

短时延广义网络控制系统的最优指数 H_∞ 控制

周红艳¹, 张 钊^{2,4†}, 陈雪波¹, 李 华³

(1. 辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051; 2. 辽宁科技大学 计算机与软件工程学院, 辽宁 鞍山 114051;

3. 辽宁科技大学 工商管理学院, 辽宁 鞍山 114051; 4. 流程工业综合自动化国家重点实验室(东北大学), 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 本文基于标称点方法, 研究了广义网络控制系统在短时变时延条件下的最优指数 H_∞ 控制问题. 为了减小网络诱导时延对系统保守性的影响, 系统首先被建模为一个具有范数有界不确定项的离散时间系统. 然后基于线性矩阵不等式技术和李雅普诺夫稳定性判据, 给出使得系统指数稳定的一般和最优 H_∞ 状态反馈控制器的存在条件和设计方法. 最后通过3个算例证明了本文工作的有效性.

关键词: 广义系统; 网络控制系统; 指数稳定; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

引用格式: 周红艳, 张钊, 陈雪波, 等. 短时延广义网络控制系统的最优指数 H_∞ 控制. 控制理论与应用, 2023, 40(4): 673 – 682

DOI: 10.7641/CTA.2022.10846

Optimal exponential H_∞ control for singular networked control systems with short delay

ZHOU Hong-yan¹, ZHANG Zhao^{2,4†}, CHEN Xue-bo¹, LI Hua³

(1. School of Electronics and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning 114051, China;

2. School of Computer Science and Software Engineering,

University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning 114051, China;

3. School of Business Administration, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning 114051, China;

4. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries (Northeastern University), Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: In this paper, the optimal exponential H_∞ control problem for singular networked control systems with short time-varying delay is studied by using the nominal point method. The system is first modeled as a discrete-time system with norm-bounded uncertainties in order to reduce the influence of network-induced delay on the system conservativeness. Then, the existence condition and the design method of a general and an optimal H_∞ state feedback controller are given respectively based on the linear matrix inequality technique and the Lyapunov stability criterion. These controllers enable the system to be exponentially stable. Finally, three numerical examples are delivered to verify the validity of the work in this paper.

Key words: singular systems; networked control systems; exponentially stable; H_∞ control; linear matrix inequality

Citation: ZHOU Hongyan, ZHANG Zhao, CHEN Xuebo, et al. Optimal exponential H_∞ control for singular networked control systems with short delay. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 673 – 682

1 引言

网络控制系统 (networked control systems, NCSs) 是控制回路通过网络进行连接的反馈控制系统^[1–3]. 由于系统中的网络带宽受到物理限制, 因此导致网络诱导时延的产生无法避免^[1]. 网络诱导时延的存在对系统的性能将造成很大的影响, 甚至导致系统的失稳. 因此, 对于具有时延的NCSs的研究始终是控制领域

的一个研究热点^[1–5].

广义系统区别于传统意义的正常系统, 它可以对现实世界中的客观系统进行更加自然地描述. 广义系统常见于现实世界中, 并且已经广泛应用于经济学理论、电子电路理论、奇异摄动理论和大系统理论等^[6–7]. 文献[8]对具有短时变时延的广义NCSs的稳定与镇定问题进行了研究. 文献[9]对一类由分数布朗

收稿日期: 2021–09–06; 录用日期: 2022–06–30.

†通信作者. E-mail: zhangzhao333@hotmail.com; Tel.: +86 412-5929816.

本文责任编辑: 岳东.

国家自然科学基金项目(71771112), 流程工业综合自动化国家重点实验室开放课题基金资助项目(PAL–N201801), 辽宁科技大学优秀人才培养项目(2019RC05)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (71771112), the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries Fundamental Research Funds (PAL–N201801) and the Excellent Talent Training Project of University of Science and Technology Liaoning (2019RC05).

运动驱动的时滞马尔科夫跳变广义系统的量化反馈控制问题进行了研究.

然而,在实际应用中,大多数系统总是存在着模型不确定性以及外界不确定因素的干扰.因此,在保证系统的稳定性与可镇定性的基础上,研究系统的鲁棒性具有十分重要的意义.鲁棒控制自问世以来,迅速得到广大学者的关注和重视,始终是控制领域的一个研究热点^[3,10-12].文献[6]对具有不确定性的广义随机马尔科夫跳变系统的滑模控制问题进行了研究.文献[13]基于观测器和输出反馈研究了一类不确定非线性广义系统的自适应神经控制问题.文献[14]基于线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)技术对离散广义系统的容许性和鲁棒镇定性进行了探讨.文献[15-16]对广义NCSs的 H_∞ 状态反馈控制问题进行了研究.文献[17-18]对广义NCSs的 H_∞ 动态输出反馈控制问题进行了探讨.然而,在文献[15-18]中,执行器均采用时间方式驱动,人为地加大了时延.文献[19]分别给出了具有固定时延的广义NCSs的 H_∞ 状态反馈控制器和动态输出反馈控制器的设计方法.文献[20]研究了具有固定时延和数据包丢失的广义NCSs的 H_∞ 控制问题.但是,由于在文献[19-20]中,作者都假设网络诱导时延是固定时延,因此其结果保守性较大,且限制了其应用的范围.文献[21]基于标称点方法对具有短时变时延的广义NCSs的指数保性能控制问题进行了研究.然而据作者所知,目前还没有学者使用标称点方法对具有短时变时延的广义NCSs的 H_∞ 控制问题进行研究.

本文使用标称点方法,对具有短时变时延的广义NCSs的最优指数 H_∞ 控制问题进行了探讨.首先,使用标称点方法建立NCSs模型,从而减小了网络诱导时延对系统保守性的影响.其次,基于李雅普诺夫稳定性定理和LMI技术,给出了一般和最优的指数 H_∞ 状态反馈控制器存在的条件和设计方法.最后,所提策略的有效性通过3个仿真算例加以验证.

2 问题描述

本文考虑如下广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + H\omega(t), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(t) = \phi(t), t \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: 向量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, 向量 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入, 向量 $w(t) \in \mathbb{R}^q$ 为外部输入扰动, 且满足 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, 向量 $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输出; $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是实数奇异矩阵, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 是系数矩阵; $\phi(t)$ 是初值函数.

系统采样周期为常数 $h > 0$. 首先给出如下假设:

假设1 系统(1)是正则的, 且无脉冲的.

假设2 系统(1)中采用时间驱动的网络节点为传感器; 采用事件驱动的网络节点为执行器和控制器. 网络诱导时延 $\tau(k) = \tau_{sc}(k) + \tau_{ca}(k)$ 是短时变时延, 满足 $0 \leq \tau_L \leq \tau(k) \leq \tau_U \leq h$, ($\tau_U \neq 0$).

注1 在文献[15-18]中, 执行器采用时间方式驱动, 而非事件方式驱动, 众所周知时间方式驱动需要时钟同步, 并且需要等到相应的时刻点才动作, 从而人为地加大了时延, 即令 $\tau(k) = h$, 而在本文中假设执行器采用事件驱动, 从而克服了上述缺点.

由假设1可知, 一定存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得

$$\begin{cases} PEQ = \text{diag}\{I_r, 0\}, PB = [B_1^T \ B_2^T]^T, \\ PAQ = \text{diag}\{A_1, I_{n-r}\}, \\ PH = [H_1^T \ H_2^T]^T, CQ = C_d. \end{cases} \quad (2)$$

令 $\bar{x}(t) = Q^{-1}x(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t)]^T$, 其中 $x_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$. 系统(1)等价于如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u(t) + H_1w(t), \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} 0 = x_2(t) + B_2u(t) + H_2w(t), \end{cases} \quad (3b)$$

$$\begin{cases} y(t) = C_d\bar{x}(t), \end{cases} \quad (3c)$$

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = Q^{-1}\phi(t), t \leq 0. \end{cases} \quad (3d)$$

从 kh 到 $(k+1)h$ 对式(3a)积分, 可得

$$\begin{aligned} x_1((k+1)h) &= \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A_1((k+1)h-s)} B_1u(s)ds + \\ &\quad \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A_1((k+1)h-s)} H_1w(s)ds + \\ &\quad e^{A_1h}x_1(kh), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $x_1(kh)$, $u(kh)$ 和 $w(kh)$ 分别记为 $x_1(k)$, $u(k)$ 和 $w(k)$. 由假设2可知, 在每个采样区间内, $u(t)$ 都是一个分段常数. 它可以表示为

$$u(t) = \begin{cases} u(k-1), & kh < t \leq kh + \tau(k), \\ u(k), & kh + \tau(k) < t \leq (k+1)h, \end{cases} \quad (5)$$

因此, 由式(3)-(5), 本文所考虑的广义NCSs被建模为如下离散时间系统:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \bar{A}_1x_1(k) + \bar{B}_{10}(\tau(k))u(k) + \\ \quad \bar{B}_{11}(\tau(k))u(k-1) + \bar{H}_1w(k), \\ x_2(k+1) = -B_2u(k) - H_2w(k+1), \\ y(k) = C_d\bar{x}(k), \\ \bar{x}(k) = Q^{-1}\phi(k), k = -1, 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\bar{A}_1 = e^{A_1h}$, $\bar{H}_1 = \int_0^h e^{A_1s}dsH_1$, 并且

$$\bar{B}_{10}(\tau(k)) = \int_0^{h-\tau(k)} e^{A_1s}dsB_1, \quad (7)$$

$\bar{B}_{11}(\tau(k)) = \int_{h-\tau(k)}^h e^{A_1s}dsB_1$. 显然, 可以得到

$$\bar{B}_1 \triangleq \bar{B}_{10}(\tau(k)) + \bar{B}_{11}(\tau(k)) = \int_0^h e^{A_1 s} ds B_1. \quad (8)$$

在本文中, 采用如下状态反馈控制器:

$$u(k) = K\bar{x}(k) = KQ^{-1}x(k), \quad (9)$$

因此, 可以将系统(6)改写为如下系统:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = (A_d + \bar{B}_{d0}(\tau(k))K)\bar{x}(k) + \\ \quad \bar{B}_{d1}(\tau(k))K\bar{x}(k-1) + H_d\bar{w}(k), \\ y(k) = C_d\bar{x}(k), \\ \bar{x}(k) = Q^{-1}\phi(k), k = -1, 0, \end{cases} \quad (10)$$

其中: $A_d = \text{diag}\{\bar{A}_1, 0\}$, $H_d = \text{diag}\{\bar{H}_1, -H_2\}$, $\bar{w}(k) = [w^T(k) \ w^T(k+1)]^T$, 且

$$\bar{B}_{d0}(\tau(k)) = [\bar{B}_{10}^T(\tau(k)) \ -B_2^T]^T, \quad (11)$$

$$\bar{B}_{d1}(\tau(k)) = [\bar{B}_{11}^T(\tau(k)) \ 0]^T. \quad (12)$$

令 $\tau_N \in [\tau_L, \tau_U]$ 是一个已知的标称点. 定义

$$\delta(\tau(k), \tau_N, k) \triangleq \tau(k) - \tau_N. \quad (13)$$

在本文中, 将 $\delta(\tau(k), \tau_N, k)$ 简写为 δ . 显然可以得到

$$\delta \in [\tau_L - \tau_N, \tau_U - \tau_N]. \quad (14)$$

将式(13)代入式(7), 可以得到

$$\bar{B}_{10}(\tau(k)) = B_{10} + D\Theta(\delta)B_1, \quad (15)$$

其中: $D = e^{A_1(h-\tau_N)}$, $\Theta(\delta) \triangleq \int_0^{-\delta} e^{A_1 s} ds$, 且 $B_{10} = \bar{B}_{10}(\tau_N)$. 由式(8)(15), 可以得到

$$\bar{B}_{11}(\tau(k)) = B_{11} - D\Theta(\delta)B_1, \quad (16)$$

其中 $B_{11} = \bar{B}_{11}(\tau_N)$. 将式(15)代入式(11), 可得

$$\bar{B}_{d0}(\tau(k)) = B_{d0} + M\Theta(\delta)B_1,$$

其中 $B_{d0} = [B_{10}^T - B_2^T]^T$, $M = [D^T \ 0]^T$. 将式(16)代入式(12), 可得 $\bar{B}_{d1}(\tau(k)) = B_{d1} - M\Theta(\delta)B_1$, 其中 $B_{d1} = [B_{11}^T \ 0]^T$. 因此, 系统(10)可改写为如下系统:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \hat{A}_0(\delta)\bar{x}(k) + H_d\bar{w}(k) + \\ \quad \hat{A}_1(\delta)\bar{x}(k-1), \\ y(k) = C_d\bar{x}(k), \\ \bar{x}(k) = Q^{-1}\phi(k), k = -1, 0, \end{cases} \quad (17)$$

其中:

$$\hat{A}_0(\delta) = A_d + (B_{d0} + M\Theta(\delta)B_1)K, \quad (18)$$

$$\hat{A}_1(\delta) = (B_{d1} - M\Theta(\delta)B_1)K. \quad (19)$$

在式(17)中指数不确定项 $\Theta(\delta)$ 是唯一的时变项. 由文献[1]可知, 当 δ 满足式(13)时, $\Theta(\delta)$ 是范数有界的, 即

$$\sup \|\Theta(\delta)\| \triangleq \min_{\tau_L \leq \tau_N \leq \tau_U} \max_{\tau_L - \tau_N \leq \delta \leq \tau_U - \tau_N} \|\Theta(\delta)\| \leq \sigma. \quad (20)$$

给出计算上确界 σ 和相对应的 τ_N 的两种方法.

方法1 令 $s = -t$, 则 $\Theta(\delta) = \|\int_0^\delta e^{-A_1 s} ds\|$. 令 $-A_1 = A'_1$, 则

$$\Theta(\delta) = \|\int_0^\delta e^{A'_1 s} ds\|. \quad (21)$$

已知矩阵 A_1 是 r 阶方阵, A_1 的全部特征值的最大实部为 γ_1 , $-A_1$ 的全部特征值的最大实部为 γ_2 . 对矩阵 A_1 舒尔(Schur)分解, 即存在正交矩阵 S , 严格上三角矩阵 T 和对角矩阵 Λ , 使得 $S^T A_1 S = \Lambda + T$ 成立. 显然, A'_1 的全部特征值的最大实部为 γ_2 , $-A'_1$ 的全部特征值的最大实部为 γ_1 . 对矩阵 A'_1 舒尔(Schur)分解, 即 $S^T A'_1 S = \Lambda' + T'$, 其中: $\Lambda' = -\Lambda$ 是对角矩阵, $T' = -T$ 是严格上三角矩阵.

由式(21)和文献[22]中引理3, 可知

$$\|\Theta(\delta)\| \leq \hat{\sigma}(\delta) = \sum_{k=0}^{r-1} \|T\|^k \sigma_1(\delta), \quad (22)$$

其中

$$\sigma_1(\delta) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{\gamma_2}\right)^{k+1} + \frac{e^{\gamma_2 \delta}}{\gamma_2} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i \delta^{k-i}}{\gamma_2^i (k-i)!}, & \text{若 } \delta \geq 0, \gamma_2 \neq 0; \\ \left(\frac{-1}{\gamma_1}\right)^{k+1} + \frac{e^{\gamma_1 |\delta|}}{\gamma_1} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i |\delta|^{k-i}}{\gamma_1^i (k-i)!}, & \text{若 } \delta < 0, \gamma_1 \neq 0; \\ \frac{|\delta|^{k+1}}{(k+1)!}, & \text{其他.} \end{cases}$$

由式(22), 对于给定的 $\tau_N = \hat{\tau}_N$, 可以得到

$$\|\Theta(\delta)\| \leq \max_{\tau_L - \hat{\tau}_N \leq r \leq \tau_U - \hat{\tau}_N} \hat{\sigma}(r),$$

为了减小保守性, 希望 $\max_{\tau_L - \hat{\tau}_N \leq r \leq \tau_U - \hat{\tau}_N} \hat{\sigma}(r)$ 的值越接近 $\|\Theta(\delta)\|$ 的真实值越好. 因此, 可以通过求解以下优化问题来求取 $\hat{\tau}_N$:

$$\min_{\tau_L \leq s \leq \tau_U} \max_{\tau_L - s \leq r \leq \tau_U - s} \hat{\sigma}(r). \quad (23)$$

由式(22)可知, 当 $r \geq 0$ 时, $\hat{\sigma}(r)$ 随着 r 的增加而单调递增; 当 $r < 0$ 时, $\hat{\sigma}(r)$ 随着 $|r|$ 的增加而单调递增, 即 $\hat{\sigma}(r)$ 随着 r 的增加而单调递减. 因此, 式(23)可以化简为

$$\hat{\sigma}_{\min} = \min_{\tau_L \leq s \leq \tau_U} \max\{\hat{\sigma}(\tau_L - s), \hat{\sigma}(\tau_U - s)\}. \quad (24)$$

通过式(24), 可以计算出 $\tau_N = \hat{\tau}_N$, 以及对应的 σ 值, 即 $\sigma = \hat{\sigma}_{\min} = \hat{\sigma}(\tau_L - \hat{\tau}_N) = \hat{\sigma}(\tau_U - \hat{\tau}_N)$.

方法2 显然, $\|A_1\| = 0$ 当且仅当 $A_1 = 0$. 因此, 对于任意实际广义系统, $\|A_1\| \neq 0$ 均成立. 所以, 由文献[11]中引理1, 可知

$$\|\Theta(\delta)\| \leq \tilde{\sigma}(\delta) = \frac{e^{|\delta|\|A_1\|} - 1}{\|A_1\|}, \quad (25)$$

令 $\tau_N = \tilde{\tau}_N$, 则 $\|\Theta(\delta)\| \leq \max_{\tau_L - \tilde{\tau}_N \leq r \leq \tau_U - \tilde{\tau}_N} \tilde{\sigma}(r)$. 为了降

低系统保守性, 希望 $\max_{\tau_L - \tilde{\tau}_N \leq r \leq \tau_U - \tilde{\tau}_N} \tilde{\sigma}(r)$ 的值越接近 $\|\Theta(\delta)\|$ 的真实值越好. 因此, 可以通过求解以下优化问题来求取 $\tilde{\tau}_N$:

$$\min_{\tau_L \leq s \leq \tau_U} \max_{\tau_L - s \leq r \leq \tau_U - s} \tilde{\sigma}(r). \quad (26)$$

显然, $\tilde{\sigma}(r)$ 随着 $|r|$ 的增加单调递增. 因此, 式(26)可化简为 $\tilde{\sigma}_{\min} = \min_{\tau_L \leq s \leq \tau_U} \max\{\tilde{\sigma}(\tau_L - s), \tilde{\sigma}(\tau_U - s)\}$. 由式

$$(25) \text{ 有 } \tilde{\sigma}(r) = \tilde{\sigma}(-r), \text{ 则 } \tau_N = \tilde{\tau}_N = \frac{1}{2}(\tau_L + \tau_U) \text{ 和 相 对 应 的 } \sigma = \tilde{\sigma}_{\min} = \tilde{\sigma}(\tau_L - \tilde{\tau}_N) = \tilde{\sigma}(\tau_U - \tilde{\tau}_N) = \frac{e^{\frac{1}{2}(\tau_U - \tau_L)\|A_1\|} - 1}{\|A_1\|}.$$

因此, 由方法1和方法2可知, 当 δ 满足式(14)时, 指数不确定项 $\Theta(\delta)$ 是范数有界的. 并且, 可以通过使用方法1(或方法2), 得到 $\sigma = \tilde{\sigma}_{\min}$ (或 $\sigma = \tilde{\sigma}_{\min}$) 和相对应的 $\tau_N = \hat{\tau}_N$ (或 $\tau_N = \tilde{\tau}_N$), 使得式(20)成立.

3 控制器设计

在设计控制器之前, 首先给出如下2个定义^[3].

定义1 当且仅当系统(17)在 $\bar{w}(k) \equiv 0$ 时的任意解满足 $\|\bar{x}(k)\|^2 \leq \alpha \beta^{k-k_0} \phi_m^2, \forall 0 \leq k_0 \leq k$, 则称系统(17)是指数稳定的, 其中: 衰减系数 $\alpha > 0$, 衰减率 $\beta \in (0, 1)$, 并且

$$\phi_m = \max\{\|Q^{-1}\phi(-1)\|, \|Q^{-1}\phi(0)\|\}.$$

定义2 对于系统(17), 若其满足如下2个条件:

- 1) 当 $\bar{w}(k) \equiv 0$ 时, 系统(17)是指数稳定的;
- 2) 在零初始条件下, 对于任意的 $\bar{w}(k) \neq 0$, 并且 $\bar{w}(k) \in L_2[0, \infty)$, 标量 $\gamma > 0$, $y(k)$ 满足

$$\sum_{k=0}^N \|y(k)\|^2 \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N \|\bar{w}(k)\|^2, \quad (27)$$

则称系统(17)具有 H_∞ 范数界 γ 指数稳定.

定理1 给定标量 $\gamma > 0$ 和控制器(9), 如果存在适维矩阵 $P_1 > 0, P_2 > 0$ 和标量 $\alpha > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 + C_d^T C_d & * & * \\ 0 & -P_2 & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \\ A_d + B_{d0} K & B_{d1} K & H_d \\ 0 & 0 & 0 \\ B_1 K & -B_1 K & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -P_1^{-1} & * & * \\ \alpha \sigma M^T & -\alpha I & * \\ 0 & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

成立, 则具有外部扰动 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 和状态反馈

控制器(9)的系统(17)具有 H_∞ 范数界 γ 指数稳定.

证 1) 首先证明系统(17)满足式(27).

选择李雅普诺夫泛函如下:

$$V(k) = \bar{x}^T(k) P_1 \bar{x}(k) + \bar{x}^T(k-1) P_2 \bar{x}(k-1). \quad (29)$$

其中适维矩阵 $P_1 > 0$ 和 $P_2 > 0$. 沿着系统(17)的状态轨线, 可以得到

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\ &\bar{x}^T(k+1) P_1 \bar{x}(k+1) + \bar{x}^T(k) P_2 \bar{x}(k) - \\ &\bar{x}^T(k) P_1 \bar{x}(k) - \bar{x}^T(k-1) P_2 \bar{x}(k-1) = \\ &\hat{x}^T(k) \Xi_1 \hat{x}(k), \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\hat{x}(k) = [\bar{x}^T(k) \quad \bar{x}^T(k-1) \quad \bar{w}^T(k)]^T$,

$$\Xi_1 = [\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta) \quad H_d]^T P_1 [\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta) \quad H_d] + \text{diag}\{P_2 - P_1, -P_2, 0\}.$$

令 $J = \sum_{k=0}^N (y^T(k) y(k) - \gamma^2 \bar{w}^T(k) \bar{w}(k))$. 由零初始条件和式(30), 可得

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^N (y^T(k) y(k) - \gamma^2 \bar{w}^T(k) \bar{w}(k) + \Delta V(k)) - \\ &V(N+1) \leq \\ &\sum_{k=0}^N (y^T(k) y(k) - \gamma^2 \bar{w}^T(k) \bar{w}(k) + \Delta V(k)) = \\ &\sum_{k=0}^N (\bar{x}^T(k) C_d^T C_d \bar{x}(k) - \gamma^2 \bar{w}^T(k) \bar{w}(k) + \\ &\hat{x}^T(k) \Xi_1 \hat{x}(k)) = \sum_{k=0}^N \hat{x}^T(k) \Xi_2 \hat{x}(k), \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\Xi_2 = [\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta) \quad H_d]^T P_1 [\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta) \quad H_d] + \text{diag}\{P_2 - P_1 + C_d^T C_d, -P_2, -\gamma^2 I\}$. 由式(31), 如果 $\Xi_2 < 0$, 则式(27)成立, 即系统(17)满足定义2中条件2). 以下将给出 $\Xi_2 < 0$ 的证明.

根据Schur补引理, $\Xi_2 < 0$ 当且仅当

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} P_2 - P_1 + C_d^T C_d & * & * & * \\ 0 & -P_2 & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ \hat{A}_0(\delta) & \hat{A}_1(\delta) & H_d & -P_1^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

由式(18)(19)和上式, 可得

$$\begin{aligned} \Xi_3 &= \begin{bmatrix} P_2 - P_1 + C_d^T C_d & * & * & * \\ 0 & -P_2 & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ A_d + B_{d0} K & B_{d1} K & H_d & -P_1^{-1} \end{bmatrix} + \\ &\varphi + \varphi^T < 0, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\varphi = [0 \ 0 \ 0 \ \sigma M^T]^T \frac{\Theta(\delta)}{\sigma} [B_1 K \quad -B_1 K \ 0 \ 0]$.

由文献[1], 可知 $\Theta(\delta)\Theta(\delta)^T/\sigma^2 \leq I$. 由文献[11]中引理2、式(32)成立, 当且仅当存在标量 $\alpha > 0$ 使得式(28)成立. 因此, 系统(17)满足定义2中条件2).

2) 以下证明系统(17)满足定义2中条件1).

对于系统(17), 令 $\bar{w}(k) \equiv 0$. 选用与式(29)相同的李雅普诺夫泛函, 可知

$$\Delta V(k) = \tilde{x}^T(k)\Xi_4\tilde{x}(k), \quad (33)$$

其中: $\Xi_4 = \text{diag}\{P_2 - P_1, -P_2\} + [\hat{A}_0(\delta) \hat{A}_1(\delta)]^T \times P_1[\hat{A}_0(\delta) \hat{A}_1(\delta)]$, $\tilde{x}(k) = [\bar{x}^T(k) \bar{x}^T(k-1)]^T$.

由式(28), 可得 $\Xi_4 < 0$. 当 $w(t) \equiv 0$ 时, 由式(33)可得系统(17)渐近稳定, 并可得到

$$\Delta V(k) \leq -\beta_1 \|\bar{x}(k)\|^2, \quad (34)$$

其中 $\beta_1 = \lambda_{\min}(-\Xi_4) > 0$. 由式(29), 可得

$$V(k) \leq \beta_2 (\|\bar{x}(k)\|^2 + \|\bar{x}(k-1)\|^2), \quad (35)$$

其中 $\beta_2 = \max\{\lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2)\} > 0$.

以 β_1 和 β_2 为系数, 构造如下关于 θ 的方程:

$$\beta_2(\theta - 1) - \beta_1\theta + \beta_2(\theta - 1)\theta = 0, \quad (36)$$

因为标量 $\beta_1 > 0$ 和 $\beta_2 > 0$, 所以方程(36)始终存在解 $\theta > 1$. 由这个 $\theta > 1$ 的解, 以及式(34)–(35), 可得

$$\begin{aligned} \theta^{k+1}V(k+1) - \theta^kV(k) &= \\ \theta^{k+1}\Delta V(k) + \theta^k(\theta - 1)V(k) &\leq \\ \alpha_1(\theta)\theta^k\|\bar{x}(k)\|^2 + \alpha_2(\theta)\theta^k\|\bar{x}(k-1)\|^2, \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta) = \beta_2(\theta - 1) - \beta_1\theta, \\ \alpha_2(\theta) = \beta_2(\theta - 1). \end{cases} \quad (38)$$

由式(36)(38), 可得

$$\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta)\theta = 0. \quad (39)$$

对任意的整数 $\bar{k} \geq 2$, 对式(37)的两侧同时由0到 $\bar{k} - 1$ 累加求和, 可得

$$\begin{aligned} \theta^{\bar{k}}V(\bar{k}) - V(0) &\leq \alpha_1(\theta) \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k)\|^2 + \\ &\alpha_2(\theta) \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k-1)\|^2. \end{aligned} \quad (40)$$

需要指出的是

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k-1)\|^2 &= \\ \theta^0 \|\bar{x}(-1)\|^2 + \theta \sum_{l=0}^{\bar{k}-2} \theta^l \|\bar{x}(l)\|^2 &\leq \\ \phi_m^2 + \theta \sum_{l=0}^{\bar{k}-1} \theta^l \|\bar{x}(l)\|^2. \end{aligned} \quad (41)$$

由式(39)–(41), 可以得到

$$\theta^{\bar{k}}V(\bar{k}) \leq$$

$$\begin{aligned} V(0) + \alpha_2(\theta)\phi_m^2 + (\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta)\theta) \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k)\|^2 = \\ V(0) + \alpha_2(\theta)\phi_m^2. \end{aligned} \quad (42)$$

由式(29)(35), 可知

$$\begin{cases} V(\bar{k}) \geq \lambda_{\min}(P_1) \|\bar{x}(\bar{k})\|^2, \\ V(0) \leq 2\beta_2\phi_m^2. \end{cases} \quad (43)$$

由式(42)–(43), 可以得到

$$\|\bar{x}(\bar{k})\|^2 \leq \frac{\alpha_2(\theta) + 2\beta_2}{\lambda_{\min}(P_1)} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\bar{k}} \phi_m^2. \quad (44)$$

综上所述, 根据定义1和式(44), 系统(17)指数稳定, 即满足定义2中条件1). 因此, 得到具有外部输入扰动 $\bar{w}(k) \in L_2[0, \infty)$ 和状态反馈控制器(9)的系统(17)具有范数界 γ 指数稳定. 证毕.

注2 由式(33), 当 $\bar{w}(k) \equiv 0$ 时, 如果系统(17)稳定, 则 $\Xi_4 < 0$. 由于 $P_1 > 0$ 和 $P_2 > 0$, 所以 $\Xi_4 < 0$ 成立, 则有 $\Xi_4^{11} = \hat{A}_0(\delta)^T P_1 \hat{A}_0(\delta) + P_2 - P_1 < 0$. 因此, $\hat{A}_0(\delta)^T P_1 \hat{A}_0(\delta) - P_1 < 0$. 上式若成立, 则 $\hat{A}_0(\delta)$ 的特征值应全部位于单位圆内. 令 $K = [K_1 \ K_2]$, 可得

$$\hat{A}_0(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 + \bar{B}_{10}(\tau(k))K_1 & \bar{B}_{10}(\tau(k))K_2 \\ -B_2K_1 & -B_2K_2 \end{bmatrix}.$$

由式(7)可知, 当 $\tau(k) \equiv h$ 时, $\hat{A}_0(\delta)$ 将变为常数矩阵

$$\hat{A}_0(\delta)|_{\tau(k) \equiv h} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ -B_2K_1 & -B_2K_2 \end{bmatrix}.$$

此时由于分块矩阵 $\hat{A}_0(\delta)|_{\tau(k) \equiv h}$ 的右上角是0矩阵, 由矩阵理论, 可知它的特征值将由 $\bar{A}_1$ 和 $-B_2K_2$ 的特征值组成. 显然此时控制器无法对 $\bar{A}_1$ 施加控制作用, 若要求系统(17)稳定, 则必然要求 $\bar{A}_1$ 的特征值全部位于单位圆内, 即 A_1 的特征值全部具有负实部, 否则系统(17)将无法稳定. 因此如果 $\bar{A}_1$ 有不在单位圆内的特征值, 即 A_1 有非负实部特征值时, 为了使系统(17)有可能稳定, 则 $\tau(k)$ 不能恒为 h . 在文献[15–16]中, 由于作者令 $\tau(k) = h$, 因此极大地限制了其所给出方法的适用性.

在式(28)中同时存在矩阵 P_1 和 P_1^{-1} , 式(28)不能使用LMI技术进行求解. 因此给出如下定理.

定理2 给定标量 $\gamma > 0$ 和控制器(9), 如果存在标量 $\alpha > 0$, 以及适维矩阵 $Q_1 > 0$ 和 $Q_2 > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} Q_2 - Q_1 & * & * & * \\ 0 & -Q_2 & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ \Pi_{41} & B_{d1}KQ_1 & H_d & -Q_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\sigma M^T \\ B_1KQ_1 & -B_1KQ_1 & 0 & 0 \\ C_dQ_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\alpha I & * & * \\ 0 & -\alpha I & * \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

成立, 其中 $\Pi_{41} = A_d Q_1 + B_{d0} K Q_1$, 则具有外部输入扰动 $\bar{w}(k) \in L_2[0, \infty)$ 和状态反馈控制器(9)的系统(17)具有 H_∞ 范数界 γ 指数稳定。

证 由Schur补引理, 式(28)等价于

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 & * & * & * \\ 0 & -P_2 & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ A_d + B_{d0} K & B_{d1} K & H_d & -P_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \sigma M^T \\ B_1 K & -B_1 K & 0 & 0 \\ C_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (46)$$

令 $Q_1 = P_1^{-1}$ 和 $Q_2 = P_1^{-1} P_2 P_1^{-1}$, 在式(46)两端分别左乘和右乘 $\text{diag}\{P_1^{-1}, P_1^{-1}, I, I, I, I, I\}$, 可得式(45)成立. 因此, 具有外部输入扰动 $\bar{w}(k) \in L_2[0, \infty)$ 和状态反馈控制器(9)的系统(17)具有 H_∞ 范数界 γ 指数稳定. 证毕.

对于给定的状态反馈控制器(9), 可以由定理2验证系统(17)的稳定性. 下面给出定理对系统(17)的镇定问题进行研究.

定理3 给定标量 $\gamma > 0$, 如果存在标量 $\alpha > 0$, 以及适维矩阵 $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ 和 Q_3 , 使得

$$\begin{bmatrix} Q_2 - Q_1 & * & * & * \\ 0 & -Q_2 & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ \Upsilon_{41} & B_{d1} Q_3 & H_d & -Q_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \sigma M^T \\ B_1 Q_3 & -B_1 Q_3 & 0 & 0 \\ C_d Q_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\alpha I & * & * \\ 0 & -\alpha I & * \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (47)$$

成立, 其中 $\Upsilon_{41} = A_d Q_1 + B_{d0} Q_3$, 则具有外部输入扰动 $\bar{w}(k) \in L_2[0, \infty)$ 的系统(17)具有 H_∞ 范数界 γ 指数稳定, 并且其控制增益为 $K = Q_3 Q_1^{-1}$.

证 在式(46)中, 令 $Q_3 = K Q_1$, 可以得到式(47)成立. 所以, 具有外部输入扰动 $\bar{w}(k) \in L_2[0, \infty)$ 的系统(17)是具有 H_∞ 范数界 γ 指数稳定的, 并且其状态反馈控制增益为 $K = Q_3 Q_1^{-1}$. 证毕.

注3 由定理3, 系统(17)的最优 H_∞ 控制问题可以演化为求解最优化问题: $\min_{s.t. \text{式(47)}} \beta$, 其中 $\beta = \gamma^2$. 因此可以通过 $\gamma_{\min} = \sqrt{\beta_{\min}}$ 得到 γ 的最优值.

4 仿真算例

4.1 算例1

考虑广义系统^[15-16] $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1.32 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 0.79 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, $C = [-0.1 \ 0.1]$, $h=1$ s, $\tau_L = 0$ s, $\tau_U = 1$ s, $\gamma = 0.95$ 和 $w(t) = \begin{cases} 0.1, & 0 \leq t \leq 8 \text{ s}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 此

系统显然满足假设1. 令矩阵 $P = Q = I_2$, 由式(9)可得 $u(k) = K \bar{x}(k) = K x(k)$. 由式(2), 可得 $A_1 = -2.25$, $B_1 = 1.32$, $B_2 = 0.3$, $H_1 = 0.79$, $H_2 = 0.1$ 和 $C_d = [-0.1 \ 0.1]$.

由定理3研究系统(17)的镇定问题. 由方法1可得 $\tau_N = 0.7365$ s, $\sigma = 0.3597$, $K = [-0.0074 \ 0.0000]$; 由方法2可得 $K = [-0.0111 \ -0.0000]$, $\tau_N = 0.5$ s, $\sigma = 0.9245$. 由方法1和方法2所得状态轨迹 $x(k)$ 和在每个采样时刻的 $\tau(k)$ 分别如图1和图2所示.

由注3研究系统(17)的最优 H_∞ 控制问题. 由方法1和方法2均可得 $K = [-0.0095 \ 0.0005]$, $\gamma_{\min} = 0.0366$.

在文献[15-16]中, 由于作者假设执行器以时间方式进行驱动, 而不是以事件方式进行驱动, 众所周知时间驱动需要时钟同步, 并且需要等到相应的时刻点才能动作, 从而人为地加大了时延, 即 $\tau(k) = h$, 进而牺牲了系统的保守性. 本文假设执行器采用事件驱动, 而非时间驱动, 从而克服上述缺点, 并在建模过程中充分考虑了由 $\tau(k)$ 所引起的指数不确定项 $\Theta(\delta)$ 对系统保守性所造成的影响. 文献[15-16]的仿真结果如

图3所示. 对比图1、图2和图3, 不难发现本文所取得
的控制效果好于文献[15–16].

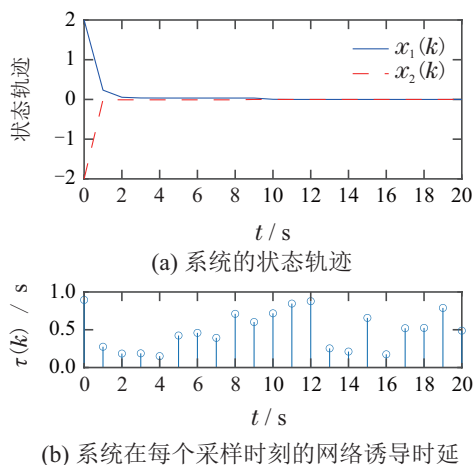


图1 算例1基于方法1的仿真结果

Fig. 1 Simulation results based on Method 1 in Example 1

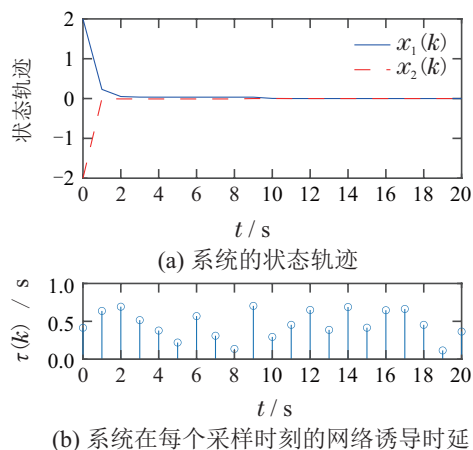


图2 算例1基于方法2的仿真结果

Fig. 2 Simulation results based on Method 2 in Example 1

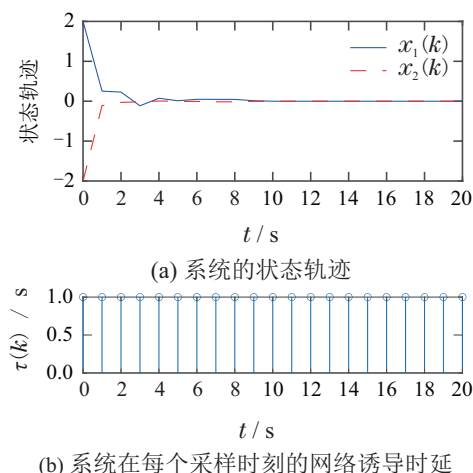


图3 文献[15–16]中的仿真结果

Fig. 3 Simulation results in [15–16]

在算例1中, A_1 的特征值是其本身, 具有负实部.
 $\bar{A}_1 = 0.1054$, 其特征值在单位圆内. 因此, 由注2可知,

当 $\tau(k) \equiv h$ 时, 系统(17)将可以镇定. 此时, $\tau_N = h$ 和
 $\sigma = 0$. 依据注3, 可得 $\gamma_{\min} = 0.0365$, 控制器增益 $K =$
 $[-0.0015 \ 0.0005]$.

4.2 算例2

文献[7]中的一个单回路电路如图4所示, 选取电
阻 $R = 1 \ \Omega$, 电感 $L = 1 \ \text{H}$ 和电容 $C_0 = 1 \ \text{F}$, 它们对应
的电压分别为 $V_R(t)$, $V_L(t)$ 和 $V_C(t)$, 令控制输入为电
源电压 $V_S(t)$, 由Kirchoff定律和电路原理, 得到描述
系统的方程组如下:

$$\begin{cases} L\dot{I}(t) = V_L(t), \\ \dot{V}_C(t) = \frac{1}{C_0}I(t), \\ RI(t) = V_R(t), \\ V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) = V_S(t). \end{cases} \quad (48)$$

选取状态向量 $x(t) = [I(t) \ V_L(t) \ V_C(t) \ V_R(t)]^T$
和输入向量 $u(t) = V_S(t)$. 式(48)可写成广义系统(1)
形式, 显然满足假设1, 其中:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

令 $y(t) = V_C(t) = Cx(t)$, 则 $C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$. 考虑电源
电压中存在扰动, 令 $H = -B$. 选取变换矩阵如下:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由式(2), 可得形如式(3)的等价系统, 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = H_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_d = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$

令 $h = 0.5 \ \text{s}$, $\tau_L = 0.1 \ \text{s}$, $\tau_U = 0.4 \ \text{s}$, $\gamma = 1.5$,
 $\bar{x}(0) = \bar{x}(-1) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$,

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 4 \ \text{s} \leq t \leq 6 \ \text{s}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (49)$$

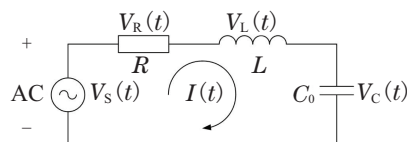


图4 单回路电路

Fig. 4 Single loop circuit

由定理3研究系统(17)的镇定问题. 使用方法1可
得 $\tau_N = 0.2554 \ \text{s}$, $\sigma = 0.1610$ 和

$$K = [-0.0759 \ -0.0278 \ -0.0000 \ 0].$$

由式(9), 可以得到系统(1)的控制器增益为

$$KQ^{-1} = [-0.0759 \quad -0.0000 \quad -0.0278 \quad 0].$$

使用方法2可得 $\tau_N = 0.25$ s, $\sigma = 0.1698$ 和

$$K = [-0.0747 \quad -0.0274 \quad -0.0000 \quad 0].$$

由式(9), 可以得到系统(1)的控制器增益为

$$KQ^{-1} = [-0.0747 \quad -0.0000 \quad -0.0274 \quad 0].$$

由方法1和方法2所得状态轨迹 $x(k)$ 和在每个采样时刻的 $\tau(k)$ 分别如图5和图6所示.

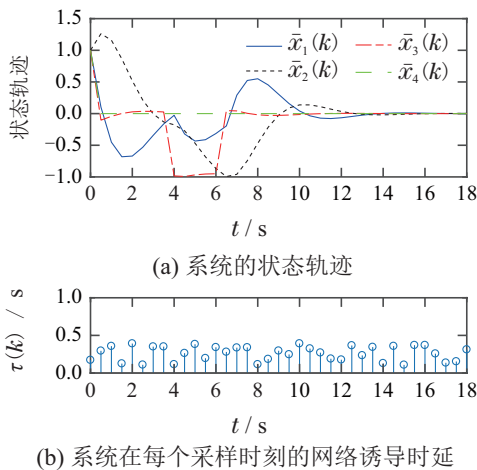


图5 算例2基于方法1的仿真结果

Fig. 5 Simulation results based on Method 1 in Example 2

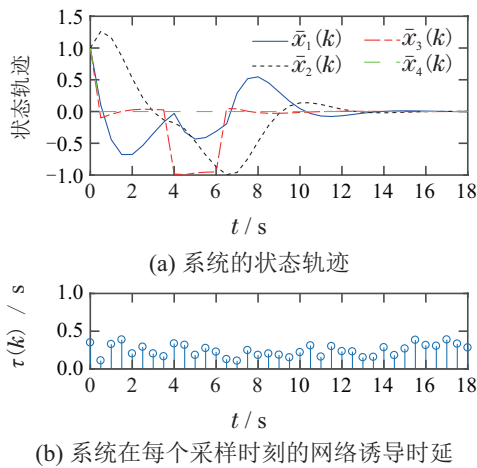


图6 算例2基于方法2的仿真结果

Fig. 6 Simulation results based on Method 2 in Example 2

由注3研究系统(17)的最优 H_∞ 控制问题. 由方法1得 $K = 10^{-4} \times [-0.3056 \quad -0.0858 \quad -0.0000 \quad 0]$, $\gamma_{\min} = 1.1489$. 使用方法2可以得到 $\gamma_{\min} = 1.1490$, $K = 10^{-4} \times [-0.3642 \quad -0.0892 \quad -0.0000 \quad 0]$.

采用算例2中给出的系统参数, 使用文献[16]中的定理3求取状态反馈控制率, 经过MATLAB数值仿真无法求出可行解. 考虑参数 γ 对系统的影响, 令步长为1, 取 γ 由2增大到1000, 经过MATLAB数值仿真仍然无法求出可行解. 从而进一步验证了本文的有效性.

在文献[19–20]中, 作者所选用算例的状态方程与本文算例2具有相同的参数 E , A 和 B , 只是 H 略有不同. 由于文献[19–20]均假设网络诱导时延是固定不变的, 而不是时变的, 所以限制了其应用范围. 根据文献[21]中的注1可知, 当网络诱导时延是时变时延时, 由于方阵 A_1 具有一对共轭复数特征值 $-0.5000 \pm j0.8660$, 那么传统的通过调整一些自由参数的方法将不再适用, 而本文所采用的标称点方法有效地解决了这一问题.

在算例2中, A_1 的特征值全部具有负实部. $\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.5182 & -0.3773 \\ 0.3773 & 0.8956 \end{bmatrix}$, 其特征值为 $0.7069 \pm j0.3268$, 显然均在单位圆内. 因此, 由注2可知, 当 $\tau(k) \equiv h$ 时, 系统(17)将可以镇定. 此时, $\tau_N = h$ 和 $\sigma = 0$. 根据注3可得 $\gamma_{\min} = 1.1489$, 控制器 $K = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$. 本文将广义NCSs建模为具有范数有界不确定性的时不变离散广义系统(17), 即将时变的 $\tau(k)$ 对系统的影响转化为系统的参数不确定性. 当 $\tau(k) \equiv h$ 为定时延时, 系统(17)将退化为时不变离散广义系统, 其不再具有参数不确定性. 由于系统自身的电路特性, 所以此时无需对系统施加控制作用, 系统亦能稳定.

4.3 算例3

考虑如下广义系统:

$$E = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$B_2 = H_2 = 1, C = I_4$. 令 $P = Q = I_4$, 则上述系统满足假设1. A_1 的特征值分别为: 0.5, -0.5 和 -1 . 选取 $h = 0.5$ s, $\tau_L = 0$ s, $\tau_U = 0.1$ s, 系统(17)的初始状态 $\bar{x}(0) = \bar{x}(-1) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ 和外部输入扰动(49).

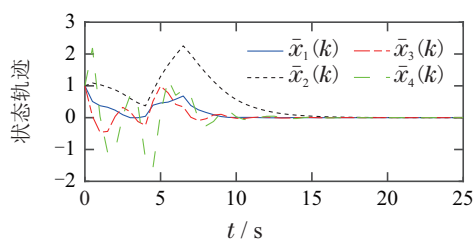
在本算例中, 因为 A_1 有正特征值, 则由注1和注2可知, 文献[15–16]所给出的方法不适用于本算例.

由注3研究系统(17)的最优 H_∞ 控制问题. 由方法1可得 $\tau_N = 0.0503$ s, $\sigma = 0.0523$, $\gamma_{\min} = 4.7382$, $K = [0.0651 \ 0.0207 \ -2.2747 \ -0.0000]$. 由方法2可得 $K = [0.0827 \ 0.0314 \ -2.2687 \ -0.0002]$, $\sigma = 0.0519$, $\tau_N = 0.05$ s, $\gamma_{\min} = 4.7278$. 使用方法1和方法2所得状态轨迹 $x(k)$ 和在每个采样时刻的 $\tau(k)$ 分别如图7和图8所示.

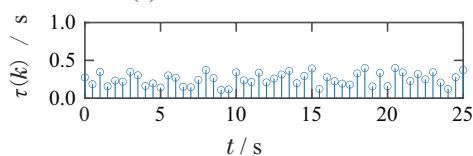
在本例中, A_1 有正特征值, 即 $\bar{A}_1$ 有特征值在单位圆外. 由注2可知, 当 $\tau(k) = h$ 时, 系统(17)将无法镇定. 受到文献[1–5]的启发, 以下对系统的稳定域做简要探讨.

若令 $\gamma = 5$, $\tau_L = 0$ s, τ_U 由0 s以步长0.0001 s逐渐

增大, 由定理3求取使系统(17)可镇定的 τ_U 最大值. 使用方法1, 可得 τ_U 最大值为0.1128 s. 使用方法2, 可得 τ_U 最大值为0.1136 s. 若令 $\tau(k) = \tau_0$ 是定时延, 即 $\tau_L = \tau_U = \tau_0$, τ_0 由0 s以步长0.0001 s逐渐增大, 由定理3求取使系统(17)可镇定的 τ_0 最大值为0.1424 s.



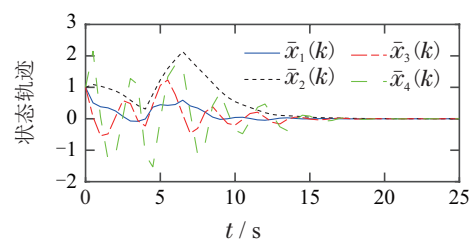
(a) 系统的状态轨迹



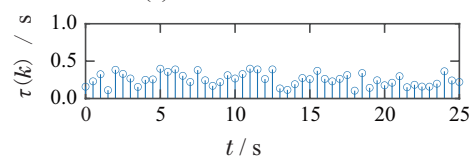
(b) 系统在每个采样时刻的网络诱导时延

图7 算例3基于方法1的仿真结果

Fig. 7 Simulation results based on Method 1 in Example 3



(a) 系统的状态轨迹



(b) 系统在每个采样时刻的网络诱导时延

图8 算例3基于方法2的仿真结果

Fig. 8 Simulation results based on Method 2 in Example 3

5 结论

本文研究了广义NCSs在短时变时延条件下的最优指数 H_∞ 控制问题. 在LMI框架下, 给出一般和最优的指数 H_∞ 状态反馈控制器存在的条件和设计方法. 通过算例证明, 本文有效地解决了现有方法加大网络诱导时延导致系统性能下降的问题.

参考文献:

- [1] ZHANG H, ZHANG Z, WANG Z, et al. New results on stability and stabilization of networked control systems with short time-varying delay. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(12): 2772–2781.
- [2] ZHANG Z, WANG Z, CHEN X, et al. Improved results on BIBO stability and stabilization of networked control systems with short time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(17): 7699–7716.
- [3] ZHANG Z, ZHANG H, WANG Z, et al. Non-fragile exponential H_∞ control for a class of nonlinear networked control systems with short time-varying delay via output feedback controller. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(8): 2008–2019.
- [4] ZHANG W A, YU L. BIBO stability and stabilization of networked control systems with short time-varying delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(3): 295–308.
- [5] ZHANG W A, YU L. A robust control approach to stabilization of networked control systems with short time-varying delays. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(1): 87–91.
- [6] ZHANG Q, LI L, YAN X G, et al. Sliding mode control for singular stochastic markovian jump systems with uncertainties. *Automatica*, 2017, 79: 27–34.
- [7] DUAN G R. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. New York: Springer, 2010.
- [8] ZHOU H, LI H, ZHANG Z, et al. Stability analysis of singular networked control systems with short time-varying delay. *Proceedings of the 3rd World Conference on Mechanical Engineering and Intelligent Manufacturing*. Shanghai: IEEE, 2020: 631–634.
- [9] XIE J, MENG J, KAO Y, et al. Quantized feedback control for markovian jumping singular systems driven by fractional brownian motions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(15): 7498–7512.
- [10] SHI T, SHI P, WANG S. Robust sampled-data model predictive control for networked systems with time-varying delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(6): 1758–1768.
- [11] ZHANG Z, ZHANG H, WANG Z. Non-fragile robust control for networked control systems with long time-varying delay, randomly occurring nonlinearity, and randomly occurring controller gain fluctuation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(1): 125–142.
- [12] ZHOU T, ZHANG Y. On the stability and robust stability of networked dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(6): 1595–1600.
- [13] CHEN J, LIN C, CHEN B, et al. Observer-based adaptive neural control for a class of nonlinear singular systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(10): 4043–4058.
- [14] ZHANG Xuefeng, JIN Kaijing. Admissibility and robust stabilization of discrete singular systems based on LMI. *Journal of the Northeast University (Natural Science)*, 2021, 42(4): 463–468, 477. (张雪峰, 靳凯净. 基于LMI的离散广义系统的容许性和鲁棒镇定性. 东北大学学报(自然科学版), 2021, 42(4): 463–468, 477.)
- [15] LIU Lili. *Stability analysis of singular networked control systems and singular time-delay systems*. Shenyang: Northeastern University, 2010. (刘丽丽. 广义网络控制系统与广义时滞系统的稳定性分析. 沈阳: 东北大学, 2010.)
- [16] LIU Lili, ZHANG Qingling, DU Zhaoping. Robust H_∞ control of singular networked control systems with time-delay. *Journal of the Northeast University (Natural Science)*, 2008, 29(7): 917–919. (刘丽丽, 张庆灵, 杜昭平. 具有时延的广义网络控制系统的鲁棒 H_∞ 控制. 东北大学学报(自然科学版), 2008, 29(7): 917–919.)
- [17] WANG Yanfeng. *Stability analysis and controller design for some classes of networked control systems*. Shenyang: Northeastern University, 2012. (王燕峰. 若干类网络控制系统稳定性分析及控制器设计. 沈阳: 东北大学, 2012.)
- [18] WANG Yanfeng, JING Yuanwei, ZHANG Siying, et al. Robust H_∞ control for a kind of singular networked control system with short

- time-delay. *Journal of the Northeast University (Natural Science)*, 2011, 32(5): 609 – 613.
(王燕锋, 井元伟, 张嗣瀛, 等. 一类短时延的广义网络控制系统的鲁棒 H_∞ 控制. 东北大学学报(自然科学版), 2011, 32(5): 609 – 613.)
- [19] QIU Z, SHI L. H-infinite controller design of singular networked control systems. *Intelligent Control and Automation*, 2014, 5(1): 24 – 34.
- [20] QIU Zhanzhi, ZHAO Lina, SHI Lei. H_∞ controller design for singular networked control systems with data packet dropout. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2015, 10(1): 120 – 130.
(邱占芝, 赵丽娜, 石磊. 有数据包丢失奇异网络控制系统 H_∞ 控制器设计. 智能系统学报, 2015, 10(1): 120 – 130.)
- [21] ZHOU Hongyan, ZHANG Zhao, CHEN Xuebo, et al. Guaranteed cost control for exponential stability of singular networked control systems with short delay. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(1): 178 – 184.
(周红艳, 张钊, 陈雪波, 等. 短时延广义网络控制系统的指数保性能控制. 控制理论与应用, 2023, 40(1): 178 – 184.)
- [22] SUH Y S. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems. *Automatica*, 2008, 44(12): 3222 – 3226.

作者简介:

周红艳 博士研究生, 目前研究方向为广义网络控制系统, E-mail: zhou321yan@163.com;

张钊 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为信息物理系统、人工智能和鲁棒控制, E-mail: zhangzhao333@hotmail.com;

陈雪波 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂群体系统的分解与控制、群体机器人控制与路径规划和人类群体理性意识涌现与非理性行为抑制, E-mail: xuebochen@126.com;

李华 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为计量经济模型、投资决策分析和优化模型及应用, E-mail: lh1@ustl.edu.cn.