

基于输出反馈和滑模控制的一类二阶非线性系统 有限时间镇定方法

孙训红¹, 陈维乐¹, 都海波^{1†}, 李世华²

(1. 合肥工业大学 电气与自动化工程学院, 安徽 合肥 230000; 2. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 本文研究了一类具有不确定非线性动力学和未知外部扰动的二阶非线性系统的全局有限时间输出镇定问题. 首先, 提出了一种全局状态反馈有限时间控制器, 实现了二阶非线性系统的有限时间镇定. 为了解决只有系统输出可用这种更有挑战性的情况, 采用了一种新颖的设计思想, 即非分离原理. 构造了一个有限时间收敛的状态观测器来估计未知状态. 在此观测器的基础上, 提出了一种基于输出的有限时间复合控制器. 基于李雅普诺夫方法, 证明了整个闭环系统的全局有限时间稳定性. 仿真结果表明了理论的有效性.

关键词: 有限时间控制; 输出反馈; 非分离原理; 不确定非线性系统; 未知外部扰动; 非连续控制

引用格式: 孙训红, 陈维乐, 都海波, 等. 基于输出反馈和滑模控制的一类二阶非线性系统有限时间镇定方法. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1727 – 1734

DOI: 10.7641/CTA.2021.10782

Finite-time stabilization method for a class of second-order nonlinear systems based on output feedback and sliding mode control

SUN Xun-hong¹, CHEN Wei-le¹, DU Hai-bo^{1†}, LI Shi-hua²

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei Anhui 230000, China;

2. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: In this paper, the global finite-time output stabilization problem for a class of second-order nonlinear systems with uncertain nonlinear dynamics and unknown external disturbances is studied. First, a global state-feedback finite-time controller is proposed. In order to solve the more challenging situation where only the output of the system is available, a novel design idea, the non-separation principle, is adopted. A finite-time-convergent state observer is constructed to estimate the unknown states. Based on this observer, a finite-time compound controller based on output is proposed, and the global finite-time stability of the whole closed-loop system is proved by the Lyapunov method. Simulation results show the validity of the theory.

Key words: finite-time control; output feedback; non-separation principle; uncertain nonlinear system; unknown external disturbance; discontinuous control

Citation: SUN Xunhong, CHEN Weile, DU Haibo, et al. Finite-time stabilization method for a class of second-order nonlinear systems based on output feedback and sliding mode control. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1727 – 1734

1 引言

众所周知, 对于控制系统, 收敛性能和抗干扰性能是重要的性能指标, 这也是工程师在设计控制器时所关注的重点. 注意到大多数控制器设计满足局部利普希茨条件, 这意味着闭环系统是渐近稳定的, 收敛速度只能做到指数收敛. 为了提高收敛速度, 文献[1–5]

等相继提出并发展了有限时间控制算法, 系统状态将在有限时间内收敛到平衡点. 目前主要的有限时间控制算法有齐次性法^[3]、加幂积分法^[4]和终端滑模算法^[5]等. 其中, 齐次性法控制器结构简单且易于设计^[6–7], 但是在高阶系统中是一种存在性设计而不是构造性设计, 抗干扰能力难以定量分析^[3]. 而加幂积

收稿日期: 2021–08–24; 录用日期: 2021–11–17.

†通信作者. E-mail: haibo.du@hfut.edn.cn; Tel.: +86 18156062198.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(62073113, 62003122, 62025302, 61673153), 安徽省自然科学基金项目(2008085UD03, 1808085MF180), 中央高校基本科研业务费项目(PA2020GDKC0016)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62073113, 62003122, 62025302, 61673153), the Natural Science Foundation of Anhui Province of China (2008085UD03, 1808085MF180) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (PA2020GDKC0016).

分法一方面能够结合反步设计思想,另一方面可以通过显式构造李雅普诺夫函数,定量分析抗干扰性能,因此得到了广泛应用^[4,8-11]. 终端滑模方法结合了传统滑模控制算法和有限时间算法,设计了非线性滑模面,从而使得状态在到达滑模面后,能够沿着滑模面有限时间内收敛到平衡点^[5,12]. 特别地,如果将有限时间控制算法定义为能够使系统稳定且系统状态有限时间收敛的算法,滑模算法^[13-14]也可以看成是一类有限时间控制算法.

文献[4]提出并利用加幂积分技术构造了非光滑连续状态反馈控制器,对一类广泛的本质非线性系统实现了全局渐近镇定. 随后,结合加幂积分技术,文献[15]考虑了一类带不确定动力学的非线性系统的有限时间镇定问题. 文献[16]基于逻辑切换,实现了一类不确定非线性系统的自适应有限时间镇定. 此外,文献[17]针对一类带匹配不确定非线性动力学的系统,提出了一种时变反馈调节方法,可以在预定的时间内对系统状态进行调节. 值得注意的是,上述的控制器设计方法都是基于全状态反馈的,这意味着系统的所有状态都必须都是已知的. 而在实际中,有一些场合,如电机系统,由于技术限制或成本考虑,采用无速度传感器实现其控制^[18-19]. 因此,基于输出反馈的有限时间控制算法值得深入研究. 在文献[20]中,首次实现了双积分系统的有限时间输出反馈镇定问题. 随后,在文献[21-22]中,利用递归设计方法和齐次控制方法,研究了一类高阶不确定非线性系统的全局有限时间输出反馈镇定问题.

文献[20-22]等尽管已经考虑了系统的不确定动力学,但是没有考虑外部干扰的影响. 在实际工程中,外部干扰是不可避免的. 考虑到系统的输出反馈需要对系统状态进行观测,而外部干扰将影响观测器的收敛性. 对于有界干扰,超螺旋算法具有良好的收敛性能和抗干扰性能,因此得到了广泛的研究和应用^[23-26]. 然而,由于不确定动力学的存在,无法“独立”证明观测器的收敛性. 此时,“分离原理”不适用. 因此本文采用了“非分离原理”,主要思路如下. 首先,设计了一种状态反馈控制器,实现了系统的有限时间镇定. 然后,考虑到只有系统输出可知情况,设计了一种基于状态观测器的复合有限时间控制器,实现了系统的有限时间输出镇定. 此外,本文的有限时间观测器与控制器采用了状态的非连续函数,这导致在通常意义下无法解释系统解,而是Filippov意义下的解^[27].

本文的结构如下:第2节介绍了被控系统的模型,以及预备知识,包括一些有用的假设、定义和引理;第3节是全文的主要内容,分为3个步骤并在开始时作了详细介绍;第4节给出了一个仿真实例;最后,第5节对本文进行总结.

2 问题描述和预备知识

2.1 问题描述

考虑一类具有不确定动力学和未知外部扰动的二阶非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(t, x, u), \\ \dot{x}_2 = u + f_2(t, x, u, d), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x = [x_1 \ x_2] \in \mathbb{R}^2$ 是系统状态向量, $y \in \mathbb{R}$ 是系统输出, $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $f_1(\cdot)$ 是系统非匹配未知非线性动力学, $f_2(t, x, d) = \bar{f}_2(t, x) + d(t)$, $\bar{f}_2(t, x)$ 和 $d(t)$ 分别是控制输入通道中的不确定动力学和未知外部干扰.

本文的最终目的是为非线性系统(1)设计一个基于输出反馈的控制器,实现闭环系统的有限时间镇定. 控制器设计和稳定性分析面临以下难点: i) 系统存在不确定的非线性动力学和未知的外部扰动; ii) 对于系统的状态,只有 x_1 作为系统的输出是可测量的. 一些假设如下.

假设 1 对于系统(1),有两个已知的非负常数 a_1, a_2 使得

$$|f_1(t, x, u)| \leq a_1 |x_1|^{1/2}, |f_2(t, x, u, d)| \leq a_2. \quad (2)$$

注 1 参考文献[21-22,28-30]等均有类似的假设. 文献[21-22]不考虑外部有界干扰,而本文假设匹配不确定动力学 $\bar{f}_2(t, x)$ 和未知外部干扰 $d(t)$ 都是全局有界的. 文献[28-29]的非线性动力学形式是已知的,但是假设条件更加宽松. 而对于非匹配干扰 f_1 ,其约束条件直接参考了文献[30]的假设条件. 实际上,本文也可以看成是对文献[30]的部分结论进行了基于输出反馈的扩展. 此外,文献[30]中对于Buck型电路的应用,也体现了上述假设的合理性.

2.2 预备知识

定义 1 (Sig函数)

$$[x]^\alpha = \text{sig}^\alpha(x) = \text{sgn}(x)|x|^\alpha, \quad (3)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数, $a \in \mathbb{R}$ 满足 $a \geq 0, x \in \mathbb{R}$. 特别地,定义 $[x]^0 = \text{sgn}(x)$.

引理 1^[2] 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

其中 $f(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个连续函数. 假设存在一个正定连续函数 $V(x): U \rightarrow \mathbb{R}$,有实数 $c > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1)$,并且存在一个包含原点开区域 $U_0 \subset U$ 使得 $\dot{V}(x) + c(V(x))^\alpha \leq 0, x \in U_0 \setminus \{0\}$. 那么 $V(x)$ 将在有限时间内到达0. 此外,有限收敛时间 T 满足

$$T \leq \frac{V(x(0))^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}.$$

引理 2^[5] 如果 $m > 1$,那么

$$\frac{d|x|^m}{dx} = m|x|^{m-1}, \frac{d[x]^m}{dx} = m|x|^{m-1}.$$

引理 3^[4] 如果 $0 < p \leq 1$, 那么

$$||x|^p - |y|^p| \leq 2^{1-p}|x - y|^p.$$

引理 4^[4] 如果 $p \geq 1$, 那么

- i) $||x|^p - |y|^p| \geq 2^{1-p}|x - y|^p$;
- ii) $||x|^p - |y|^p| \leq p|x - y|(|x|^{p-1} + |y|^{p-1}) \leq l|x - y|^p + l|x - y||y|^{p-1}$, $l = p(2^{p-2} + 2)$.

引理 5^[4] 如果 $c, d > 0, \gamma > 0, x, y \in \mathbb{R}$, 下列不等式成立:

$$|x|^c|y|^d \leq \frac{c}{c+d}\gamma|x|^{c+d} + \frac{d}{c+d}\gamma^{-cd}|y|^{c+d}.$$

引理 6^[31] 对任意 $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ 和实数 $p \in (0, 1]$,

$$(|x_1| + \dots + |x_n|)^p \leq |x_1|^p + \dots + |x_n|^p.$$

引理 7^[31] 对任意 $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ 和实数 $p \geq 1$,

$$(|x_1| + \dots + |x_n|)^p \leq n^{p-1}(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p).$$

3 主要结果

为了便于后续证明, 作以下坐标变换:

$$z_1 = x_1, z_2 = \frac{x_2}{L}, v = \frac{u}{L^2}, g_1 = f_1, g_2 = \frac{f_2}{L}, \quad (5)$$

其中 $L \geq 1$ 是待定常数. 根据式(5), 系统(1)转化为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Lz_2 + g_1(t, z, u), \\ \dot{z}_2 = Lv + g_2(t, z, u, d), \\ y = z_1, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $z = [z_1 \ z_2] \in \mathbb{R}^2$ 是系统状态. 先前的假设1转化为

$$|g_1(t, z, u)| \leq a_1|z_1|^{1/2}, |g_2(t, z, u)| \leq \frac{a_2}{L}. \quad (7)$$

通过坐标变换, 将本文的控制目标转化为系统(6)的有限时间输出镇定.

本节分为3个步骤.

步骤1 对于系统(6), 设计了状态反馈控制器来实现全局有限时间镇定.

步骤2 考虑到 z_2 不能直接测量, 设计了一个观测器来估计 z_2 . 这种观测器的形式是基于超螺旋观测器. 但是, 由于非匹配不确定动力学 g_1 的存在, 不能单独证明观测器的有限时间收敛性.

步骤3 步骤1和步骤2表明系统不能使用“分离原理”进行输出反馈控制. 因此, 本文同时进行控制器和观测器的稳定性分析. 通过设计总李雅普诺夫函数, 证明了总闭环系统的有限时间稳定性, 同时实现了 z_2 的有限时间估计和系统的全局有限时间输出镇定.

3.1 状态反馈控制器设计

定理 1 对于系统(6), 在假设1条件下, 如果状态反馈控制器设计为

$$v = v_{\text{state}} := -\beta_1 \operatorname{sgn}(|z_2|^2 + \beta_2^2 z_1), \quad (8)$$

则存在合适的增益 $\beta_1, \beta_2 > 0$ 使闭环系统在有限时间内稳定.

证 构造李雅普诺夫函数为

$$V = V_1 + V_2, \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{3}|z_1|^{\frac{3}{2}}, \\ V_2 &= \frac{1}{\beta_2^3} \int_{z_2^*}^{z_2} (|s|^2 - |z_2^*|^2) ds, \\ z_2^* &= -\beta_2|z_1|^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

V_1 沿系统(6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= |z_1|^{\frac{1}{2}}(Lz_2 + g_1) = \\ &L|z_1|^{\frac{1}{2}}(z_2 - z_2^* + z_2^*) + |z_1|^{\frac{1}{2}}g_1 \leq \\ &-L\beta_2|z_1| + L|z_1|^{\frac{1}{2}}(z_2 - z_2^*) + a_1|z_1| = \\ &-(L\beta_2 - a_1)|z_1| + L|z_1|^{\frac{1}{2}}(z_2 + \beta_2|z_1|^{1/2}). \end{aligned} \quad (11)$$

定义 $\xi = |z_2|^2 - |z_2^*|^2 = |z_2|^2 + \beta_2^2 z_1$. 然后, 通过引理5, V_2 沿系统(6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{1}{\beta_2^3} ((|z_2|^2 - |z_2^*|^2)\dot{z}_2 + \beta_2^2 \dot{z}_1(z_2 - z_2^*)) \leq \\ &-\frac{\beta_1 L}{\beta_2^3} |\xi| + \frac{a_2}{\beta_2^3 L} |\xi| + \frac{1}{\beta_2} (Lz_2 + g_1)(z_2 - z_2^*) \leq \\ &-\left(\frac{\beta_1 L}{\beta_2^3} - \frac{a_2}{\beta_2^3 L}\right) |\xi| + \frac{L}{\beta_2} (z_2 - z_2^* + z_2^*)(z_2 - z_2^*) + \frac{a_1}{\beta_2} |z_1|^{\frac{1}{2}} |z_2 - z_2^*| = \\ &-\left(\frac{\beta_1 L}{\beta_2^3} - \frac{a_2}{\beta_2^3 L}\right) |\xi| - L|z_1|^{\frac{1}{2}} (z_2 + \beta_2|z_1|^{1/2}) + \\ &\frac{L}{\beta_2} (z_2 - z_2^*)^2 + \frac{a_1}{\beta_2} |z_1|^{\frac{1}{2}} |z_2 - z_2^*|. \end{aligned} \quad (12)$$

接下来, 将估计式(12)的最后两项. 首先, 由引理3得出

$$|z_2 - z_2^*| \leq 2^{\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

根据这个不等式和引理5, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\beta_2} |z_1|^{\frac{1}{2}} |z_2 - z_2^*| &\leq \frac{a_1}{\beta_2} |z_1|^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} (|\xi| + |z_1|). \end{aligned} \quad (14)$$

将不等式(13)–(14)代入式(12)得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\left(\frac{\beta_1 - 2\beta_2^2}{\beta_2^3} L - \frac{a_2}{\beta_2^3 L} - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}}\right) |\xi| + \\ &\frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} |z_1| - L|z_1|^{\frac{1}{2}} (z_2 + \beta_2|z_1|^{1/2}). \end{aligned} \quad (15)$$

结合式(11)和式(15),有

$$\dot{V} \leq - \left(\frac{\beta_1 - 2\beta_2^2}{\beta_2^3} L - \frac{a_2}{\beta_2^3 L} - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \right) |\xi| - \left(L\beta_2 - a_1 - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \right) |z_1|. \quad (16)$$

考虑到 $L \geq 1$, 很容易找到适当的增益 β_1 和 β_2 使得

$$\begin{cases} \frac{\beta_1 - 2\beta_2^2}{\beta_2^3} L - \frac{a_2}{\beta_2^3 L} - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \geq Lc_1, \\ L\beta_2 - a_1 - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \geq Lc_1, \end{cases} \quad (17)$$

其中 c_1 是一个正的常数. 因此, 进一步有

$$\dot{V} \leq -Lc_1(|\xi| + |z_1|). \quad (18)$$

另一方面, 结合不等式(13), 可得

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}|z_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\beta_2^3} \int_{z_2^*}^{z_2} (|s|^2 - |z_2^*|^2) ds \leq \\ &\frac{2}{3}|z_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\beta_2^3} |z_2 - z_2^*| (|z_2|^2 - |z_2^*|^2) \leq \\ &\frac{2}{3}|z_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\beta_2^3} |\xi|^{\frac{3}{2}} \leq \gamma_1 (|z_1|^{\frac{3}{2}} + |\xi|^{\frac{3}{2}}), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\gamma_1 = \max\{\frac{2}{3}, \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\beta_2^3}\}$. 进一步从引理6可得

$$\left(\frac{V}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{3}} \leq (|z_1|^{\frac{3}{2}} + |\xi|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} \leq |z_1| + |\xi|. \quad (20)$$

将不等式(20)代入式(18)得到

$$\dot{V} \leq -Lc_1 \gamma_1^{-\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}}, \quad (21)$$

这意味着系统的状态会在有限时间内收敛到原点.

3.2 状态观测器设计

对于系统(6), 状态观测器的设计如下:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= L\hat{z}_2 - Lk_1[\hat{z}_1 - z_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\hat{z}}_2 &= Lv - Lk_2[\hat{z}_1 - z_1]^0. \end{aligned} \quad (22)$$

定义 $e_1 = \hat{z}_1 - z_1$, $e_2 = (\hat{z}_2 - z_2)/k_1$, 则观测误差方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= Lk_1(e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}) - g_1, \\ \dot{e}_2 &= -Lk|e_1|^0 - \frac{g_2}{k_1}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $k = k_2/k_1$.

定理 2 对于系统(6), 在假设1条件下, 如果状态观测器设计为式(22),

- 在李雅普诺夫函数(24)下, W 沿系统(23)的导数满足式(42).

- 如果 $a_1 = 0$, 则存在合适的增益 $k_1, k_2 > 0$ 实现状态的有限时间观测.

证 构造李雅普诺夫函数

$$W = \gamma_2 W_1 + W_2, \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= 2\sqrt{3} + 4, \\ W_1 &= \frac{1}{3}|e_2|^3, \\ W_2 &= \frac{2}{3}||e_2|^2 - e_1|^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

W_1 沿系统(23)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= |e_2|^2(-Lk|e_1|^0 - \frac{g_2}{Lk_1}) \leq \\ &-Lk|e_2|^2(|e_1|^0 - |e_2|^0) + \frac{a_2}{Lk_1}|e_2|^2 = \\ &-(Lk - \frac{a_2}{Lk_1})|e_2|^2 - Lk|e_2|^2(|e_1|^0 - |e_2|^0). \end{aligned} \quad (26)$$

接下来, 本文在两种情况下估计不等式(26)的最后一项.

情况 1 如果 $e_1 e_2 > 0$, 则 $(|e_1|^0 - |e_2|^0) = 0$.

情况 2 如果 $e_1 e_2 \leq 0$, 则 $||e_1|^0 - |e_2|^0| \leq 2, |e_2| \leq |e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}|$.

在这两种情况下, 下列不等式均成立:

$$-Lk|e_2|^2(|e_1|^0 - |e_2|^0) \leq 2Lk|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}|^2. \quad (27)$$

将这个不等式代入式(26)得到

$$\dot{W}_1 \leq -(Lk - \frac{a_2}{k_1})|e_2|^2 + 2Lk|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}|^2. \quad (28)$$

W_2 沿系统(23)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= [|e_2|^2 - e_1]^{\frac{1}{2}}(2|e_2|\dot{e}_2 - \dot{e}_1) \leq \\ &-Lk_1[|e_2|^2 - e_1]^{\frac{1}{2}}(e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}) + \\ &||e_2|^2 - e_1|^{\frac{1}{2}} a_1 |z_1|^{\frac{1}{2}} + \\ &||e_2|^2 - e_1|^{\frac{1}{2}} 2|e_2|(Lk + \frac{a_2}{Lk_1}). \end{aligned} \quad (29)$$

接下来, 将估计不等式(29)的每一项. 首先, 通过引理4, 得到

$$||e_2|^2 - e_1| \geq \frac{1}{2}|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}|^2. \quad (30)$$

在这个不等式的基础上, 给出了不等式(29)的第1项

$$\begin{aligned} &-Lk_1[|e_2|^2 - e_1]^{\frac{1}{2}}(e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}) = \\ &-Lk_1||e_2|^2 - e_1|^{\frac{1}{2}}|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}| \leq \\ &-\frac{Lk_1}{\sqrt{2}}|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}|^2. \end{aligned} \quad (31)$$

由引理4和引理5得出

$$\begin{aligned} &||e_2|^2 - e_1|^{\frac{1}{2}} \leq \\ &(6|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}|^2 + 6|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}||e_2|)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &(9|e_2 - |e_1|^{\frac{1}{2}}|^2 + 3|e_2|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$3|e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}| + \sqrt{3}|e_2|. \tag{32}$$

在这个不等式和引理(5)的基础上, 给出了不等式(29)的最后两项

$$\begin{aligned} & |[e_2]^2 - e_1]^{\frac{1}{2}} a_1 |z_1|^{\frac{1}{2}} \leq \\ & 3a_1 |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}| |z_1|^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3} a_1 |e_2| |z_1|^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \frac{3a_1}{2} |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^2 + \frac{\sqrt{3} a_1}{2} |e_2|^2 + \frac{(3 + \sqrt{3}) a_1}{2} |z_1| \end{aligned} \tag{33}$$

和

$$\begin{aligned} & |[e_2]^2 - e_1]^{\frac{1}{2}} 2|e_2| (Lk + \frac{a_2}{Lk_1}) \leq \\ & (Lk + \frac{a_2}{Lk_1}) (6|e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}| |e_2| + 2\sqrt{3}|e_2|^2) \leq \\ & (Lk + \frac{a_2}{Lk_1}) (3|e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^2 + (2\sqrt{3} + 3)|e_2|^2). \end{aligned} \tag{34}$$

将不等式(31)(33)–(34)带入式(29)得到

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 \leq & - \left(\frac{L(k_1 - 3\sqrt{2}k)}{\sqrt{2}} - \frac{3a_2}{Lk_1} - \frac{3a_1}{2} \right) |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^2 + \left(\frac{\sqrt{3} a_1}{2} + (2\sqrt{3} + 3)(Lk + \frac{a_2}{Lk_1}) \right) |e_2|^2 + \frac{(3 + \sqrt{3}) a_1}{2} |z_1|. \end{aligned} \tag{35}$$

结合式(24)(28)(35), 有

$$\begin{aligned} \dot{W} = \gamma_2 \dot{W}_1 + \dot{W}_2 \leq & - \left(Lk - \gamma_2 \frac{a_2}{k_1} - \frac{\sqrt{3} a_1}{2} - \frac{a_2(2\sqrt{3} + 3)}{Lk_1} \right) |e_2|^2 - \left(\frac{k_1 - (3 + 2\gamma_2)\sqrt{2}k}{\sqrt{2}} L - \frac{3a_2}{Lk_1} - \frac{3a_1}{2} \right) |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^2 + \frac{(3 + \sqrt{3}) a_1}{2} |z_1|. \end{aligned} \tag{36}$$

考虑到 $L \geq 1$, 易找到合适的增益 k_1 和 k 使得

$$\begin{cases} \frac{k_1 - (3 + 2\gamma_2)\sqrt{2}k}{\sqrt{2}} L - \frac{3a_2}{Lk_1} > Lc_2, \\ Lk - \gamma_2 \frac{a_2}{k_1} - \frac{a_2(2\sqrt{3} + 3)}{Lk_1} > Lc_2, \end{cases} \tag{37}$$

其中 c_2 是一个正的常数. 因此, 不等式(36)转化为

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -Lc_2(|e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^2 + |e_2|^2) + \frac{(3 + \sqrt{3}) a_1}{2} |z_1|. \end{aligned} \tag{38}$$

另一方面, 通过引理7, 有

$$\begin{aligned} & |[e_2]^2 - e_1]^{\frac{3}{2}} \leq \\ & \sqrt{2}|e_2|^3 + \sqrt{2}|e_1]^{\frac{3}{2}} = \\ & \sqrt{2}|e_2|^3 + \sqrt{2}|e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}} - e_2|^3 \leq \\ & \sqrt{2}|e_2|^3 + 4\sqrt{2}(|e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^3 + |e_2|^3) = \end{aligned}$$

$$5\sqrt{2}|e_2|^3 + 4\sqrt{2}|e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^3. \tag{39}$$

将这个不等式代入式(24)得到

$$\begin{aligned} W = & \frac{\gamma_2}{3} |e_2|^3 + \frac{2}{3} |[e_2]^2 - e_1]^{\frac{3}{2}} \leq \\ & \frac{\gamma_2 + 10\sqrt{2}}{3} |e_2|^3 + \frac{8\sqrt{2}}{3} |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^3 \leq \\ & \gamma_3 (|e_2|^3 + |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^3), \end{aligned} \tag{40}$$

其中 $\gamma_3 = (\gamma_2 + 10\sqrt{2})/3$. 而且, 进一步结合引理6, 有

$$\left(\frac{W}{\gamma_3} \right)^{\frac{2}{3}} \leq (|e_2|^3 + |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^3)^{\frac{2}{3}} \leq |e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}|^2 + |e_2|^2. \tag{41}$$

将这个不等式代入式(38)得到

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -Lc_2 \gamma_3^{-\frac{2}{3}} W^{\frac{2}{3}} + \frac{(3 + \sqrt{3}) a_1}{2} |z_1| = \\ & -L\hat{c}_2 W^{\frac{2}{3}} + \frac{(3 + \sqrt{3}) a_1}{2} |z_1|. \end{aligned} \tag{42}$$

根据这个不等式, 如果 $a_1 = 0$, 则估计误差将在有限时间内收敛到原点.

注 2 如果 $L = 1$ 和 $a_1 = 0$, 那么误差方程式(23)将转变为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 & = k_1(e_2 - [e_1]^{\frac{1}{2}}), \\ \dot{e}_2 & = -k[e_1]^0 - \frac{g_2}{k_1}. \end{aligned} \tag{43}$$

这实际上是超螺旋算法(super twisting algorithm, STA). 因此, 与已有超螺旋算法的李雅普诺夫函数法证明^[32-34]不同, 本文设计了一个新的李雅普诺夫函数, 提供了一种新的、简洁的STA算法的证明方法.

注 3 根据定理1和定理2, 如果 $a_1 = 0$, 可以使用“分离原理”实现系统(6)的有限时间输出镇定. 具体地, 首先通过定理2, 在有限时间 T_1 后得到 z_2 的估计. 之后, 输出反馈控制实际上变成了状态反馈控制, 由定理1可知, 在 $T_1 + T_2$ 之后, 系统将收敛到0. 但本文主要考虑 $a_1 > 0$ 的情况. 在这种情况下, “分离原理”并不适用. 因此, 接下来本文将利用“非分离原理”来解决有限时间输出镇定问题.

3.3 基于输出反馈的有限时间控制器设计

当不能直接获得状态 z_2 时, 上述状态反馈控制不再适用. 此时, 使用如下输出反馈控制器:

$$v = v_{out} = -\beta_1 \operatorname{sgn}([\hat{z}_2]^2 + \beta_2^2 z_1). \tag{44}$$

定理 3 对于系统(6), 在假设1条件下, 若将输出反馈控制器设计为式(44)且状态观测器设计为式(22), 则存在适当的正增益 $\beta_1, \beta_2, k_1, k_2$ 和 L 使得整个闭环系统有限时间输出镇定.

证 将输出反馈控制器(44)代入系统(6), 有

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Lz_2 + g_1, \\ \dot{z}_2 = Lv_{out} + g_2 = Lv_{state} + g_2 + L\Delta v, \end{cases} \tag{45}$$

其中: $\Delta v = v_{out} - v_{state} = -\beta_1[\hat{\xi}]^0 + \beta_1[\xi]^0, \hat{\xi} =$

$$[\hat{z}_2]^2 + \beta_2^2 z_1, \xi = [z_2]^2 + \beta_2^2 z_1.$$

仍使用李雅普诺夫(9). 结合式(16), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left(\frac{\beta_1 - 2\beta_2^2}{\beta_2^3} L - \frac{a_2}{\beta_2^3 L} - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \right) |\xi| - \\ & \left(L\beta_2 - a_1 - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \right) |z_1| + \frac{\beta_1 L}{\beta_2^3} |\xi| |\xi|^0 - |\hat{\xi}|^0. \end{aligned} \quad (46)$$

接下来, 本文将在两种情况下估计不等式(46)的最后一项.

情况 1 如果 $\xi \hat{\xi} > 0$, 则 $|\xi|^0 - |\hat{\xi}|^0 = 0$. 因此, 这个情况无需进一步讨论.

情况 2 如果 $\xi \hat{\xi} \leq 0$, 则 $|\xi|^0 - |\hat{\xi}|^0 \leq 2$, 且 $|\xi| \leq |\xi - \hat{\xi}| = |[z_2]^2 - [\hat{z}_2]^2|$. 因此, 通过引理4, 引理5和引理6, 存在常数 γ_4 使得

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 L}{\beta_2^3} |\xi| |\xi|^0 - |\hat{\xi}|^0 & \leq \frac{2\beta_1 L}{\beta_2^3} |[z_2]^2 - [\hat{z}_2]^2| \leq \\ \frac{2\beta_1 L}{\beta_2^3} (6|z_2 - \hat{z}_2|^2 + 6|z_2 - \hat{z}_2||z_2|) & = \\ \frac{12\beta_1 L}{\beta_2^3} (|z_2 - \hat{z}_2|^2 + |z_2 - \hat{z}_2| |z_2|) & \leq \\ \frac{12\beta_1 L}{\beta_2^3} (|z_2 - \hat{z}_2|^2 + \beta_2^2 z_1 - \beta_2^2 z_1)^{\frac{1}{2}} & \leq \\ \frac{12\beta_1 L}{\beta_2^3} (|z_2 - \hat{z}_2|^2 + |z_2 - \hat{z}_2| |\xi|^{\frac{1}{2}} + |z_2 - \hat{z}_2| \beta_2 |z_1|^{\frac{1}{2}}) & \leq \\ \frac{12\beta_1 L}{\beta_2^3} (k_1^2 |e_2|^2 + k_1 |e_2| |\xi|^{\frac{1}{2}} + k_1 \beta_2 |e_2| |z_1|^{\frac{1}{2}}) & \leq \\ L \frac{\beta_2}{2} |z_1| + L \frac{\beta_1 - 2\beta_2^2}{2\beta_2^3} |\xi| + L\gamma_4 |e_2|^2. \end{aligned} \quad (47)$$

将这个不等式代入式(46)得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left(\frac{\beta_1 - 2\beta_2^2}{2\beta_2^3} L - \frac{a_2}{\beta_2^3 L} - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \right) |\xi| - \\ & \left(\frac{L\beta_2}{2} - a_1 - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} \right) |z_1| + L\gamma_4 |e_2|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

考虑到 $L \geq 1$, 易找到增益 β_1 和 β_2 使得

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 - 2\beta_2^2}{2\beta_2^3} L - \frac{a_2}{\beta_2^3 L} - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} & \geq L\bar{c}_1, \\ \frac{L\beta_2}{2} - a_1 - \frac{a_1}{\beta_2 \sqrt{2}} & \geq L\bar{c}_1, \end{aligned} \quad (49)$$

其中 \bar{c}_1 是一个正的常数. 因此, 有

$$\dot{V} \leq -L\bar{c}_1 (|\xi| + |z_1|) + L\gamma_4 |e_2|^2. \quad (50)$$

然后, 将不等式(20)代入式(50), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -L\bar{c}_1 \gamma_1^{-\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}} + L\gamma_4 |e_2|^2 = \\ & -L\hat{c}_1 V^{\frac{2}{3}} + L\gamma_4 |e_2|^2. \end{aligned} \quad (51)$$

此外, 由式(24)可知

$$|e_2| \leq \left(\frac{3}{\gamma_2} \right)^{\frac{1}{3}} W^{\frac{1}{3}}. \quad (52)$$

因此,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -L\hat{c}_1 V^{\frac{2}{3}} + L\gamma_4 \left(\frac{3}{\gamma_2} \right)^{\frac{2}{3}} W^{\frac{2}{3}} = \\ & -L\hat{c}_1 V^{\frac{2}{3}} + Lc_3 W^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (53)$$

另一方面, 注意到

$$|z_1| = \left(\frac{3V_1}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}}. \quad (54)$$

将这个不等式代入式(42), 则

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -L\hat{c}_2 W^{\frac{2}{3}} + \frac{(3 + \sqrt{3})a_1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}} = \\ & -L\hat{c}_2 W^{\frac{2}{3}} + c_4 V^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (55)$$

构造总李雅普诺夫函数如下:

$$U(z, e) = V(z) + \gamma W(e), \quad (56)$$

其中 $\gamma = (c_3 + 1)/\hat{c}_2$.

结合式(53)(55), 并选择合适的增益 L , 则

$$\begin{aligned} \dot{U}(z, e) = \dot{V}(z) + \gamma \dot{W}(e) & \leq \\ & - (L\hat{c}_1 - \gamma c_4) V^{\frac{2}{3}} - LW^{\frac{2}{3}} \leq \\ & - \hat{\rho} (V^{\frac{2}{3}} + (\gamma W)^{\frac{2}{3}}) \leq \\ & - \hat{\rho} U^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (57)$$

其中 $\hat{\rho}$ 是一个正的常数.

基于式(57), $U(z, e)$ 会在有限时间内收敛到0. 因此, $V(z)$ 和 $W(e)$ 都将在有限时间内收敛到0, 这意味着本文同时实现了系统状态的有限时间估计和系统的有限时间输出反馈镇定.

回到最初的问题, 即系统(1)的有限时间输出反馈镇定. 根据定理3和坐标变换(5), 可以得到以下结论.

定理 4 对于系统(1), 在假设1条件下, 若将输出反馈控制器设计为

$$u = -L^2 \beta_1 \operatorname{sgn} \left(\left[\frac{\hat{x}_2}{L} \right]^2 + \beta_2^2 x_1 \right), \quad (58)$$

状态观测器设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 & = \hat{x}_2 - Lk_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\hat{x}}_2 & = u - L^2 k_2 [\hat{x}_1 - x_1]^0. \end{aligned} \quad (59)$$

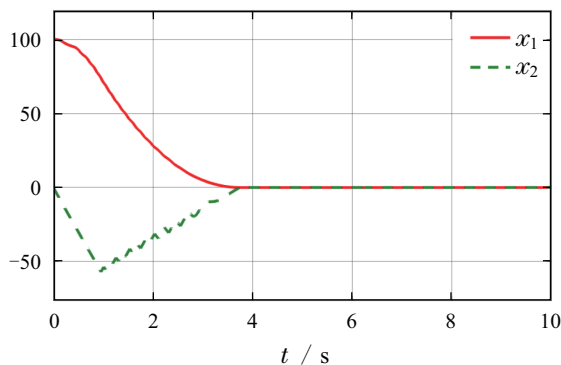
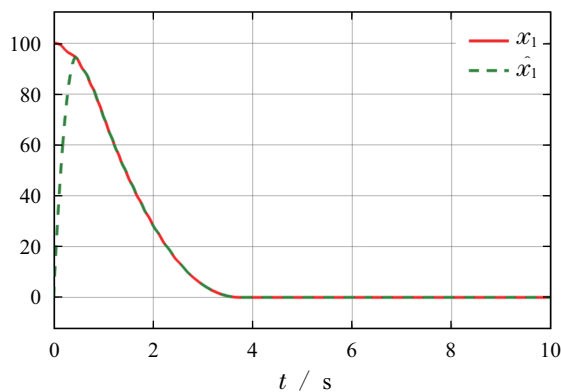
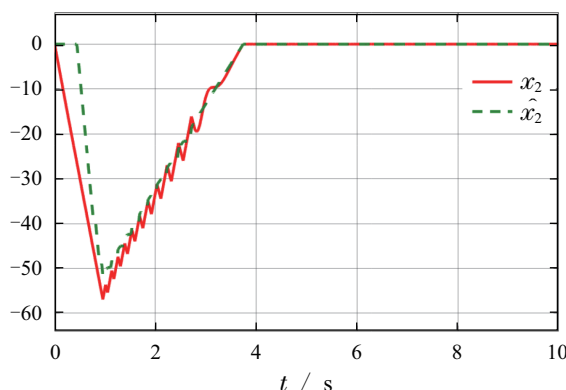
则存在合适的增益 $\beta_1, \beta_2, k_1, k_2$ 和 L 使得整个闭环系统有限时间稳定. 证毕.

4 仿真

在仿真中, 假设系统(1)的不确定动力学和未知外部扰动满足

$$\begin{aligned} f_1 & = (1 + 0.5 \sin t) \sin(x_1 + 0.2\pi) [x_1]^{\frac{1}{2}}, \\ f_2 & = 2 \sin t + \sin(x_1 + 0.2\pi). \end{aligned}$$

则 $|f_1| \leq 1.5|x_1|^{1/2}$ 和 $|f_2| \leq 3$, 满足假设1. 控制增益分别取 $\beta_1 = 15, \beta_2 = 3, k_1 = 20, k_2 = 15$ 和 $L = 2$. 为了更好地表现系统能够全局有限时间输出镇定, 选择较大的输出初值, 即 $y(0) = x_1(0) = 100$. 其它初值选取为 $x_2(0) = 0, \hat{x}_1(0) = 0, \hat{x}_2(0) = 0$. 仿真结果见图1-3, 其中图1是系统状态 x_1 和 x_2 , 图2是系统状态 x_1 及其估计 \hat{x}_1 , 图3是系统状态 x_2 及其估计 \hat{x}_2 . 从图1可知, 系统状态在有限时间内收敛到原点; 由图2和图3可知, 在系统状态镇定的同时, 实现了状态的有限时间观测.

图 1 系统状态 x_1 和 x_2 Fig. 1 System's states x_1 and x_2 图 2 系统状态 x_1 及其估计 \hat{x}_1 Fig. 2 System's state x_1 and its estimate \hat{x}_1 图 3 系统状态 x_2 及其估计 \hat{x}_2 Fig. 3 System's state x_2 and its estimate \hat{x}_2

5 总结

本文研究了一类具有不确定动力学和未知外部扰动的二阶非线性系统的输出镇定问题. 当系统状态可测时, 提出了一种全局状态反馈有限时间控制器. 当只有系统输出可测时, 采用“非分离原理”, 构造了状态观测器和基于观测器的输出反馈控制器, 通过李雅普诺夫函数方法, 证明了整个闭环系统的有限时间稳定性. 最后, 一个仿真实例验证了理论的有效性.

参考文献:

- [1] HAIMO V T. Finite-time controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1986, 24(4): 760 – 770.
- [2] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [3] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric homogeneity with application to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2005, 17(2): 101 – 127.
- [4] QIAN C, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061 – 1079.
- [5] YU S, YU X, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 – 1964.
- [6] YANG Chen, CHENG Yingying, DU Haibo, et al. An adaptive finite-time control algorithm for Buck converter systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(2): 315 – 320.
(杨晨, 程盈盈, 都海波, 等. Buck型变换器自适应有限时间降压控制算法研究. *自动化学报*, 2016, 42(2): 315 – 320.)
- [7] DU H, JIANG C, WEN G, et al. Current sharing control for parallel DC-DC buck converters based on finite-time control technique. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 15(4): 2186 – 2198.
- [8] DING Shihong, LI Shihua. A survey for finite-time control problems. *Control and Decision*, 2011, 26(2): 161 – 169.
(丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述. *控制与决策*, 2011, 26(2): 161 – 169.)
- [9] LI Xuebing, MA Li, DING Shihong. A new second-order sliding mode control and its application to inverted pendulum. *Acta Automation Sinica*, 2015, 41(1): 193 – 202.
(李雪冰, 马莉, 丁世宏. 一类新的二阶滑模控制方法及其在倒立摆控制中的应用. *自动化学报*, 2015, 41(1): 193 – 202.)
- [10] DING S, LI S. Second-order sliding mode controller design with output constraint. *Automatica*, 2020, 112: 108704.
- [11] LI S, DU H, LIN X. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics. *Automatica*, 2011, 47(8): 1706 – 1712.
- [12] LI S, ZHON M, YU X. Design and implementation of terminal sliding mode control method for PMSM speed regulation system. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2013, 9(4): 1879 – 1891.
- [13] UTKIN V I. *Sliding Modes in Control Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [14] EDWARDS C, SPURGEON K S. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. New York: Taylor & Francis, 1998.
- [15] HUANG X, LIN W, YANG B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2005, 41(5): 881 – 888.
- [16] FU J, MA R, CHAI T. Adaptive finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via logic-based switchings. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(11): 5998 – 6003.

- [17] SONG Y, WANG Y, HOLLOWAY J, et al. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, 2017, 83: 243 – 251.
- [18] ZHANG Weijian, DU Haibo, ZHU Wenwu, et al. Finite-time speed sensorless control of permanent magnet synchronous motor based on generalized super-twisting algorithm. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(6): 833 – 841.
(张伟健, 都海波, 朱文武, 等. 基于广义超螺旋算法的无速度传感器永磁同步电机有限时间速度控制. *控制理论与应用*, 2021, 38(6): 833 – 841.)
- [19] DU B, WU S, HAN S, et al. Application of linear active disturbance rejection controller for sensorless control of internal permanent-magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(5): 3019 – 3027.
- [20] HONG Y, HUANG J, XU Y. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305 – 309.
- [21] LI J, QIAN C. Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 879 – 884.
- [22] LI J, QIAN C, DING S. Global finite-time stabilization by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2010, 83(11): 2241 – 2252.
- [23] LEVANT A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 1993, 58(6): 1247 – 1263.
- [24] LEVANT A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 924 – 961.
- [25] CHALANGA A, KAMAL S, FRIDMAN L M, et al. Implementation of super-twisting control: super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(6): 3677 – 3685.
- [26] ZHEN Z, YU C, JIANG S, et al. Adaptive super-twisting control for automatic carrier landing of aircraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(2): 984 – 997.
- [27] FILIPPOV A F. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1988.
- [28] ZHAO Z, JIANG Z. Finite-time output feedback stabilization of lower-triangular nonlinear systems. *Automatica*, 2018, 96: 259 – 269.
- [29] ZHAO Z, JIANG Z, LIU T, et al. Global finite-time output-feedback stabilization of nonlinear systems under relaxed conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(9): 4259 – 4266.
- [30] DING S, LI S. Second-order sliding mode controller design subject to mismatched term. *Automatic*, 2017, 77: 388 – 392.
- [31] HARDY G, LITTLEWOOD J, POLYA G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [32] MORENO A J, OSORIO M. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1035 – 1040.
- [33] SEEBER R, HORN M. Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting. *Automatica*, 2017, 84: 241 – 243.
- [34] CRUZ-ZAVALA E, MORENO J A. Levant's arbitrary-order exact differentiator: a Lyapunov approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(7): 3034 – 3039.

作者简介:

孙训红 硕士研究生, 目前研究方向为非线性控制理论、机器人控制等研究, E-mail: xunhong.sun@mail.hfut.edu.cn;

陈维乐 硕士研究生, 目前研究方向为非线性控制理论及其应用, E-mail: chenweile1997@mail.hfut.edu.cn;

都海波 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性控制理论、电力电子控制等研究, E-mail: haibo.du@hfut.edu.cn;

李世华 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统控制、机电系统建模、分析与控制, E-mail: lsh@seu.edu.cn.