

热-板传输系统的稳定性分析

张 琼[†]

(北京理工大学 数学与统计学院 复杂信息数学表征分析与应用北京市重点实验室, 北京 100081)

摘要: 本文研究由处于相邻区域的板方程和热方程构成的耦合系统的稳定性, 其中耦合来自两个区域的交界面上的传输边界条件. 在该传输系统中, 热方程起着控制器的作用, 且耗散通过交界面传输并影响板方程. 文献[1]证明了在板方程上施加额外的控制器时, 该二维传输系统的能量呈指数衰减. 通过应用频域方法, 椭圆方程的正则性理论等, 可以得到: 仅由热方程的耗散即可使得闭环系统指数稳定. 这一指数稳定的结论与相应的一维传输系统的性质吻合. 最后, 文章还分析了不同传输边界条件下的板-热耦合系统的稳定性.

关键词: 稳定性; 半群; 传输系统; 耦合系统

引用格式: 张琼. 热-板传输系统的稳定性分析. 控制理论与应用, 2022, 39(9): 1587 – 1593

DOI: 10.7641/CTA.2022.10809

Stability analysis of an interaction system coupling plate equation and heat equation

ZHANG Qiong[†]

(Beijing Key Laboratory on MCAACI, School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In this paper, we study the stability of a coupled system which consists of a plate equation and a heat equation in adjacent domains, where the coupling comes from the transmission boundary conditions at the interface of the two domains. The heat equation is considered as the controller of the whole system. The dissipative damping produced in the heat equation affects the plate equation via the boundary connections. It is known that the energy of this two-dimensional system decays exponentially when there is an additional dissipation in the boundary of the plate part^[1]. In this paper, we obtain the exponential stability of the system with dissipation only in heat equation with the help of the frequency domain method, theory of elliptic equations, etc. It is consistent with the stability properties of corresponding one-dimensional beam-heat interaction system. Finally, we also analyze several plate-heat interaction systems with different coupling conditions.

Key words: stability; semigroup; interaction system; coupled system

Citation: ZHANG Qiong. Stability analysis of an interaction system coupling plate equation and heat equation. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(9): 1587 – 1593

1 引言

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界域, Ω_1, Ω_2 是其子区域, 且满足 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ 和 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. 分别记 $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ 的边界为 $\Gamma, \partial\Omega_1, \partial\Omega_2$, 子区域 Ω_1 与 Ω_2 之间的交界面为 γ , 即 $\gamma \doteq \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$. 假设 $\partial\Omega_1 = \gamma, \partial\Omega_2 = \Gamma \cup \gamma$, 且充分光滑. 本文将研究一个由 Ω_1 上的板方程和 Ω_2 上的热方程构成的耦合系统, 其中耦合是通过交界面 γ 上的边界传输条件产生的(如图1所示). 设变量 w, θ 分别描述 Ω_1 上板的位移和 Ω_2 上的温度, 该传输系统的偏微分方程模型如下:

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w = 0, & (x, t) \in \Omega_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \theta_t - \Delta \theta = 0, & (x, t) \in \Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}_1 w = 0, & (x, t) \in \gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}_2 w - w = \partial_{\nu_2} \theta, & (x, t) \in \gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w_t = \theta, & (x, t) \in \gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \theta = 0, & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w(0) = w_0, & x \in \Omega_1, \\ w_t(0) = w_1, & x \in \Omega_1, \\ \theta(0) = \theta_0, & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2021-08-28; 录用日期: 2021-12-29.

[†]通信作者. E-mail: zhangqiong@bit.edu.cn.

本文责任编辑: 郭宝珠.

国家自然科学基金项目(61873036,12131008), 北京市自然科学基金项目(4182059)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873036,12131008) and the Natural Science Foundation of Beijing (4182059).

其中: w_0, w_1, θ_0 是初值, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 是边界算子.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 w &= \Delta w + (1 - \mu)(2\nu_{11}\nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ &\quad \nu_{11}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \nu_{12}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}), \\ \mathcal{B}_2 w &= \partial_{\nu_1} \Delta w + (1 - \mu) \partial_{\tau_1} ((\nu_{11}^2 - \nu_{12}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ &\quad \nu_{11}\nu_{12} (\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2})), \end{aligned}$$

$\nu_i = (\nu_{i1}, \nu_{i2})$ 分别是边界 $\partial\Omega_i$ 上的单位外法向量, $\tau_i = (-\nu_{i2}, \nu_{i1})$ 是 $\partial\Omega_i$ 上的单位切向量, $0 < \mu < \frac{1}{2}$ 是Poisson率.

系统(1)的能量函数定义为

$$E(t) = \frac{1}{2} [\int_{\Omega_1} |w_t(x, t)|^2 dx + \int_{\gamma} |w(x, t)|^2 dx + a(w(x, t)) + \int_{\Omega_2} |\theta(x, t)|^2 dx], \quad (2)$$

其中双线性型 $a(w) = a(w, w)$ 定义为

$$\begin{aligned} a(w_1, w_2) &= \int_{\Omega_1} [\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + \\ &\quad \mu (\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2}) + \\ &\quad 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1 \partial x_2}] dx, \\ &\quad \forall w_1, w_2 \in H^2(\Omega_1). \end{aligned}$$

显然地, 应用Green公式可得

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_{\Omega_1} |\nabla \theta|^2 dx \leq 0. \quad (3)$$

因此系统(1)的能量函数(2)是关于时间 t 的非增函数. 本文将进一步研究当时间充分大时, 系统(1)的能量的衰减性质.

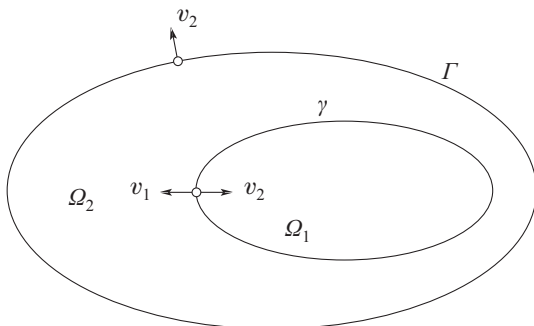


图1 板-热传输系统

Fig. 1 Plate-heat interaction system

耦合系统在工程控制中起着非常重要的作用, 关于耦合系统的控制问题的研究也日益丰富. 许多工程控制上的模型都由耦合无限维系统描述, 譬如声学小室模型、层压材料模型、热弹性系统、粘弹性系统、

流体-结构交互模型、常微分-偏微分方程耦合系统等(见文献[2-11]). 传输系统是由若干居于不同区域上的偏微分方程通过边界条件联结构成的耦合系统, 譬如流体-弹性传输系统可描述潜艇表面与水的交互作用[12-13]. 在基于耦合偏微分系统的控制问题中, 控制器设计与稳定问题一直是该领域的研究热点之一. 在考虑耦合系统的控制问题时, 一般会力求施加最少的控制器达到控制目的. 因此, 传输系统的控制器设计与稳定性分析与各个偏微分子系统的性质, 传输边界条件的设定, 控制器的位置和类型等诸多因素相关. 文献[12-23]等分别考虑了波-板传输系统、热-波传输系统、波-粘弹性波传输系统等稳定和稳定控制问题.

众所周知, 依据能量衰减的速率, 无限维系统的稳定性可分为指数稳定、多项式稳定、对数稳定等. 1992年, 文献[24]提出区域的几何控制条件 (geometric control condition, GCC), 并指出: 当控制区域满足GCC条件时, 具有局部粘性阻尼的波方程是指数稳定的. 最近, 文献[1, 15, 23]等分析了受控区域满足一定几何条件时的系统的稳定性质. 其中文献[1]主要讨论一维和二维板-热传输系统(1), 该文首先分析了相应于式(1)的一维系统的Riesz基性质, 并得到一维板-热系统的解呈指数衰减, 并且具有Gevrey型正则性质. 该文也研究了二维传输系统(1)的指数稳定性, 但是需要两个条件: 1) 在板方程边界上施加一个控制; 2) 区域 $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ 满足合适的几何条件. 因此, 一个自然的问题是: 板方程上的控制器是否为必要的? Ω_2 上的热方程的耗散作用是否足以使得二维系统指数稳定? 本文将就这一问题展开研究, 即讨论保守板方程和热方程构成的耦合系统(1)的长时行为, 证明其能量的指数衰减性质. 此外, 还研究其它传输边界条件下的板-热传输系统的指数稳定性, 从而进一步完善了高维板-热传输系统稳定性的结论. 本文的主要工具包括算子半群指数稳定性的频域判据、椭圆方程的正则性理论、Sobolev空间理论等.

本文的结构如下: 第2节主要研究系统(1)的指数稳定性; 第3节分析具有其它传输边界条件的板-热传输系统, 并提出一些未解决的问题.

2 传输系统的指数稳定性

首先, 定义以下Hilbert空间及其范数, 并以此作为系统的能量空间.

$$\mathcal{H} \doteq H^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2),$$

$$\|Z\|_{\mathcal{H}}^2 = a(w) + \|w\|_{L^2(\gamma)}^2 + \|y\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\theta\|_{L^2(\Omega_2)}^2,$$

$$\forall Z = (w, y, \theta) \in \mathcal{H}.$$

在 \mathcal{H} 上定义一个无界线性算子 \mathcal{A}

$$\mathcal{A}Z = (y, -\Delta^2 w, \Delta \theta), \quad \forall Z = (w, y, \theta) \in D(\mathcal{A}),$$

$$D(\mathcal{A}) = \{(w, y, \theta) \in \mathcal{H} : \Delta^2 w \in L^2(\Omega_1),$$

$$y \in H^2(\Omega_1), \theta \in H^2(\Omega_2) \cap H^1_\Gamma(\Omega_2),$$

$$\mathcal{B}_1 w = 0, \mathcal{B}_2 w - w = \partial_{\nu_2} \theta, y = \theta \text{ on } \gamma,$$

其中 $H^1_\Gamma(\Omega_2) = \{\theta \in H^1(\Omega_2) : \theta = 0 \text{ on } \Gamma\}$. 因此, 令 $Z(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$, 系统(1)可以写为 \mathcal{H} 上的发展方程

$$\dot{Z}(t) = \mathcal{A}Z(t), Z(0) = Z_0 = (w_0, w_1, \theta_0) \in \mathcal{H}. \tag{4}$$

系统(1)的适定性可由经典的半群理论证明^[25]. 事实上, 应用与文献[1]中同样的方法可以得到以下结论:

引理 1 算子 \mathcal{A} 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上的一个 C_0 压缩半群的无穷小生成元, 且有 $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

注 1 在系统(1)中, 交界面 γ 上边界条件中的 $w|_\gamma$ 项是不可缺少的. 因为它使人们可以自然地引入 $H^2(\Omega_1)$ 上的等价范数 $[a(w) + \|w\|_{L^2(\gamma)}^2]^{\frac{1}{2}}$ (见文献[26]第79页或文献[27]).

本文将研究耦合系统(1)的稳定性. 在证明主要结论时, 将用到以下几个引理:

引理 2^[28-29] 假设算子 A 在 Hilbert 空间 H 上生成有界 C_0 半群 e^{At} . 则半群 e^{At} 指数稳定的充要条件是: $\{l \in C | \operatorname{Re} \lambda = 0\} \in \rho(A)$ 以及 $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_H < \infty$.

引理 3^[23,30-31] 令 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ 是给定的点, $m(x) \in x - x_0$. 设 $w \in H^2(\Omega_1)$ 满足 $\Delta^2 w \in L^2(\Omega_1)$, 则以下等式成立:

$$\int_{\Omega_1} \Delta^2 w (m \cdot \nabla w) dx = a(w) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_1} (m \cdot \nu_1) b(w) d\Gamma + \int_{\partial\Omega_1} [\mathcal{B}_2 w \overline{(m \cdot \nabla w)} - \mathcal{B}_1 w \overline{\partial_{\nu_1} (m \cdot \nabla w)}] d\Gamma, \tag{5}$$

其中

$$b(w(x)) = \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2(1 - \mu) \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2.$$

本节的主要结论为:

定理 1 令有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 及其子区域 Ω_1, Ω_2 满足 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ 和 $\partial\Omega_1 = \gamma, \partial\Omega_2 = \Gamma \cup \gamma$. 假设

$$(m \cdot \nu_1)|_\gamma \geq 0, \tag{H}$$

则系统(1)的能量呈指数衰减, 即存在正常数 M, ω , 使得

$$E(t) \leq M e^{-\omega t} E(0), \forall t \geq 0.$$

证 由引理2可知: 若能够证明存在 $r > 0$,

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \|i\lambda Z - \mathcal{A}Z\|_{\mathcal{H}} | Z \in D(\mathcal{A}), \|Z\|_{\mathcal{H}} = 1 \} \geq r, \tag{6}$$

则半群是指数稳定的. 假设式(6)不成立, 则存在满足 $|\lambda_n| > [2\|\mathcal{A}^{-1}\|]^{-1}$ 的实数序列 λ_n 和单位向量序列 $Z_n = (w_n, y_n, \theta_n) \in D(\mathcal{A})$, 使得下式成立:

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})Z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \tag{7}$$

设 $\lambda_n > 0$ (显然该假设不影响证明). 从式(7)可得, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$f_{1,n} \doteq i\lambda_n w_n - y_n \rightarrow 0, \quad H^2(\Omega_1), \tag{8}$$

$$f_{2,n} \doteq i\lambda_n y_n + \Delta^2 w_n \rightarrow 0, \quad L^2(\Omega_1), \tag{9}$$

$$f_{3,n} \doteq i\lambda_n \theta_n - \Delta \theta_n \rightarrow 0, \quad L^2(\Omega_2). \tag{10}$$

此外, 由算子 \mathcal{A} 的耗散性可得 $\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}Z_n, Z_n \rangle_{\mathcal{H}} = -\|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega_2)}^2$, 将其与式(7)结合得到

$$\|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega_2)} \rightarrow 0. \tag{11}$$

由于 $\theta_n|_\Gamma = 0$, 因此

$$\|\theta_n\|_{H^1(\Omega_2)} \rightarrow 0. \tag{12}$$

从式(8)-(9)可知变量 w_n 满足以下边值问题:

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 w_n + \Delta^2 w_n = i\lambda_n f_{1,n} + f_{2,n}, & \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 w_n = 0, & \gamma, \\ \mathcal{B}_2 w_n - w_n = \partial_{\nu_2} \theta_n, & \gamma, \\ i\lambda_n w_n = \theta_n + f_{1,n}, & \gamma. \end{cases} \tag{13}$$

引入线性算子

$$G\phi = \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta^2 \varphi = 0, & \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 \varphi = 0, \mathcal{B}_2 \varphi - \varphi = \phi, & \gamma. \end{cases} \tag{14}$$

应用正则性理论可知^[30,32-34],

$$G \in \mathcal{L}(H^s(\gamma), H^{s+\frac{7}{2}}(\Omega_1)), s \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

定义变量

$$\phi_n \doteq (\mathcal{B}_2 w_n - w_n)|_\gamma, u_n \doteq w_n - G\phi_n. \tag{16}$$

则 u_n 满足

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 u_n + \Delta^2 u_n = V_n, & \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_n = 0, \mathcal{B}_2 u_n - u_n = 0, & \gamma, \\ i\lambda_n u_n = -i\lambda_n G\phi_n + \theta_n + f_{1,n}, & \gamma, \end{cases} \tag{17}$$

其中

$$V_n \doteq \lambda_n^2 G\phi_n + i\lambda_n f_{1,n} + f_{2,n}.$$

下面将证明满足式(7)的向量序列 Z_n 具有以下性质:

$$\|Z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \tag{18}$$

这与 Z_n 是单位向量的假设矛盾, 从而完成定理的证明.

首先, 若序列 λ_n 和单位向量序列 Z_n 满足式(7), 以下引理成立, 该结论的证明将在本节末给出.

引理 4 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 存在正常数 C_1, C_2 , 有

$$\begin{aligned}
& a(u_n) + 2\lambda_n^2 \int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx \leq \\
& 2\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} V_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} dx + \\
& 2(C_1 \lambda_n^2 + C_2) \|u_n\|_{L^2(\gamma)}^2
\end{aligned} \tag{19}$$

和

$$\lambda_n \|G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)} \rightarrow 0, \tag{20}$$

$$\lambda_n \|u_n\|_{L^2(\gamma)} \rightarrow 0, \tag{21}$$

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} V_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} dx \rightarrow 0. \tag{22}$$

将式(21)–(22)代入式(19), 得到

$$a(u_n), \lambda_n \|u_n\|_{L^2(\Omega_1)} \rightarrow 0. \tag{23}$$

因此, 结合式(8)(16)(20) 和式(23),

$$\|y_n\|_{L^2(\Omega_1)} \rightarrow 0. \tag{24}$$

此外, 分别将式(8)与 y_n , 式(9)与 w_n 做内积, 并将所得等式相加可得

$$\begin{aligned}
& a(w_n) + \|w_n\|_{L^2(\gamma)}^2 - \|y_n\|_{L^2(\Omega_1)}^2 = \\
& - \int_{\gamma} \partial_{\nu_2} \theta_n \overline{(i\lambda_n)^{-1}(\theta_n + f_{1,n})} d\Gamma + o(1).
\end{aligned} \tag{25}$$

显然地,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\gamma} \partial_{\nu_2} \theta_n \overline{(i\lambda_n)^{-1}(\theta_n + f_{1,n})} d\Gamma \right| \leq \\
& \lambda_n^{-1} \|\partial_{\nu_2} \theta_n\|_{L^2(\gamma)} (\|\theta_n\|_{H^1(\Omega_2)} + \|f_{1,n}\|_{H^1(\Omega_1)}).
\end{aligned} \tag{26}$$

注意到 θ_n 满足椭圆边值问题

$$\begin{cases} i\lambda_n \theta_n - \Delta \theta_n = f_{3,n}, & \Omega_2, \\ \theta_n = 0, & \Gamma, \\ \theta_n = y_n, & \gamma, \end{cases}$$

因此, 由椭圆边值问题的性质, 迹定理和式(8)可以得到: 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
& \|\partial_{\nu_2} \theta_n\|_{L^2(\gamma)} \leq \\
& C \|\theta_n\|_{H^2(\Omega_2)} \leq \\
& C(\lambda_n \|\theta_n\|_{L^2(\Omega_1)} + \|y_n\|_{H^{\frac{3}{2}}(\gamma)}) + o(1) \leq \\
& C(\lambda_n \|\theta_n\|_{L^2(\Omega_1)} + \lambda_n a(w_n)^{\frac{1}{2}}) + o(1), \quad C > 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

将式(12)与式(27)代入式(26), 并令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\left| \int_{\gamma} \partial_{\nu_2} \theta_n \overline{(i\lambda_n)^{-1}(\theta_n + f_{1,n})} d\Gamma \right| \rightarrow 0. \tag{28}$$

最后, 结合式(12)(24)–(25) 和式(28), 即得到式(18).

证毕.

引理4的证明 1) 首先, 由Green公式和式(5), 可得

$$\int_{\Omega_1} \Delta^2 u_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} dx =$$

$$\begin{aligned}
& a(u_n) + \int_{\gamma} \mathcal{B}_2 u_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} d\Gamma + \\
& \frac{1}{2} \int_{\gamma} (m \cdot \nu_1) b(u_n) d\Gamma
\end{aligned} \tag{29}$$

和

$$\begin{aligned}
& - \lambda_n^2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_1} u_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} dx = \\
& - \frac{1}{2} \lambda_n^2 \int_{\gamma} (m \cdot \nu_1) |u_n|^2 d\Gamma + \lambda_n^2 \int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx.
\end{aligned} \tag{30}$$

因此, 结合式(17)(29)和式(30)得到

$$\begin{aligned}
& a(u_n) + \lambda_n^2 \int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx = \\
& \operatorname{Re} \int_{\Omega_1} V_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} dx + \frac{1}{2} \lambda_n^2 \int_{\gamma} (m \cdot \nu_1) |u_n|^2 d\Gamma - \\
& \operatorname{Re} \int_{\gamma} u_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\gamma} (m \cdot \nu_1) b(u_n) d\Gamma.
\end{aligned}$$

由Cauchy–Schwarz不等式, 存在正常数 C_1, C_2 使得下式成立:

$$\begin{aligned}
& a(u_n) + 2\lambda_n^2 \int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx \leq \\
& 2\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} V_n \overline{(m \cdot \nabla u_n)} dx - \int_{\gamma} (m \cdot \nu_1) b(u_n) d\Gamma + \\
& 2(C_1 \lambda_n^2 + C_2) \int_{\gamma} |u_n|^2 d\Gamma,
\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $C_1 \doteq \max\{|m| : x \in \gamma\}$, $C_2 = C_1^2 C_3^2$, 且 C_3 满足 $\|u\|_{H^1(\gamma)} \leq C_3 \|u\|_{H^2(\Omega)}$. 最后, 应用假设(H)和

$$b(u_n) \geq (1-\mu) \left(\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right),$$

可以从式(31)得到式(19).

2) 由式(15), 并结合交界面上的边界条件可以得到

$$\|G\phi_n\|_{H^s(\Omega_1)} \leq C \|\partial_{\nu_2} \theta_n\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\gamma)}. \tag{32}$$

特别地, 当 $s = 1$ 时,

$$\|G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C \|\partial_{\nu_2} \theta_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq C \|\theta_n\|_{H^{-1}(\Omega_1)}. \tag{33}$$

结合式(10)和式(12)可以得到

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \|\theta_n\|_{H^{-1}(\Omega_1)} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta \theta_n\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \leq \\
& C \lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_n\|_{H^1(\Omega_1)} = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

因此, 从式(33)–(34)证明了式(20).

3) 由式(17)和迹定理可以得到

$$\begin{aligned}
& \lambda_n \|u_n\|_{L^2(\gamma)} \leq \\
& \| -i\lambda_n G\phi_n + \theta_n + f_{1,n} \|_{L^2(\gamma)} \leq \\
& \lambda_n \|G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)} + \|\theta_n\|_{H^1(\Omega_1)} + \|f_{1,n}\|_{H^1(\Omega_1)}.
\end{aligned} \tag{35}$$

将式(8)(12)和式(20)代入上式, 证明了式(21).

4) 由变量 V_n 和 u_n 的定义可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} V_n(\overline{m \cdot \nabla u_n}) dx = \\ & \operatorname{Re} \int_{\Omega_1} (\lambda_n^2 G\phi_n + i\lambda_n f_{1,n} + \\ & f_{2,n}) \overline{(m \cdot \nabla (w_n - G\phi_n))} dx. \end{aligned} \quad (36)$$

首先, 由式(8)(20)以及Cauchy-Schwarz不等式,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^2 |(G\phi_n, m \cdot \nabla w_n)_{L^2(\Omega_1)}| \leq \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)} \|\lambda_n w_n\|_{L^2(\Omega_1)} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

类似地, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^2 |(G\phi_n, m \cdot \nabla G\phi_n)_{L^2(\Omega_1)}| \leq \\ & C \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^2 \|G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)}^2 = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n |(f_{1,n}, m \cdot \nabla w_n)_{L^2(\Omega_1)}| \leq \\ & C \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{1,n}\|_{H^1(\Omega_1)} \|w_n\|_{L^2(\Omega_1)} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n |(f_{1,n}, m \cdot \nabla G\phi_n)_{L^2(\Omega_1)}| \leq \\ & C \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{1,n}\|_{H^1(\Omega_1)} \|\lambda_n G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)} = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |(f_{2,n}, m \cdot \nabla (w_n - G\phi_n))_{L^2(\Omega_1)}| \leq \\ & C \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{2,n}\|_{L^2(\Omega_1)} (\|w_n\|_{H^2(\Omega_1)} + \\ & \|G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)}) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

综上所述, 将式(37)–(41)代入式(36), 式(22)得证. 证毕.

注 2 在板-热传输系统(1)中, 控制为子区域 Ω_2 上的热方程. 容易验证, 满足定理1中的假设的区域 $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ 也满足几何控制条件^[24]. 因此, 定理1中的假设是合理的. 从以上结论可得到, 控制器的类型和控制区域的几何性质均可影响传输系统的稳定性.

3 不同传输条件下的系统

在上一节中, 给出传输系统(1)的指数稳定性质. 本节将研究当交界面 γ 上的耦合条件不同时, 板-热传输系统的稳定性质. 具体地, 将考虑以下偏微分方程模型:

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w = 0, & (x, t) \in \Omega_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \theta_t - \Delta \theta = 0, & (x, t) \in \Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}_1 w = 0, & (x, t) \in \gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}_2 w - w = \Delta \theta, & (x, t) \in \gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w_t = \partial_{\nu_2} \theta, & (x, t) \in \gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \theta = 0, & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w(0) = w_0, w_t(0) = w_1, & x \in \Omega_1, \\ \theta(0) = \theta_0, & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (42)$$

其中二维区域 Ω 及其子区域 Ω_1, Ω_2 均满足第1节的相

关假设. 该系统的能量函数为

$$\begin{aligned} E_1(t) = & \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_1} |w_t(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega_2} |\nabla \theta(x, t)|^2 dx + \right. \\ & \left. a(w(\cdot, t)) + \int_{\gamma} |w(x, t)|^2 d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

直接计算可得

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = - \int_{\Omega_2} |\Delta \theta|^2 dx = - \int_{\Omega_2} |\theta_t|^2 dx \leq 0. \quad (44)$$

首先, 定义能量空间, 将式(42)写为一阶发展方程, 进而考虑系统(42)的稳定性.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 & \doteq H^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1) \times H^1_{\Gamma}(\Omega_2), \\ \|Z\|_{\mathcal{H}_1}^2 & = a(w) + \|w\|_{L^2(\gamma)}^2 + \|y\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \\ & \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega_2)}^2, \quad \forall Z = (w, y, \theta) \in \mathcal{H}_1, \end{aligned}$$

其中 $H^1_{\Gamma}(\Omega_2)$ 如第2节所定义. 在 \mathcal{H}_1 上定义无界线性算子 \mathcal{A}_1

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 Z & = (y, -\Delta^2 w, \Delta \theta), \quad \forall Z = (w, y, \theta) \in D(\mathcal{A}_1), \\ D(\mathcal{A}_1) & = \{(w, y, \theta) \in \mathcal{H}_1 : \Delta^2 w \in L^2(\Omega_1), \\ & y \in H^2(\Omega_1), \Delta \theta \in H^1(\Omega_2), \theta \in H^2(\Omega_2), \\ & \mathcal{B}_1 w = 0, \mathcal{B}_2 w - w = \Delta \theta, y = \partial_{\nu_2} \theta \gamma\}. \end{aligned}$$

因此, 令 $Z(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$, 系统(42)可以写为

$$\dot{Z}(t) = \mathcal{A}_1 Z(t), \quad Z(0) = Z_0 = (w_0, w_1, \theta_0) \in \mathcal{H}_1.$$

容易证明, 算子 \mathcal{A}_1 是 Hilbert 空间 \mathcal{H}_1 上的一个 C_0 半群的无穷小生成元, 且 $0 \in \rho(\mathcal{A}_1)$. 此外, 应用与第2节相同的方法, 可以得到以下指数稳定的结论:

定理 2 假设 $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ 满足定理1中的假设. 则系统(42)的能量呈指数衰减.

证 假设存在满足 $\lambda_n > [2\|\mathcal{A}_1\|]^{-1}$ 的正实数序列 λ_n 和单位向量序列 $Z_n = (w_n, y_n, \theta_n) \in D(\mathcal{A}_1)$, 使得

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_1)Z_n\|_{\mathcal{H}_1} \rightarrow 0. \quad (45)$$

则可以得到序列 w_n, y_n, θ_n 满足式(8)–(9)以及

$$f_{3,n} \doteq i\lambda_n \theta_n - \Delta \theta_n \rightarrow 0 \text{ in } H^1(\Omega_2), \quad (46)$$

$$\Delta \theta_n, \lambda_n \theta_n \rightarrow 0 \text{ in } L^2(\Omega_2). \quad (47)$$

首先, 将式(46)与 θ_n 在 $L^2(\Omega_2)$ 上作内积

$$\int_{\Omega_2} (i\lambda_n |\theta_n|^2 + |\nabla \theta_n|^2) dx - \int_{\gamma} \partial_{\nu_2} \theta_n \bar{\theta}_n d\Gamma \rightarrow 0.$$

将交界面上的边界条件和式(8)(47)代入上式, 得到

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_n\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \leq \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)} \|\theta_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \|w_n\|_{H^1(\Omega_2)} \|\theta_n\|_{L^2(\Omega_2)} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

结合式(47)和式(48)可得

$$\|\theta_n\|_{H^2(\Omega_2)} \rightarrow 0. \quad (49)$$

引入式(16)所定义的变量 ϕ_n, u_n . 得到以下边值问题:

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 u_n + \Delta^2 u_n = V_n, & \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_n = \mathcal{B}_2 u_n - u_n = 0, & \gamma, \\ i\lambda_n u_n = -i\lambda_n G\phi_n + \partial_{\nu_2} \theta_n + f_{1,n}, & \gamma. \end{cases} \quad (50)$$

下面证明引理4中的式(20). 事实上, 注意到

$$\|G\phi_n\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C\|\Delta\theta_n\|_{H^{-\frac{5}{2}}(\gamma)} \leq C\|\theta_n\|_{L^2(\Omega_1)}. \quad (51)$$

再由式(46)和式(47)可知: 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\lambda_n \|\theta_n\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|\Delta\theta_n\|_{L^2(\Omega_1)} \rightarrow 0. \quad (52)$$

因此, 结合上两式即可得到式(20). 显然引理4的其余结论也成立.

将式(8)–(9)分别与 y_n, w_n 作内积, 得到

$$\begin{aligned} a(w_n) + \|w_n\|_{L^2(\gamma)}^2 - \|y_n\|_{L^2(\Omega_1)}^2 = \\ - \operatorname{Re} \int_{\gamma} \Delta\theta_n \overline{(i\lambda_n)^{-1}(\partial_{\nu_2} \theta_n + f_{1,n})} d\Gamma + o(1). \end{aligned} \quad (53)$$

显然地, 从式(46)(49)和迹定理可以得到

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n^{-1} \Delta\theta_n\|_{L^2(\gamma)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_n\|_{L^2(\gamma)} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial_{\nu_2} \theta_n\|_{L^2(\gamma)} = 0. \end{cases} \quad (54)$$

将式(54)代入式(53)得到: 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$a(w_n) + \|w_n\|_{L^2(\gamma)}^2 - \|y_n\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \rightarrow 0. \quad (55)$$

此外, 应用与定理1的证明中同样的方法, 可以证明式(24)成立. 最后, 结合式(24)(49)(55), 再次得到式(18). 证毕.

注3 在定理1和2中, 考虑了两类传输边界条件下板–热传输系统的指数稳定性. 由交界面 γ 上不同的耦合条件可得不同的传输系统, 譬如

$$w = 0, \mathcal{B}_1 w = -\theta, \partial_{\nu_1} w_t = \partial_{\nu_2} \theta, \gamma \quad (56)$$

和

$$\partial_{\nu_1} w = 0, \mathcal{B}_2 w - w = \partial_{\nu_2} \theta, w_t = \theta, \gamma \quad (57)$$

等. 由于乘子等式(19)中的高阶边界项无法估计, 具有式(56)或式(57)等传输条件的板–热耦合系统的稳定性还有待继续探索.

注4 本文证明了传输系统(1)和(42)的指数稳定性, 这类高维传输系统的解的正则性问题亟待解决, 将在今后的工作中继续研究.

参考文献:

- [1] ZHANG Q, WANG J, GUO B. Stabilization of the Euler-Bernoulli equation via boundary connection with heat equation. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2014, 26(2): 77 – 118.
- [2] CASTRO C, ZUAZUA E. Exact boundary controllability of two Euler-Bernoulli beams connected by a point mass. *Mathematical and Computer Modelling*, 2000, 32(9): 955 – 969.
- [3] LI T T, RAO B. Criteria of Kalman's type to the approximate controllability and the approximate synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2016, 54(1): 49 – 72.
- [4] LIU Z, RAO B, ZHANG Q. Polynomial stability of the Rao-Nakra beam with a single internal viscous damping. *Journal of Differential Equations*, 2020, 269(7): 6125 – 6162.
- [5] LIU Z, STROGDON S A, YONG J. Modeling and analysis of a laminated beam. *Mathematical and Computer Modelling*, 1999, 30(1/2): 149 – 167.
- [6] OSSES A, PUEL J P. Approximate controllability for a linear model of fluid structure interaction. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1999, 4(4): 497 – 513.
- [7] RAO B. Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, 36(1): 148 – 163.
- [8] WANG J, GUO B. Analyticity and dynamic behavior of a three-layer damped sandwich beam. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2008, 137(12): 675 – 689.
- [9] WANG J, REN B, KRSTIC M. Stabilization and Gevrey regularity of a Schrödinger equation in boundary feedback with a heat equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 179 – 185.
- [10] XU G, YUNG S, LI L. Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2006, 12(4): 770 – 785.
- [11] ZHANG Q, GUO B. Stabilization of an elastic plate with viscoelastic boundary conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004, 122(3): 669 – 690.
- [12] ZHANG X, ZUAZUA E. Polynomial decay and control of a 1-D hyperbolic-parabolic coupled system. *Journal of Differential Equations*, 2004, 204(2): 380 – 438.
- [13] ZHANG X, ZUAZUA E. Asymptotic behavior of a hyperbolic-parabolic coupled system arising in fluid-structure interaction. *International Series of Numerical Mathematics*, 2006, 154(1): 445 – 455.
- [14] LASIECKA I. *Mathematical Control Theory of Coupled PDEs*. Philadelphia: SIAM, 2002.
- [15] AMMARI K, NICAISE S. Stabilization of a transmission wave/plate equation. *Journal of Differential Equations*, 2010, 249(3): 707 – 727.
- [16] BATTY C, PAUNONEN L, SEIFERT D. Optimal energy decay for the wave-heat system on a rectangular domain. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2018, 51(2): 808 – 819.
- [17] GUO Y, WANG J, ZHAO D. Energy decay estimates for a two-dimensional coupled wave-plate system with localized frictional damping. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2019, 100(2): 1 – 30.
- [18] HASSINE F. Logarithmic stabilization of the Euler-Bernoulli transmission plate equation with locally distributed Kelvin-Voigt damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, 455(2): 1765 – 1782.
- [19] LIU K, RAO B. Exponential stability for the wave equation with local Kelvin-Voigt damping. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2006, 57(3): 419 – 432.

- [20] LIU Z, ZHANG Q. Stability of a string with local Kelvin-Voigt damping and non-smooth coefficient at interface. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, 54(4): 1859 – 1871.
- [21] LIU Z, RAO B. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2005, 56(7): 630 – 644.
- [22] LIU K, LIU Z, ZHANG Q. Eventual differentiability of a string with local Kelvin-Voigt damping. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2017, 30(5): 443 – 454.
- [23] ZHANG Q. Polynomial decay of an elastic/viscoelastic waves interaction system. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2018, 69(6): 60 – 88.
- [24] BARDOS C, LEBEAU G, RAUCH J. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1992, 30: 1024 – 1065.
- [25] PAZY A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [26] LAGNESE J. *Boundary Stabilization of Thin Plates*. Philadelphia: SIAM, 1989.
- [27] ZHANG Q, HUANG F. Analyticity of thermoelastic plates with dynamical boundary conditions. *Science in China (A)*, 2003, 33(2): 114 – 123.
- [28] HUANG F. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Annal of Differential Equations*, 1985, 1(1): 43 – 56.
- [29] PRÜSS P. On the spectrum of C_0 -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1984, 284(2): 847 – 857.
- [30] AVALOSY G, LASIECKA I. Exponential stability of a thermoelastic system with free boundary conditions without mechanical dissipation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1998, 29(1): 155 – 182.
- [31] KOMORNIK V. *Exact Controllability and Stabilization: The Multiplier Method*. Research in Applied Mathematics. New York: Wiley-Masson, 1994.
- [32] GILBARG D, TRUDINGER N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [33] LIONS J, MAGENES E M. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. New York: Springer-Verlag, 1972.
- [34] GRISVARD P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. London: Pitman, 1985.

作者简介:

张 琼 北京理工大学数学与统计学院教授, 博士生导师. 主持国家自然科学基金青年、面上项目, 国家自然科学基金重点项目子课题, 北京市自然科学基金面上项目等. 担任北京交叉科学学会理事, 中国仿真学会不确定性系统分析与仿真专委会委员. 研究方向为分布参数系统控制理论、算子半群理论及其应用、偏微分方程解的渐近分析. E-mail: zhangqiong@bit.edu.cn.