + \phi_3^{*T}\Delta(z)Z_0(z))[y](t), \end{aligned} \quad (38)$$

代入对象的输入输出描述(2)有

$$\begin{aligned} & k_p\Delta(z)Z(z)[u](t) = \\ & k_p\phi_1^{*T}\nu_1(z)Z(z)[u](t) + \phi_2^{*T}\nu_2(z)Z_0(z)[y](t) + \\ & \phi_3^{*T}\Delta(z)Z_0(z)[y](t) + k_p\phi_4^*\Delta(z)P_m(z)Z(z)[y](t), \end{aligned} \quad (39)$$

$\Delta(z)$ 和 $Z(z)$ 是稳定多项式,  $y_0(t) = \frac{Z_0(z)}{P(z)}[u](t)$ , 因此

$$\begin{aligned} u(t) = & \phi_1^{*T} \frac{\nu_1(z)}{\Delta(z)}[u](t) + \phi_2^{*T} \frac{\nu_2(z)}{\Delta(z)}[y_0](t) + \\ & \phi_3^{*T}[y_0](t) + \phi_4^*P_m(z)[y](t) + \delta_1(t), \end{aligned} \quad (40)$$

$\delta_1(t)$ 是衰减项. 将式(40)代入标称控制器(18)得到

$$\phi_4^*P_m(z)[y - y_m](t) + \delta_1(t) = 0. \quad (41)$$

其次, 证明闭环系统所有信号的有界性. 由参考模型(3),  $P_m(z)$ 以及参考输入信号 $r(t)$ 的有界性知 $y_m(t + n^*)$ 有界. 再由 $y_m(t + n^*)$ 与 $y(t + n^*)$ 的匹配性知 $y(t + n^*)$ 有界,  $y(t) \in L^\infty$ . 由 $y_0(t) = \frac{Z_0(z)}{P(z)}[u](t)$ , 得到 $y_0(t)$ 与 $y(t)$ 有如下关系:

$$y_0(t) = \frac{Z_0(z)}{k_p Z(z)}[y](t) = \frac{Z_0(z)}{k_p Z(z)P_m(z)}P_m(z)[y](t). \quad (42)$$

因为 $Z(z), P_m(z)$ 是稳定多项式, 所以 $y_0(t)$ 有界. 又因为存在矩阵 $l$ 使得多项式 $\Delta(z)$ 稳定, 所以 $\omega_2(t)$ 有界. 对象输入输出描述可以转化为

$$u(t) = \frac{P(z)}{k_p Z(z)P_m(z)}P_m(z)[y](t). \quad (43)$$

同理, 可以得到 $u(t)$ 有界,  $\omega_1(t)$ 有界. 综上所述, 控制器(18)可以实现输出匹配并且保证闭环系统所有信号的有界性, 得证. 证毕.

#### 4 部分状态反馈模型参考自适应控制设计

如果系统参数矩阵 $(A, b, c)$ 未知, 那么基于 $(A, b, c)$ 设计的标称控制器参数 $\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*, \phi_4^*$ 难以得到, 标称部分状态反馈模型参考控制不适用于不确定性系统. 本节利用可测信号 $y_0(t)$ 设计离散时间部分状态反馈模型参考自适应控制处理系统参数的不确定性.

### 4.1 自适应控制设计

采用直接自适应方法, 通过估计标称控制器参数来处理系统的不确定性, 得到以下自适应控制结构

$$u(t) = \phi_1(t)^T \omega_1(t) + \phi_2^T(t) \omega_2(t) + \phi_3^T(t) y_0(t) + \phi_4(t) r(t), \quad (44)$$

其中:  $\phi_1(t) \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}$ ,  $\phi_2(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}(n-\bar{n})}$ ,  $\phi_3(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $\phi_4(t) \in \mathbb{R}$  分别是标称控制器参数  $\phi_1^*$ ,  $\phi_2^*$ ,  $\phi_3^*$ ,  $\phi_4^*$  的自适应估计,  $\omega_1(t) = \frac{\nu_1(z)}{\Delta(z)} [u](t)$ ,  $\omega_2(t) = \frac{\nu_2(z)}{\Delta(z)} [y_0](t)$ ,  $\nu_1(z) = [1 \ z \ \dots \ z^{n-\bar{n}-1}]^T$ ,  $\nu_2(z) = [I_{\bar{n}} \ z I_{\bar{n}} \ \dots \ z^{n-\bar{n}-1} I_{\bar{n}}]^T$ ,  $\Delta(z)$  是  $n - \bar{n}$  次首项系数为1的稳定多项式.

设计自适应律之前, 首先确定系统的跟踪误差. 定义  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ , 式(40)与式(44)作差, 同时忽略衰减项得到

$$e(t) = k_p \frac{\tilde{\phi}^T \omega(t)}{P_m(z)}, \quad (45)$$

其中:  $\tilde{\phi} = \phi(t) - \phi^* = [\tilde{\phi}_1^T \ \tilde{\phi}_2^T \ \tilde{\phi}_3^T \ \tilde{\phi}_4^T]^T$ ,  $P_m(z) = z^{n^*}$ ,  $\omega(t) = [\omega_1^T(t) \ \omega_2^T(t) \ y_0^T(t) \ r(t)]^T$ . 其次, 定义估计误差

$$\tau(t) = e(t) + \varrho(t) \xi(t), \quad (46)$$

$\phi(t)$  与  $\varrho(t)$  分别是  $\phi^*$  与  $k_p$  的估计,

$$\xi(t) = \phi^T(t) \varsigma(t) - \phi^T(t - n^*) \varsigma(t), \quad (47)$$

$$\varsigma(t) = \omega(t - n^*). \quad (48)$$

将式(45)(47)和式(48)代入式(46)得

$$\tau(t) = k_p \tilde{\phi}^T(t) \varsigma(t) + \tilde{\varrho}(t) \xi(t). \quad (49)$$

通过梯度法设计自适应律为

$$\phi(t+1) - \phi(t) = -\text{sgn}(k_p) \frac{\tau(t)}{\kappa^2(t)} \Gamma \varsigma(t), \quad (50)$$

$$\varrho(t+1) - \varrho(t) = -\frac{\tau(t)}{\kappa^2(t)} \gamma \xi(t), \quad (51)$$

其中  $\kappa(t) = \sqrt{1 + \varsigma^T(t) \varsigma(t) + \xi^2(t)}$ , 自适应增益  $\Gamma \in \mathbb{R}^{(n+\bar{n}(n-\bar{n})+1) \times (n+\bar{n}(n-\bar{n})+1)}$ ,  $0 < \gamma < 2$ ,  $0 < \Gamma = \Gamma^T < 2I$ .

### 4.2 稳定性分析

上节设计的自适应更新律有以下性质.

**引理 2** 自适应律(50)–(51)保证了

1)  $\phi(t) \in L^\infty$ ,  $\varrho(t) \in L^\infty$ ,  $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \in L^\infty \cap L^2$ ;

2)  $\phi(t+i) - \phi(t) \in L^\infty \cap L^2$ ,  $\varrho(t+i) - \varrho(t) \in L^\infty \cap L^2$ .

**证** 选取Lyapunov函数  $V = \gamma^{-1} \tilde{\varrho}^2(t) + |k_p| \tilde{\phi}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\phi}(t)$ , 那么有

$$V(t+1) - V(t) \leq -\alpha_1 \frac{\tau^2(t)}{\kappa^2(t)}, \quad (52)$$

其中:  $0 < \Gamma = \Gamma^T < 2I$ ,  $0 < \gamma < 2$ ,  $\alpha_1 > 0$  是常量. 因此,  $V(t+1) < V(t)$ , 即  $V(t)$  有界, 故  $\phi(t) \in L^\infty$ ,  $\varrho(t) \in L^\infty$  且  $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \in L^2$ . 由式(49)知

$$\left| \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \right| \leq |\tilde{\varrho}(t)| + \left| \frac{\varrho^* \tilde{\phi}^T(t) \varsigma(t)}{\sqrt{1 + \varsigma^T(t) \varsigma(t) + \xi^2(t)}} \right|. \quad (53)$$

因此  $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \in L^\infty$ .

$$\|\phi(t+1) - \phi(t)\|_2^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau^2}{\kappa^2} \left( \frac{\varsigma^T \Gamma^2 \varsigma}{1 + \varsigma^T \varsigma + \xi^2} \right), \quad (54)$$

$$\|\phi(t+i) - \phi(t)\|_2 =$$

$$\|\phi(t+i) - \phi(t+i-1) + \dots +$$

$$\phi(t+1) - \phi(t)\|_2 \leq$$

$$\sum_{j=0}^{i-1} \|\phi(t+j+1) - \phi(t+j)\|_2 < \infty. \quad (55)$$

因此  $\phi(t+1) - \phi(t) \in L^2$ ,  $\phi(t+i) - \phi(t) \in L^2 \cap L^\infty$ . 同理可得  $\varrho(t+i) - \varrho(t) \in L^2 \cap L^\infty$ , 得证.

证毕.

**定理 2** 在假设条件以及自适应更新律(50)(51)下, 控制器(44)保证所有闭环信号的有界性以及系统跟踪误差满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

**证** 首先, 由匹配条件(19)可知

$$u(t) = \phi_1^{*T} \frac{\nu_1(z)}{\Delta(z)} [u](t) + \phi_2^{*T} \frac{\nu_2(z)}{\Delta(z)} [y_0](t) + \phi_3^{*T} [y_0](t) + \phi_4^* P_m(z) [y](t) + \delta_1(t), \quad (56)$$

$\delta_1(t)$  是衰减项, 可以忽略. 其次, 选取  $\Delta(z) = z^{n-\bar{n}}$ , 定义  $Z_0$  中  $Z_i$  阶次为  $(m_0, m_0, \dots, m_0)$ ,

$$\bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \frac{z^{-\bar{n}+1}}{\Delta(z)} u(t) & \dots & \frac{z^{-1}}{\Delta(z)} u(t) & \omega_1^T(t) \\ \frac{z^{-\bar{n}+1}}{\Delta(z)} y_0^T(t) & \dots & \frac{z^{-1}}{\Delta(z)} y_0^T(t) & \omega_2^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n\bar{n}+n-1}. \quad (57)$$

$\bar{\omega}(t+1)$  表述如下:

$$\bar{\omega}(t+1) = A^* \bar{\omega}(t) + b^* y(t+n^*), \quad (58)$$

其中:  $A^* \in \mathbb{R}^{(n\bar{n}+n-1) \times (n\bar{n}+n-1)}$ ,  $P_m = z^{n^*}$  且

$$b^* = [b_1^{*T} \ b_2^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{n\bar{n}+n-1},$$

$$b_1^* = [0 \ \dots \ 0 \ \phi_4^{*T} \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{(1+\bar{n})(n-1)}, \quad (59)$$

$$\bar{\phi}_1^* = [0 \ \dots \ 0 \ \phi_1^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\bar{\phi}_2^* = [0 \ \dots \ 0 \ \phi_2^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}(n-1)}, \quad (60)$$

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{i \times (i+1)}, \quad (61)$$

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & I_{\bar{n}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_{\bar{n}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{\bar{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}i \times \bar{n}(i+1)}, \quad (62)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} E_{n-2} & 0 & 0 \\ \bar{\phi}_1^{*\text{T}} & \bar{\phi}_2^{*\text{T}} & \bar{\phi}_3^{*\text{T}} \\ 0 & F_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\bar{n}} \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

下面对  $L_i, b_2^{*\text{T}}$  进行讨论.

- 当  $\bar{n} = 1$  且  $n = m_0 + 1$  时

$$L_1^{\text{T}} = [\mu_0^1 \ \dots \ \mu_{m_0-1}^1]^{\text{T}} + \mu_{m_0}^1 \bar{\phi}_1^{*\text{T}}, \quad (64)$$

$$L_2^{\text{T}} = \mu_{m_0}^1 \bar{\phi}_2^{*\text{T}} - [p_0 \ \dots \ p_{n-2}]^{\text{T}}, \quad (65)$$

$$L_3 = \mu_{m_0}^1 \phi_3^* - p_{n-1}, \quad (66)$$

$$b_2^* = \mu_{m_0}^1 \phi_4^*. \quad (67)$$

其中:  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n-1}, L_3, b_2^* \in \mathbb{R}$ .

- 当  $\bar{n} = 1$  且  $n > m_0 + 1$  时

$$L_1 = [\mu_0^1 \ \mu_1^1 \ \dots \ \mu_{m_0}^1 \ 0], \quad (68)$$

$$L_2 = [p_0 \ p_1 \ \dots \ p_{n-2}], \quad (69)$$

$$L_3 = -p_{n-1}, \quad (70)$$

$$b_2^* = 0. \quad (71)$$

其中:  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n-1}, L_3, b_2^* \in \mathbb{R}$ .

- 当  $1 < \bar{n} < n$  且  $n = m_0 + 1$  时

$$L_1 = \begin{pmatrix} \mu_0^1 & \mu_1^1 & \dots & \mu_{m_0-1}^1 \\ \mu_0^2 & \mu_1^2 & \dots & \mu_{m_0-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_0^{\bar{n}} & \mu_1^{\bar{n}} & \dots & \mu_{m_0-1}^{\bar{n}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{m_0}^1 \\ \mu_{m_0}^2 \\ \vdots \\ \mu_{m_0}^{\bar{n}} \end{bmatrix} \bar{\phi}_1^{*\text{T}}, \quad (72)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \mu_{m_0}^1 \\ \mu_{m_0}^2 \\ \vdots \\ \mu_{m_0}^{\bar{n}} \end{bmatrix} \bar{\phi}_2^{*\text{T}} - \begin{bmatrix} p_0 I_{\bar{n}} \\ p_1 I_{\bar{n}} \\ \vdots \\ p_{n-2} I_{\bar{n}} \end{bmatrix}^{\text{T}}, \quad (73)$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} \mu_{m_0}^1 \\ \mu_{m_0}^2 \\ \vdots \\ \mu_{m_0}^{\bar{n}} \end{bmatrix} \bar{\phi}_3^{*\text{T}} - p_{n-1} I_{\bar{n}}, \quad (74)$$

$$b_2^* = \begin{bmatrix} \mu_{m_0}^1 \\ \mu_{m_0}^2 \\ \vdots \\ \mu_{m_0}^{\bar{n}} \end{bmatrix} \phi_4^*. \quad (75)$$

其中:  $L_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (n-1)}, L_2 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}(n-1)}, L_3 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}, b_2^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ .

- 当  $1 < \bar{n} < n$  且  $n > m_0 + 1$  时

$$L_1 = \begin{pmatrix} \mu_0^1 & \mu_1^1 & \dots & \mu_{m_0}^1 & 0 \\ \mu_0^2 & \mu_1^2 & \dots & \mu_{m_0}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_0^{\bar{n}} & \mu_1^{\bar{n}} & \dots & \mu_{m_0}^{\bar{n}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (76)$$

$$L_2 = [p_0 I_{\bar{n}} \ p_1 I_{\bar{n}} \ \dots \ p_{n-2} I_{\bar{n}}], \quad (77)$$

$$L_3 = -p_{n-1} I_{\bar{n}}, \quad (78)$$

$$b_2^* = 0. \quad (79)$$

其中:  $L_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (n-1)}, L_2 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}(n-1)}, L_3 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}, b_2^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ .

**注 2**  $Z_0$  中  $Z_i$  阶次与  $(A, b, c_0)$  有关.  $Z_i$  阶次不同的情况下亦可以得到以上相似的结果.

最后, 证明系统的稳定性能以及跟踪性能. 由式 (58) 得到

$$\bar{\omega}(t) = (zI - A^*)^{-1} b^* y(t + n^*). \quad (80)$$

选取  $c^* = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times (n\bar{n} + n - 1)}$ , 有

$$c^* \bar{\omega}(t) = \frac{1}{\Delta(z)} [u](t). \quad (81)$$

结合式 (2), 可以得到以下方程:

$$P(z)[u](t) = k_p c^* (zI - A^*)^{-1} b^* z^{n^*} Z(z) \Delta(z) [u](t), \quad (82)$$

$\Delta(z)$  和  $Z(z)$  均为稳定多项式且  $\det(zI - A^*) = z^{n^*} \cdot Z(z) \Delta(z)$ , 所以  $A^*$  的特征值在单位圆内, 即  $\|A^*\| < 1$ .

引入辅助信号

$$x_s(t) = \left| \frac{\tau(t + n^*)}{\kappa(t + n^*)} \right| + \|\bar{\phi}(t + n^*) - \bar{\phi}(t)\|_2, \quad (83)$$

$\bar{\phi}(t) = [0 \ \dots \ 0 \ \phi_1^{\text{T}}(t) \ 0 \ \dots \ 0 \ \phi_2^{\text{T}}(t) \ \phi_3^{\text{T}}(t)]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^{n\bar{n} + n - 1}$ , 且

$$\sum_{t=0}^{\infty} |x_s(t)|^2 \leq \sum_{t=0}^{\infty} 2 \left( \left| \frac{\tau(t + n^*)}{\kappa(t + n^*)} \right|^2 + \|\bar{\phi}(t + n^*) - \bar{\phi}(t)\|_2^2 \right). \quad (84)$$

由引理 2 的结论  $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \in L^\infty \cap L^2, \phi(t+i) - \phi(t) \in L^\infty \cap L^2$  可知  $x_s(t) \in L^2$  且

$$|\kappa(t + n^*)| \leq 1 + \|\bar{\omega}(t)\| + |\xi(t + n^*)| +$$

$$|r(t)|, \tag{85}$$

$$|\xi(t+n^*)| \leq \|(\bar{\phi}^T(t+n^*) - \bar{\phi}^T(t))\bar{\omega}(t)\| + \|(\phi_4(t+n^*) - \phi_4(t))r(t)\|, \tag{86}$$

$$\bar{\omega}(t+1) = A^*\bar{\omega}(t) + b^*(y_m(t+n^*) + \tau(t+n^*) - \varrho(t+n^*)(\phi(t+n^*) - \phi(t))^T\omega(t)). \tag{87}$$

因此有

$$\|\bar{\omega}(t+1)\| \leq (c_0 + c_1x_s(t))\|\bar{\omega}(t)\| + c_2, \tag{88}$$

其中:

$$\|A^*\| \leq c_0, c_0 \in (0, 1), \tag{89}$$

$$c_1 = \max\{\|b^*\|, \|b^*\varrho(t+n^*)\| + \|b^*\| \cdot \frac{\tau(t+n^*)}{\kappa(t+n^*)}\}, \tag{90}$$

$$|r(t)| \cdot \{\|b^*\| \cdot \frac{\tau(t+n^*)}{\kappa(t+n^*)}\} (1 + \|\phi_4(t+n^*) - \phi_4(t)\|) + \|b^*\| \|\varrho(t+n^*)\phi_4(t+n^*) - \phi_4(t)\| + \|b^*\| \cdot \frac{\tau(t+n^*)}{\kappa(t+n^*)} + \|b^*y_m(t+n^*)\| \leq c_2. \tag{91}$$

$c_0, c_1, c_2$ 为常量,  $r(t)$ 是有界的参考输入. 另外辅助信号  $x_s(t)$ 满足

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+j-1} x_s(t) = x_s(t_0) + \dots + x_s(t_0 + j - 1) \leq \sqrt{j \sum_{t=t_0}^{t_0+j-1} x_s^2(t)}. \tag{92}$$

$x_s(t) \in L^2$ 即  $\sum_{t=0}^{\infty} |x_s(t)|^2 = \|x_s(t)\|_2^2 < c_3^2, c_3$ 为正常量, 因此

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+j-1} x_s(t) \leq c_3\sqrt{j}, \tag{93}$$

对任意  $j \geq 1$ 成立.

$$\prod_{t=t_0}^{t_0+j-1} (c_0 + c_1x_s(t)) \leq (c_0 + \frac{c_1c_3}{\sqrt{j}})^j. \tag{94}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{t=t_0}^{t_0+j-1} (c_0 + c_1x_s(t)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (c_0 + \frac{c_4}{\sqrt{j}})^j, \tag{95}$$

其中  $c_4 = c_1c_3$ , 令  $u_j = (c_0 + \frac{c_4}{\sqrt{j}})^j$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{u_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} c_0 + \frac{c_1c_3}{\sqrt{j}} = c_0 < 1, \tag{96}$$

因此级数  $\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{t=t_0}^{t_0+j-1} (c_0 + c_1x_s(t))$ 收敛. 结合式(88), 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\bar{\omega}(t_0 + j)\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} [c_2 + c_2 \sum_{k=1}^{j-1} \prod_{i=1}^k (c_0 + c_1x_s(t_0 + j - i))] +$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{t=t_0}^{t_0+j-1} (c_0 + c_1x_s(t))\|\bar{\omega}(t_0)\|. \tag{97}$$

由式(95)–(96)得到  $\bar{\omega}(t) \in L^\infty \cap L^2$ . 所以信号  $\omega(t) = [\omega_1^T(t) \ \omega_2^T(t) \ y_0^T(t) \ r(t)]^T \in L^\infty$ , 由自适应控制器(44)以及引理2的结论  $\phi(t) \in L^\infty$ 可知  $u(t) \in L^\infty$ . 由式(47)知  $\xi(t) \in L^\infty$ , 由式(49)知  $\tau(t) \in L^\infty$ , 由式(46)得到  $e(t) \in L^\infty$ 即  $y(t) \in L^\infty$ , 所有闭环信号有界. 因为

$$\sum_{t=0}^{\infty} \tau^2(t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\tau^2(t)}{\kappa^2(t)} (1 + \|\varsigma\| + |\xi(t)|)^2, \tag{98}$$

所以  $\tau(t) \in L^2$ , 以及  $\phi(t+i) - \phi(t) \in L^2$ , 可以得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t+i) - \phi(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ . 最终经式(46)得  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , 得证. 证毕.

### 5 仿真

考虑飞行器线性化动态模型系统如下:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t), \tag{99}$$

其中  $x(t) = [U_b \ W_b \ Q_b \ \theta]^T$ .  $U_b/(\text{ft} \cdot \text{s}^{-1})$ 是前进速度,  $W_b/(\text{ft} \cdot \text{s}^{-1})$ 是垂直速度,  $Q_b/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$ 是俯仰角速率,  $\theta/\text{rad}$ 是欧拉俯仰角, 控制输入  $u/(\text{°})$ 代表升降舵的姿态.

$A =$

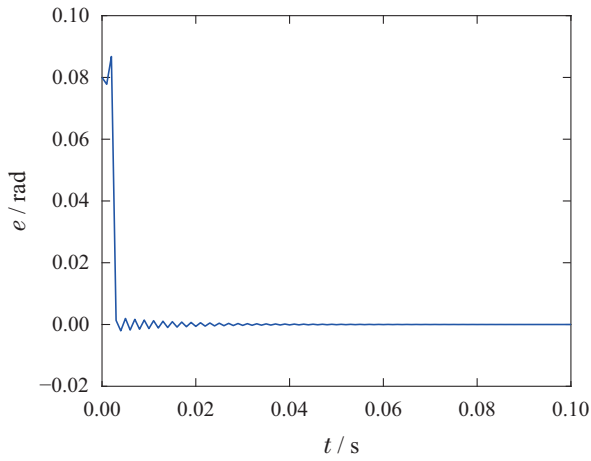
$$\begin{pmatrix} 0.999 & 0.00994 & -2.530 & -3.180 \\ -0.00750 & 0.901 & 41.200 & -0.439 \\ 0.0000351 & -0.000704 & 0.891 & 0.000175 \\ 0.00000174 & -0.0000364 & 0.0947 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = [0.0124 \ -0.207 \ -0.0070 \ -0.000357]^T,$$

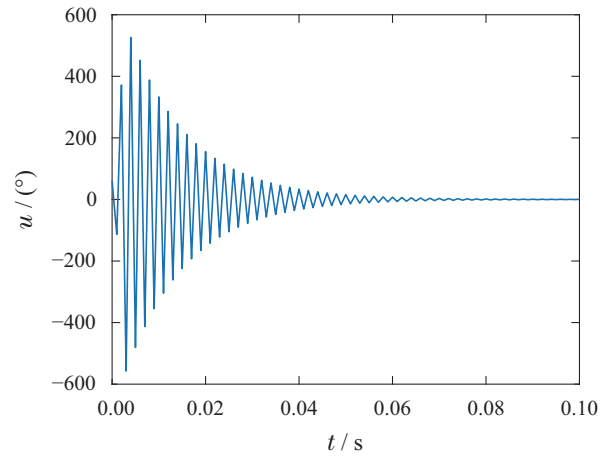
$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]. \tag{100}$$

仿真中, 选取采样时间  $T = 0.001 \text{ s}$ , 参考输入  $r(t) = 0.01 \sin(0.2t)$ ,  $\Delta(z) = z^{n-\bar{n}}, P_m(z) = z^{n^*}, x(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$ ,  $y_m(0) = 0.01, \gamma = 1.2, \Gamma = 1.2I$ . 自适应控制器参数的初始值选择为标称下控制器参数的90%. 针对不同反馈信号, 本文给出不同的仿真结果. 本文采用部分状态反馈模型参考自适应控制方案, 以二维信号  $y_0(t) = [Q_b/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}); \theta/\text{rad}]$ 为反馈信号进行自适应控制, 得到图1(a), 图2(a), 图3(a)所示的系统响应曲线. 可以看出, 控制信号和状态信号有界, 实现了输出渐近跟踪, 表明以一般可测信号进行反馈控制的有效性.

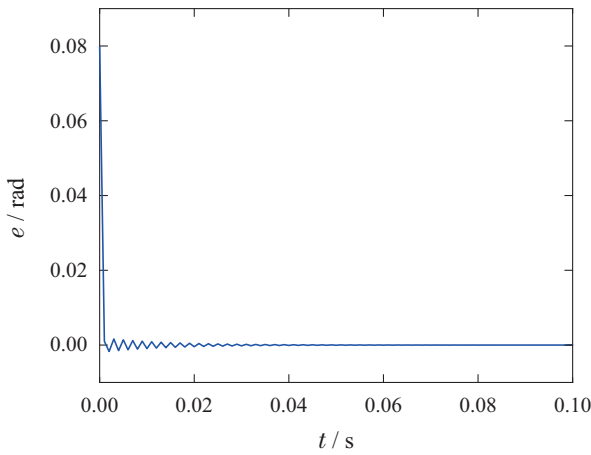
为突出新方案的优势, 给出了状态反馈和输出反馈控制的系统响应曲线. 图1是3种控制方案的输出跟踪误差信号曲线, 部分状态反馈自适应控制相对输出反馈控制降低了振荡幅度, 减少了响应时间; 相对状态反馈控制虽增加了振荡幅度, 但系统响应时间差别不大; 图2是3种控制方案的控制信号, 图3是3种控制方案的状态信号.



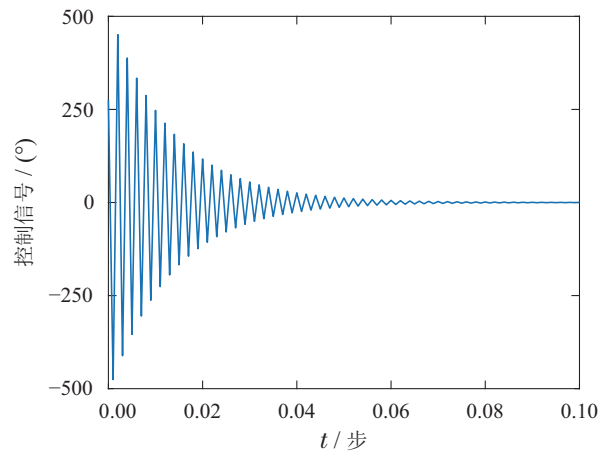
(a) 部分状态反馈控制的跟踪误差信号曲线



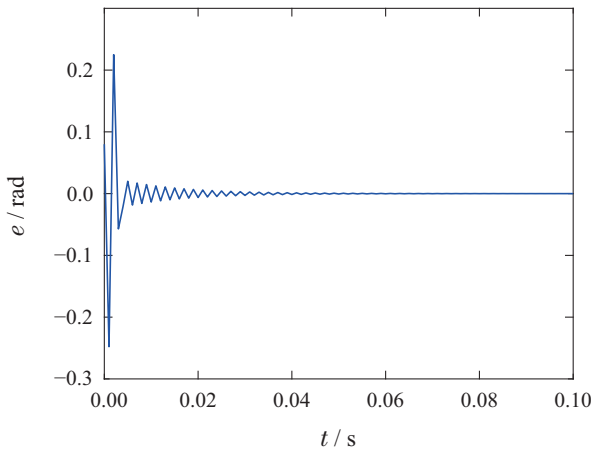
(a) 部分状态反馈控制的控制信号曲线



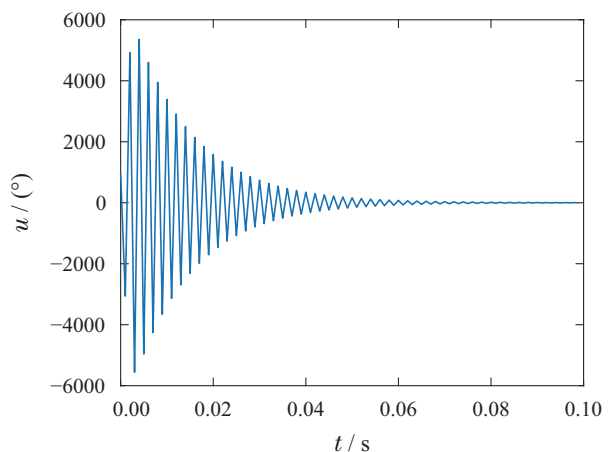
(b) 状态反馈控制的跟踪误差信号曲线



(b) 状态反馈控制的控制信号曲线



(c) 输出反馈控制的跟踪误差信号曲线



(c) 输出反馈控制的控制信号曲线

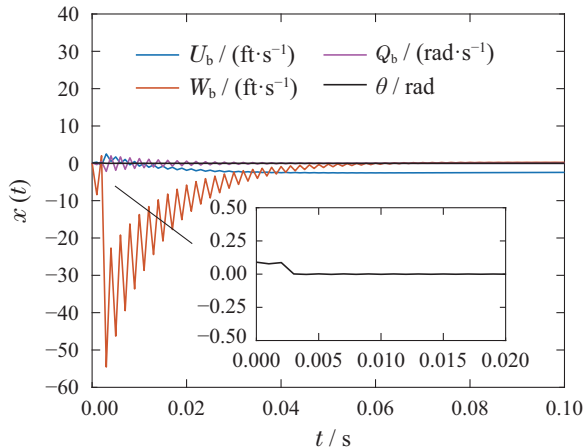
图 1 部分状态反馈控制、状态反馈控制和输出反馈控制的跟踪误差信号

Fig. 1 Tracking error signals for partial-state feedback, state feedback control and output feedback control

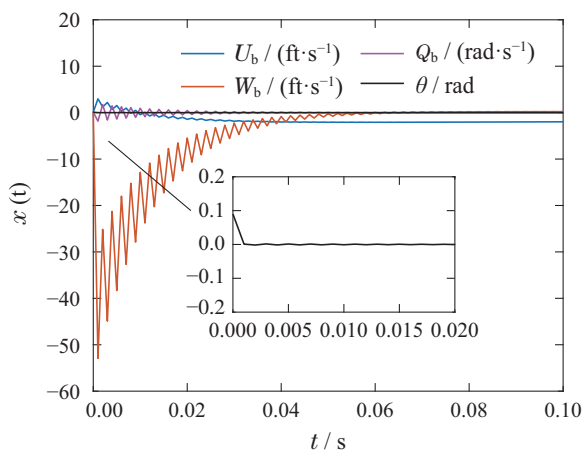
图 2 部分状态反馈控制、状态反馈控制和输出反馈控制的控制信号

Fig. 2 Control signals for partial-state feedback, state feedback control and output feedback control

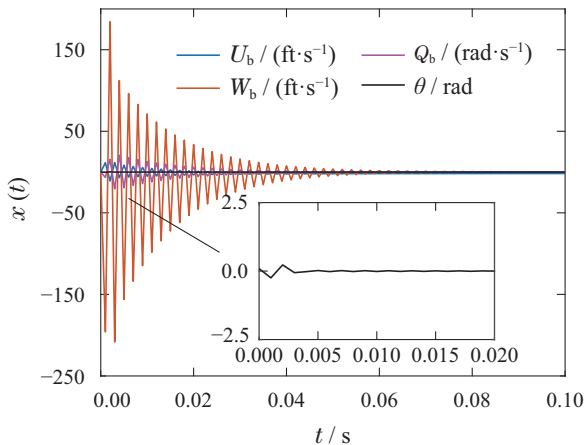




(a) 部分状态反馈控制的状态信号曲线



(b) 状态反馈控制的状态信号曲线



(c) 输出反馈控制的状态信号曲线

图3 部分状态反馈控制、状态反馈控制和输出反馈控制的状态信号

Fig. 3 State signals for partial-state feedback, state feedback control and output feedback control

新的控制方案相对输出反馈控制, 具有更简单的控制结构, 不依赖输出信号亦可以达到期望的控制结果. 另一方面, 新控制方案缓解了对状态信息的限制, 依赖不超过系统维数的任意维可测信号进行控制, 应用灵活.

## 6 结论

本文将部分状态反馈运用到离散时间系统, 得到了更加灵活的模型参考自适应控制方案. 本文不仅证明了输出匹配条件的存在性, 还通过引入辅助信号, 详细地证明了部分状态反馈模型参考自适应控制方案可以实现系统渐近输出跟踪以及所有闭环信号的有界性. 仿真结果验证了这一控制方案的有效性.

## 参考文献:

- [1] TAO G. *Adaptive Control Design and Analysis*. New York: John Wiley and Sons Incorporation, 2003.
- [2] LAVRETSKY E, WISE K A. *Robust and Adaptive Control with Aerospace Applications*. London: Springer, 2013.
- [3] AKHTAR S, BERNSTEIN D S. Lyapunov-stable discrete-time model reference adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2005, 19(10): 745 – 767.
- [4] BERNARDO M D, MONTANARO U, OLM J M. Model reference adaptive control of discrete-time piecewise linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, 23(7): 709 – 730.
- [5] DOGAN K M, YUCELEN T, HADDAD W M, et al. Improving transient performance of discrete-time model reference adaptive control architectures. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2020, 34(7): 901 – 918.
- [6] SONG G, TAO G. A model reference adaptive control scheme with partial-state feedback for output tracking. *American Control Conference (ACC)*. Seattle: IEEE, 2017: 2465 – 2470.
- [7] SONG G, TAO G. Partial-state feedback model reference adaptive control scheme. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(1): 44 – 57.
- [8] SONG G, TAO G. Partial-state feedback multivariable MRAC and reduced-order designs. *Automatica*. DOI: 10.1016/j.automatica.2021.109622.
- [9] SONG G, TAO G, TAN C. A unified discrete-time model reference adaptive control scheme. *IEEE the 14th International Conference on Control and Automation (ICCA)*. Anchorage: IEEE, 2018: 106 – 111.

## 作者简介:

桑英丽 硕士研究生, 目前研究方向为自适应控制, E-mail: xiuylsang@163.com;

张正强 教授, 博士, 目前研究方向为自适应控制、容错控制、非线性系统、时滞系统, E-mail: qufuzzq@126.com.