

# 切换拓扑下非线性多智能体系统自适应神经网络一致性

王庆领<sup>†</sup>, 王雪娆

(东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

**摘要:** 本文研究一类具有未知控制系数的非线性多智能体系统自适应神经网络分布式控制策略. 首先, 针对切换拓扑下具有未知控制系数的非线性多智能体系统一致性问题, 提出一类自适应神经网络一致性控制算法. 其中, 采用神经网络函数逼近方法解决系统中的不确定性问题, 并设计一项自适应光滑项处理有界扰动和神经网络函数逼近误差. 随后, 证明了切换拓扑下具有未知控制系数的非线性多智能体系统的一致性, 并保证了闭环系统的有界性. 此外, 本文把相关的一致性算法扩展到了一般有向图含有一个有向生成树的情形. 最后, 通过仿真实例验证了本文所提算法的有效性.

**关键词:** 切换拓扑; 未知控制系数; 神经网络; 一致性

**引用格式:** 王庆领, 王雪娆. 切换拓扑下非线性多智能体系统自适应神经网络一致性. 控制理论与应用, 2023, 40(4): 633 – 640

DOI: 10.7641/CTA.2022.10847

## Adaptive NN consensus of nonlinear multi-agent systems under switching topologies

WANG Qing-ling<sup>†</sup>, WANG Xue-rao

(School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** This paper develops an adaptive neural network (NN) distributed control strategy for the nonlinear multi-agent systems (MASs) with nonidentical unknown control coefficients (UCCs). Specifically, the adaptive NN consensus control algorithms are first proposed to deal with the consensus problem of nonlinear MASs with nonidentical UCCs under switching topologies, where the nonlinear system uncertainty is solved by the technique of NN function approximation method, and the bounded disturbance and the approximated error of NN are handled by an adaptive smooth term. Then, it is proved that the consensus of nonlinear MASs with nonidentical UCCs can be achieved with the designed algorithm, and the boundedness of closed-loop systems is ensured. In addition, we extend the correlative consensus algorithm to the case where a general directed graph contains a directed spanning tree. Finally, the simulation examples under different network topologies are presented to verify the effectiveness of the proposed adaptive NN consensus control algorithms.

**Key words:** switching topologies; unknown control coefficients; neural network; consensus

**Citation:** WANG Qingling, WANG Xuerao. Adaptive NN consensus of nonlinear multi-agent systems under switching topologies. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 633 – 640

## 1 引言

在过去的几十年中, 多智能体系统的协同控制算法设计问题受到了广泛的关注<sup>[1-4]</sup>. 它的一个主要特点是智能体之间可以利用局部信息, 通过执行单个控制器来完成全局任务<sup>[5-7]</sup>. 近年来, 一些研究人员致力于针对具有未知控制系数的多智能体系统设计分布式控制算法<sup>[8-10]</sup>, 以实现其一致性. 由于在实际应用中, 多智能体系统模型的控制系数可能无法提前获取<sup>[11-12]</sup>, 因此在设计一致性控制算法时, 考虑未知控

制系数问题是十分必要的. 然而, 如何处理未知控制系数是一个棘手问题. 在文献[13]中, 作者首次提出了Nussbaum型函数来处理具有未知控制系数的非线性系统稳定性问题, 随后, 该方法常被用于处理具有未知控制系数的多类系统<sup>[14-16]</sup>.

近期, 由于多智能体系统引起了人们的广泛关注, 带有未知控制系数的多智能体系统协同控制问题也成为一个新的研究热点. 如何处理多智能体系统的多个未知控制系数不等同是一个难题, 因为要同时处理

收稿日期: 2021-09-07; 录用日期: 2022-05-17.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: qlwang@seu.edu.cn; Tel.: +86 15295588075.

本文责任编辑: 刘志新.

国家自然科学基金项目(61973074, 62111530149)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973074, 62111530149).

多个不同的Nussbaum型函数. 在文献[17]的工作中, 解决该问题需要假设所有的未知控制系数都是完全相同的. 在文献[18]中, 则要求未知控制系数是部分已知的, 而且需要使用全局的网络信息. 综上所述, 在已有文献中, 往往需要未知控制系数是完全相同或者部分已知的. 为了解决未知控制系数不等同的问题, 文献[19]的作者建议对每个智能体都设计一个局部Lyapunov函数, 这样就不需要同时处理多个Nussbaum型函数. 在该方法的启发下, 研究人员针对非线性多智能体系统<sup>[20]</sup>和切换拓扑下的线性多智能体系统<sup>[21]</sup>研究了带有未知控制系数且不等同的一致性问题. 在此基础上, 采用输出调节方法处理不同未知控制系数的问题, 提出了相应的协同控制算法<sup>[22-24]</sup>. 根据以上文献可知, 如何设计Nussbaum型函数是解决未知控制系数问题的关键技术. 此外, 非线性PI函数方法也可以处理未知控制系数问题, 例如, 文献[25-27], 可以在具有平衡/不平衡子图的切换拓扑下, 实现具有未知控制系数且不等同的线性多智能体系统一致性.

在上述文献启发下, 本文设计了一类具有未知控制系数的高阶非线性多智能体在一致拟强 $\delta$ 连通切换拓扑(uniformly quasi-strongly  $\delta$ -connected graphs, U-QCGs)下的协同控制算法, 并采用Nussbaum型函数处理其中的未知控制系数. 最主要的是本文引入鲁棒一致性算法的思想, 设计相应的一致性算法处理多个不等同的未知控制系数问题. 同时, 本文把多智能体系统的网络拓扑结构扩展到了有向切换拓扑的情形, 进一步扩展了具有未知控制系数的多智能体系统对网络拓扑结构的应用范围. 结果表明, 本文所提出的算法可以保证在一致拟强 $\delta$ 连通切换拓扑下多智能体系统的一致性. 本文的主要贡献总结如下:

1) 本文提出了一类新的一致性算法处理高阶非线性多智能体系统的未知控制系数且不等同问题. 不同于已有方法中考虑的线性未知动态<sup>[21, 27]</sup>, 本文考虑了多智能体系统的非线性不确定性, 并且采用了RBF神经网络技术处理非线性环节;

2) 首次提出了在一致拟强 $\delta$ 连通切换拓扑下具有未知控制系数的高阶非线性多智能体一致性算法. 对于具有未知控制系数且不等同的多智能体来说, 本文所考虑的切换通信拓扑是最弱的情况, 这也是本文的主要贡献之一;

3) 本文把相关的一致性算法扩展到了一般有向固定拓扑包含一个有向生成树的情况. 与已有的文献结论相比<sup>[19, 24]</sup>, 本文所考虑的有向固定拓扑结构是最弱的.

本文的其余内容安排如下: 第2节阐述了基础知识和问题描述; 第3节提出了在切换拓扑下非线性多智能体系统一致性算法; 第4节给出了一个仿真实例; 第5节对本文进行了总结.

**符号:** 对于信号 $\eta$ , 若其满足 $\int_0^\infty |\eta(\tau)| d\tau < \infty$ ,

则称之为 $\eta \in \mathcal{L}_1$ ;  $\mathcal{L}_2$ 表示平方可积信号的空间;  $\mathcal{L}_\infty$ 表示有界信号的空间.

## 2 基础知识和问题描述

### 2.1 基础知识

**定义 1<sup>[13]</sup>** 如果 $\chi(\cdot)$ 是一类Nussbaum型函数, 则其需要满足以下特性:

$$\begin{cases} \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\kappa} \int_0^\kappa \chi(\tau) d\tau \right) = +\infty, \\ \liminf_{\kappa \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\kappa} \int_0^\kappa \chi(\tau) d\tau \right) = -\infty. \end{cases} \quad (1)$$

**注 1** 如果 $\chi(p)$ 是Nussbaum型函数, 那么函数 $\chi(\cdot, p) = s(\cdot)\chi(p) + h(\cdot)$ 也必定是Nussbaum型函数, 其中函数 $h(\cdot) \in L_\infty$ 和 $s(\cdot)$ 为连续有界函数, 其范围为 $I_v = [b^-, b^+]$ , 其中 $0 \notin I^v$ ,  $b^-$ 和 $b^+$ 是常量.

**引理 1<sup>[28]</sup>** 如果Nussbaum型函数 $\chi(\cdot, p)$ 满足 $\chi(\cdot, p) \in \mathcal{L}_\infty$ , 并且在 $[0, \infty)$ 范围内, 有光滑函数 $V(t) \geq 0$ 和 $p(t) \in \mathcal{L}_\infty$ , 那么对于 $\forall t \in [0, \infty)$ , 若有

$$\dot{V}(t) \leq \chi(\cdot, p)\dot{p} + \epsilon(t) \quad (2)$$

成立, 其中 $\epsilon(t)$ 满足 $\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau < \infty$ , 则有如下的结论:

$V(t) \in \mathcal{L}_\infty$ ,  $p(t) \in \mathcal{L}_\infty$ , 且 $\int_0^t (\chi(\cdot, p(\tau))\dot{p}(\tau)) d\tau \in \mathcal{L}_\infty$ .

**引理 2<sup>[29]</sup>** 如果 $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一致连续的, 并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x(\tau) d\tau$ 是存在且有界的, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

有关图的一些概念和定义表述如下:  $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t), \mathcal{A}(t))$ 为有向图, 其中节点集合为 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ , 边集合为 $\mathcal{E}(t) \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , 邻接矩阵为 $\mathcal{A}(t) = [a_{ik}(t)] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . 图的中心定义为每个节点都可到达的节点. 若图 $\mathcal{G}(t)$ 存在中心, 则称其为拟强连通的. 若存在常数 $\delta > 0$ , 则 $\delta$ 弧表示在区间 $[t_1, t_2)$ 内满足 $\int_{t_1}^{t_2} a_{ji}(t) dt \geq \delta$ 的弧.  $\delta$ 路径表示在区间 $[t_1, t_2)$ 内 $\delta > 0$ 弧的路径.

**定义 2<sup>[30]</sup>** 一致拟强 $\delta$ 连通图的定义为: 对于常数 $T > 0$ ,  $\mathcal{G}(t)$ 的 $\delta$ 弧在 $t \geq 0$ 的任一区间 $[t, t+T)$ 中都可以诱导出一个拟强连通图.

**引理 3<sup>[30]</sup>** 对于一组如下的一阶多智能体系统:

$$\dot{\xi}_i(t) = - \sum_{k=1}^N a_{ik}(t) (\xi_i(t) - \xi_k(t)) + \varrho_i(t), \quad (3)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, N$ .  $\varrho_i(t)$ 在 $[0, \infty)$ 中是连续的(除零测度集外). 令 $\mathcal{G}(t)$ 是满足定义2的一致拟强 $\delta$ 连通图, 则有以下性质:

1) 若 $\varrho_i \in \mathcal{L}_1$ , 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) = \xi_i^* \in \mathcal{L}_\infty$ , 其中 $i = 1, 2, \dots, N$ .

2) 若 $\varrho_i \in \mathcal{L}_\infty$ 且满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho_i(t) = 0$ , 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_i(t) - \xi_k(t)) = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, N.$$

接下来, 本文将对径向基函数 (radial basis function, RBF) 神经网络, 即径向基函数神经网络进行简要介绍: 根据文献[31]所述, RBF神经网络可以任意精度逼近集合  $\Omega_{\Xi}$  内的光滑函数  $h(\Xi) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  如下:

$$h_{nn}(\Xi) = W^T \Psi(\Xi), \quad (4)$$

其中:  $\Xi \in \Omega_{\Xi} \subset \mathbb{R}^q$  是输入量,  $W \in \mathbb{R}^l$  是权值向量, 节点数  $l \geq 1$ , 激活函数  $\Psi(\Xi) = [\psi_1(\Xi) \ \psi_2(\Xi) \ \cdots \ \psi_l(\Xi)]^T$ , 其中  $\psi_i(\Xi), i = 1, 2, \dots, l$  为高斯函数,

$$\psi_i(\Xi) = \exp\left(\frac{-(\Xi - \bar{\mu}_i)^T (\Xi - \bar{\mu}_i)}{\eta_i^2}\right), \quad (5)$$

其中:  $\bar{\mu}_i = [\mu_{i1} \ \mu_{i2} \ \cdots \ \mu_{il}]^T$  为其中心,  $\eta_i$  是其宽度. 根据文献[32], 存在足够多的节点数  $l$  和最优权值  $W^* \in \mathbb{R}^l$ , 令

$$h(\Xi) = W^{*T} \Psi(\Xi) + \epsilon(\Xi), \quad \forall \Xi \in \Omega_{\Xi}, \quad (6)$$

其中: 对于所有的  $\Xi \in \Omega_{\Xi}$ , 存在  $|\epsilon(\Xi)| \leq \epsilon^*$ , 且最优权值  $W^* := \arg \min_{W \in \mathbb{R}^l} \sup_{\Xi \in \Omega_{\Xi}} |h(\Xi) - W^T \Psi(\Xi)|$ .

### 2.2 问题描述

考虑一组动力学的非线性多智能体系统 (multi-agent systems, MASs), 如下:

$$\dot{x}_i^{(n)}(t) = f_i(\bar{x}_i(t)) + g_i(t)u_i(t) + d_i(t), \quad (7)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, N$ , 且  $\bar{x}_i(t) = [x_i(t) \ \dot{x}_i(t) \ \cdots \ x_i^{(n-1)}(t)]^T$ .  $f_i(\bar{x}_i(t))$  为光滑的未知函数,  $g_i(t) \in \mathbb{R}$  为系统高频增益,  $d_i(t) \in \mathbb{R}$  为有界扰动,  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  为系统控制输入.

**假设 1** 高频增益  $g_i(t) \neq 0$  是未知的, 符号固定的有界函数, 即  $|g_i(t)| \in [g_{\min}, g_{\max}]$ , 其中  $0 < g_{\min} \leq g_{\max}$ .

在一致拟强  $\delta$  连通图所描述的切换拓扑下, 本文的目标如下: 当非线性MASs满足**假设1**时, 可以达到如下一致性:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_k(t)) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_i^{(m)}(t) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $m = 1, 2, \dots, n-1, i, k = 1, 2, \dots, N$ . 此外, 闭环系统的所有信号均是有界的.

### 3 主要结论

在本节中, 针对切换拓扑下的非线性多智能体系统一致性问题提出了一种自适应神经网络控制算法. 首先, 定义如下的辅助状态变量:

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \left(\gamma + \frac{d}{dt}\right)^{n-1} x_i(t) = \\ & C_{n-1}^0 \gamma^{n-1} x_i(t) + C_{n-1}^1 \gamma^{n-2} \dot{x}_i(t) + \cdots + \\ & C_{n-1}^{n-2} \gamma x_i^{(n-2)}(t) + C_{n-1}^{n-1} x_i^{(n-1)}(t), \quad (9) \end{aligned}$$

$$q_i(t) = C_{n-1}^0 \gamma^{n-1} \dot{x}_i(t) + C_{n-1}^1 \gamma^{n-2} \ddot{x}_i(t) + \cdots +$$

$$C_{n-1}^{n-3} \gamma^2 x_i^{(n-2)}(t) + C_{n-1}^{n-2} \gamma x_i^{(n-1)}(t), \quad (10)$$

其中  $\gamma > 0$  和  $C_i^j$  均为参数.

接下来, 给出本文的主要结论:

**定理 1** 考虑在一致拟强  $\delta$  连通图下, 存在如系统(7)且满足假设1的非线性多智能体系统. 如果系统要达到一致性目标(8), 则需要满足如下的控制算法:

$$u_i(t) = \chi(p_i(t)) (\hat{W}_i^T \Psi_i(\bar{x}_i) + q_i(t) + \varpi_i(t) + \phi_i(t)), \quad (11)$$

其中:

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = \phi_i(t) (\hat{W}_i^T \Psi_i(\bar{x}_i) + q_i(t) + \varpi_i(t) + \phi_i(t)), \\ \dot{\hat{W}}_i = \Pi_i \Psi_i(\bar{x}_i) \phi_i(t), \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \phi_i(t) = z_i(t) + e_i(t), \\ \dot{e}_i(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}(t) (z_i(t) - z_k(t)), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \varpi_i(t) = \varphi_i(t) \tanh(\phi_i(t) \lambda_t) + \dot{e}_i(t), \\ \dot{\phi}_i(t) = \phi_i(t) \tanh(\phi_i(t) \lambda_t), \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $\Pi_i > 0, \lambda_t = 1 + ct^2, c > 0$ . 此外, 闭环系统中的所有信号均是有界的.

**证** 在区间  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$  内, 用RBF神经网络逼近函数  $f_i$  如下:

$$f_i(\bar{x}_i) = W_i^{*T} \Psi_i(\bar{x}_i) + \epsilon_i(\bar{x}_i), \quad \forall \bar{x}_i \in \Omega_i, \quad (15)$$

其中:  $W_i^* \in \mathbb{R}^{l_i}$  为最优权值,  $l_i \in \mathbb{N}_+$  为节点数,  $\Psi_i(\bar{x}_i) \in \mathbb{R}^{l_i}$  为回归向量,  $\epsilon_i(\bar{x}_i)$  为逼近误差. 存在  $\epsilon_i(\bar{x}_i)$ , 使当  $\bar{x}_i \in \Omega_i$  时, 有  $|\epsilon_i(\bar{x}_i)| \leq \epsilon_i^*$ .  $\hat{W}_i$  为最优误差的估计值, 其估计误差为  $\tilde{W}_i := \hat{W}_i - W_i^*$ .

考虑如下Lyapunov函数:

$$V_i(t) = \frac{1}{2} \phi_i^2(t) + \frac{1}{2} \tilde{W}_i^T(t) \Pi_i^{-1} \tilde{W}_i(t) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_i^2(t), \quad (16)$$

其中:  $\tilde{\varphi}_i(t) := \varphi_i(t) - (D_i + \epsilon_i^*)$ ,  $D_i > 0$  为  $|d_i(t)|$  的上界. 根据式(11)–(15), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= \phi_i(t) (f_i(\bar{x}_i(t)) + g_i(t)u_i(t) + d_i(t) + q_i(t) + \\ & \dot{e}_i(t)) + (\hat{W}_i(t) - W_i^*)^T \Psi_i(\bar{x}_i) \phi_i(t) + \\ & (\varphi_i(t) - (D_i + \epsilon_i^*)) \dot{\phi}_i(t) + \phi_i^2(t) - \phi_i^2(t) = \\ & \chi(\cdot, p_i(t)) \dot{p}_i(t) + \phi_i(t) (d_i(t) + \epsilon_i(\bar{x}_i)) - \\ & \phi_i(t) \tanh(\phi_i(t) \lambda_t) (D_i + \epsilon_i^*) - \phi_i^2(t) \leq \\ & \chi(\cdot, p_i(t)) \dot{p}_i(t) + |\phi_i(t)| (D_i + \epsilon_i^*) - \\ & \phi_i(t) \tanh(\phi_i(t) \lambda_t) (D_i + \epsilon_i^*) - \phi_i^2(t) \leq \\ & \chi(\cdot, p_i(t)) \dot{p}_i(t) + \frac{0.2785}{\lambda_t} (D_i + \epsilon_i^*), \quad (17) \end{aligned}$$

其中  $\chi(\cdot, p_i(t)) = g_i(t) \chi(p_i(t)) + 1$ . 由文献[33], 可知

$$|\phi_i(t)| - \phi_i(t) \tanh(\phi_i(t) \lambda_t) \leq \frac{0.2785}{\lambda_t}. \quad (18)$$

可以注意到, 虽然  $a_{ik}(t)$  可能并非连续的, 但是其积分

必定是连续的. 因此, 可知 $e_i(t)$ 必定是连续的. 这意味着 $\phi_i(t)$ 也是连续的. 此外, 可以推导出函数 $\varphi_i(t)$ 和 $p_i(t)$ 均是连续的, 这些表明 $V_i(t)$ 和 $p_i(t)$ 是光滑的. 再者, 因为 $V_i(t)$ 和 $p_i(t)$ 在 $[0, \infty)$ 区间内是连续的, 且满足 $V_i(t) \geq 0$ , 根据引理1, 可得

$$V_i(t), p_i(t), \int_0^t \chi(p_i(\tau)) \dot{p}_i(\tau) d\tau \in \mathcal{L}_\infty. \quad (19)$$

由于 $V_i(t)$ 和 $\int_0^t \chi(p_i(\tau)) \dot{p}_i(\tau) d\tau$ 是有界函数, 根据式(16)可得 $\phi_i(t), \hat{W}_i(t), \varphi_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ . 由式(17)可得

$$\int_0^t \phi_i^2(\tau) d\tau \in \mathcal{L}_\infty.$$

此外, 对式(18)积分, 可得

$$\int_0^t |\phi_i(\tau)| d\tau \leq \varphi_i(t) + (0.2785/\sqrt{c}) \tan^{-1}(\sqrt{ct}).$$

再者, 由于函数 $\varphi_i(t)$ 的有界性, 可知 $\phi_i(t) \in \mathcal{L}_1$ .

由式(13), 可得

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}(t) (e_k(t) - e_i(t)) + \varrho_i^\phi(t), \quad (20)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$ , 且有

$$\varrho_i^\phi(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}(t) (\phi_i(t) - \phi_k(t)). \quad (21)$$

由于 $\phi_i(t) \in \mathcal{L}_1$ , 可得 $\varrho_i^\phi(t) \in \mathcal{L}_1$ . 此外, 当 $\xi_i(t) = e_i(t)$ ,  $\varrho_i(t) = \varrho_i^\phi(t)$ 时, 式(20)可以认为是式(3)的另一表达式. 根据引理3的第1项以及 $\varrho_i^\phi(t) \in \mathcal{L}_1$ , 可以得出 $e_i(t)$ 有界的, 并满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = e_i^*$ , 其中 $e_i^*$ 是有限值. 随后, 根据式(13)和 $\phi_i(t)$ 的有界性, 可以直接得出所有 $z_i(t)$ 的有界性.

由于 $z_i(t)$ 的有界性, 根据文献[34]中的引理6, 可知 $x_i^{(m)}(t)$ 和 $q_i(t)$ 的有界性. 因此, 可得出 $u_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ , 这表示 $x_i^{(n)}(t) = g_i(t)u_i(t) + f_i(\bar{x}_i(t)) + d_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ 和 $\dot{z}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ . 因此, 可得 $\dot{\phi}_i(t) = \dot{z}_i(t) + \dot{e}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ . 根据Barbalat引理以及 $\phi_i(t), \dot{\phi}_i(t), \int_0^t \phi_i^2(\tau) d\tau \in \mathcal{L}_\infty$ , 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_i(t) = 0$ . 因此, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho_i^\phi(t) = 0$ . 式(20)可以认为是式(3)在 $\xi_i(t) = e_i(t)$ 和 $\varrho_i(t) = \varrho_i^\phi(t)$ 下的形式, 根据引理3的第2项, 可知 $\varrho_i^\phi(t) \in \mathcal{L}_\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho_i^\phi(t) = 0$ , 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = e_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e_k(t) = e_k^*$ . 此外, 根据式(13), 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = z_i^* \in \mathcal{L}_\infty$ 和 $z_i^* = -e_i^*$ . 因此, 根据式(9)和文献[34]中的引理6, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i^{(m)}(t) = x_{im}^* \in \mathcal{L}_\infty, m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_i^* \in \mathcal{L}_\infty$ . 此外, 根据已证得的 $x_i^{(m)}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ , 进一步可知 $x_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ 和 $\dot{x}_i(t), \ddot{x}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ , 根据Barbalat引理, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_i(t) = 0$ . 类似的, 对于所有的 $x_i^{(m)}(t), m \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ , 经过同样的讨论, 可以得出 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i^{(m)}(t) = 0$ . 接下来, 根据式(9), 可得 $x_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = (1/\gamma^{n-1}) \lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = (1/\gamma^{n-1}) z_i^* = -(1/\gamma^{n-1}) e_i^* = -(1/\gamma^{n-1}) e_k^* = (1/\gamma^{n-1}) z_k^* = x_k^*$ .

因此, 系统的一致性可以得到保证. 此外, 很容易的得出闭环系统的所有信号均为有界信号. 证毕.

**注2** 文献[21, 27]主要考虑多智能体系统在线性不确定情况下的一致性. 与已有文献相比, 本文主要考虑非线性不确定多智能体系统. 同时, 采用RBF神经网络来处理非线性不确定性. 这表明, 笔者已经把多智能体系统的未知控制系数且不等问题推广到了复杂非线性动态系统.

**注3** 本文处理多智能体系统的多个不等价的未知控制系数方法如下: 对每个智能体都设计一个局部Lyapunov函数, 这样就不需要同时处理多个Nussbaum型函数<sup>[19]</sup>. 然而, 由于多智能体系统的一致性算法在设计时需要用到邻接智能体的信息. 因此, 在分析和证明的过程中也会出现邻接智能体的信息, 从而增加了系统分析和设计的难度, 如式(20)的出现. 处理的方法是采用鲁棒一致性算法, 把邻接智能体的信息看做是有界干扰, 由一致性算法的鲁棒性(引理3)解决带有干扰的智能体系统一致性问题.

**注4** 一致性算法(11)–(14)中每一项的作用说明如下:  $\chi(p_i(t))$ 是Nussbaum型函数来处理高频增益的;  $\phi_i(t)$ 是控制算法设计的关键环节, 主要是处理系统的高阶动态性能. 通过对 $\phi_i(t)$ 的设计, 可以采用引理3处理多个Nussbaum型函数;  $q_i(t)$ 是用来表示 $\dot{z}_i(t)$ 中除去 $x_i^{(n)}(t)$ 之外的其余项;  $\hat{W}_i^T \Psi_i(\bar{x}_i)$ 是RBF神经网络的输出, 用来逼近非线性光滑函数 $f_i(\bar{x}_i(t))$ ;  $\varpi_i(t)$ 是一个自适应光滑项来处理有界扰动和神经网络逼近误差.

本文考虑把以上所提出的一致性算法扩展到有向图包含一个有向生成树的情形. 其主要的结论如下:

**定理2** 考虑在一般有向图包含一个有向生成树的情形下, 存在如系统(7)且满足假设1的非线性多智能体系统. 如果设计如式(11)–(14)这样的一致性算法, 那么多智能体系统会达到一致性目标(8). 此外, 闭环系统的所有信号都是有界的.

**证** 众所周知, 一般有向图包含一个有向生成树的网络拓扑结构满足一致拟强 $\delta$ 连通图的定义, 所以可以被看做是一致拟强 $\delta$ 连通图的特殊形式. 因此, 本定理的结论可以直接从定理1推导出来. 证毕.

**注5** 从定理2可以看出, 本文提出的一致性算法适用于一般有向图包含一个有向生成树的情形. 与已有的文献结论相比<sup>[19, 24]</sup>, 本文所考虑的有向固定拓扑结构是最弱的.

接下来, 讨论本文所提出的算法与已有研究在相同条件下的比较与分析. 文献[21]研究了带有干扰和线性不确定的高阶多智能体系统, 动力学方程是

$$x_i^{(n)}(t) = \varphi_i(\bar{x}_i(t))^T \theta_i + g_i(t)u_i(t) + d_i(t). \quad (22)$$

对应的协同控制算法是

$$u_i(t) = N(p_i(t))(\lambda_1 \phi_i(t) + \dot{e}_i(t) + \varphi_i(\bar{x}_i(t))^T \hat{\theta}_i(t) + q_i(t) + \hat{D}_i(t) \tanh(\phi_i(t) \lambda_t)), \quad (23)$$

其中:

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = \phi_i(t)[\lambda_1 \phi_i(t) + \dot{e}_i(t) + \varphi_i(\bar{x}_i(t))^T \hat{\theta}_i(t) + \\ q_i(t) + \hat{D}_i(t) \tanh(\phi_i(t)\lambda_t)], \\ \dot{\hat{\theta}}_i(t) = \phi_i(t)\varphi_i(\bar{x}_i(t)), \\ \dot{\hat{D}}_i(t) = \phi_i(t) \tanh(\phi_i(t)\lambda_t), \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \phi_i(t) = z_i(t) + e_i(t), \\ \dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)(z_i(t) - z_j(t)) \end{cases} \quad (25)$$

和

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = x_i^{(n-1)}(t) + \gamma_2 x_i^{(n-2)}(t) + \dots + \gamma_n x_i(t), \\ \dot{q}_i(t) = \gamma_2 x_i^{(n-1)}(t) + \gamma_3 x_i^{(n-2)}(t) \dots + \gamma_n \dot{x}_i(t), \end{cases} \quad (26)$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_t = 1 + t^2$ , 以及 $(\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n)$ 是Hurwitz稳定的.

由式(7)(22)可知, 系统动力学方程不同的是不确定性部分, 式(7)中包含的是非线性环节, 而式(22)中包含的是线性环节. 由此可知, 本文所考虑的系统动力学方程(7)更加复杂. 此外, 通过对本文所提出的算法(9)–(10)与文献[21]所提出的算法(26)进行比较, 可知, 本文所提出的算法(9)–(14)可以适用于 $n \geq 1$ 的多智能体系统, 而文献[21]所提出的协同控制算法(24)–(26)只适用于 $n \geq 2$ 的多智能体系统, 因此, 本文所提出的协同控制算法更具有一般性.

文献[34]所考虑的系统动力学方程与本文中(7)是相同的, 不同点是文献[34]中考虑的网络结构是有向时变符号拓扑, 而本文考虑的是一般的有向时变切换拓扑. 因此, 本文所提出的协同控制算法与文献[34]提出的算法相比, 适用的网络拓扑结构范围不同, 即本文所提出的协同控制算法适用于智能体之间不存在竞争关系的网络拓扑结构中.

### 4 实例仿真

本节中, 将考虑把所提出的算法在不同的网络拓扑结构下进行仿真验证, 分别是一致拟强 $\delta$ 连通图和一般有向图包含一个有向生成树. 考虑的多智能体系统是由5个单连杆柔性关节机械臂<sup>[35]</sup>组成的, 其每一个智能体的动态性能可表示为

$$x_i^{(4)}(t) = f_i(\bar{x}_i(t)) + 19.5g_i u_i(t) + d_i(t), \quad (27)$$

其中:

$$f_i(\bar{x}_i(t)) = \bar{h}_i(t) - 19.5\ddot{x}_i(t) - 3.33\ddot{x}_i(t) \cos(x_i(t)) + 3.33\dot{x}_i^2(t) \sin(x_i(t)), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_i(t) = & -48.6(\ddot{x}_i(t) + 3.33 \sin(x_i(t))) - \\ & 1.25x_i^{(3)}(t) - 1.25(19.5\dot{x}_i(t) - \\ & 3.33\dot{x}_i(t) \cos(x_i(t))), \end{aligned} \quad (29)$$

其中:  $\bar{x}_i(t) = [x_i(t) \ \dot{x}_i(t) \ \ddot{x}_i(t) \ x_i^{(3)}(t)]^T$ . 系统的模型参数选择为 $g_1 = 2, g_2 = -1, g_3 = -3, g_4 = 4, g_5 = -2, d_i(t) = 0.1 \times i \times \sin t$ . 神经网络 $\hat{W}_i^T \Psi_i(\bar{x}_i)$ 的设计如下: 节点数为121, 中心值为 $\mu_l$ , 输入状态为 $\bar{x}_i = [x_i(t) \ \dot{x}_i(t) \ \ddot{x}_i(t) \ x_i^{(3)}(t)]^T, l = 1, 2, \dots, 121$ , 且均匀的分布在 $[-5 \ 5] \times [-5 \ 5] \times [-5 \ 5] \times [-5 \ 5]$ , 宽度值 $\eta_l = 5, l = 1, 2, \dots, 121$ . 此外, 令 $\Pi_i = 0.4I_{121}$ .

系统初始状态 $[x_i(0) \ \dot{x}_i(0) \ \ddot{x}_i(0) \ x_i^{(3)}(0)]^T$ 设定为 $[-1 \ -2 \ 0.3 \ -3]^T, [-1.5 \ 1 \ -0.5 \ -0.6]^T, [1 \ -0.5 \ -2 \ -1]^T, [-3 \ 2 \ 0.5 \ 4]^T$ 和 $[2 \ -2 \ -1 \ 3]^T$ . 令 $N(p(t)) = p(t)^2 \cos(p(t))$ . 此外, 设定参数 $c = 0.2$ 和 $\gamma = 1$ , 参数 $p_i(t)$ 和 $\hat{W}_i$ 的初始状态均为0.

首先, 考虑非线性多智能体系统的切换拓扑时如图1所示的一致拟强 $\delta$ 连通图, 其切换次序为 $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots$ , 且满足

$$\mathcal{G}(t) = \begin{cases} \mathcal{G}_1, & t \bmod 2 \in [0, 0.6), \\ \mathcal{G}_2, & t \bmod 2 \in [0.6, 0.8), \\ \mathcal{G}_3, & t \bmod 2 \in [0.8, 2). \end{cases}$$

仿真结果如图2–7所示, 根据仿真结果可以看出非线性多智能体系统的一致性可以得到保证. 此外, 闭环系统的所有信号均为有界的.

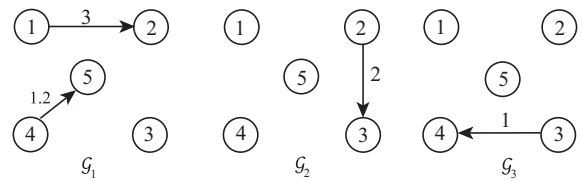


图1 一致拟强 $\delta$ 连通图描述下的切换拓扑 $\mathcal{G}(t)$

Fig. 1 The switching topologies  $\mathcal{G}(t)$  described by the UQCGs

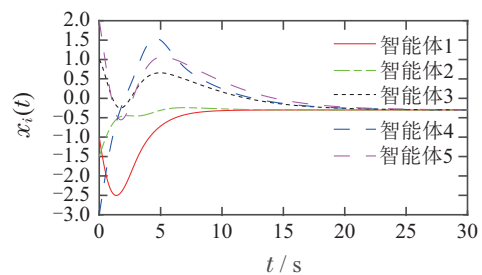


图2 在一致拟强 $\delta$ 连通图下的状态轨迹 $x_i(t)$

Fig. 2 The state trajectory  $x_i(t)$  under switching topologies described by the UQCGs

接下来, 考虑非线性多智能体系统在一般有向图包含一个有向生成树的情形, 如图8所示. 假定系统一致性算法的参数、初始条件和神经网络结构的设置都与在一致拟强 $\delta$ 连通图情况下是相同的. 仿真结果如图9–14所示, 根据仿真结果可以看出在有向图包含一个有向生成树的情形下, 非线性多智能体系统的一致性可以得到保证. 此外, 闭环系统的所有信号均为有界的.

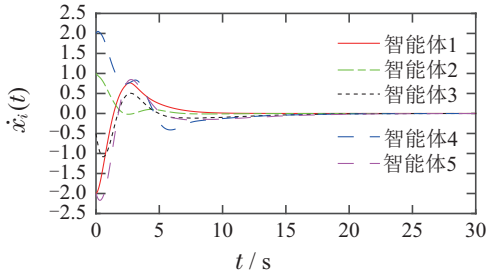


图3 在一致拟强 $\delta$ 连通图下的状态轨迹 $\dot{x}_i(t)$

Fig. 3 The state trajectory  $\dot{x}_i(t)$  under switching topologies described by the UQCGs

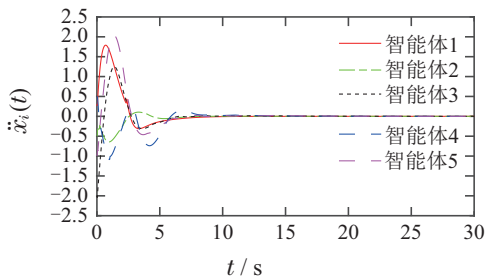


图4 在一致拟强 $\delta$ 连通图下的状态轨迹 $\ddot{x}_i(t)$

Fig. 4 The state trajectory  $\ddot{x}_i(t)$  under switching topologies described by the UQCGs

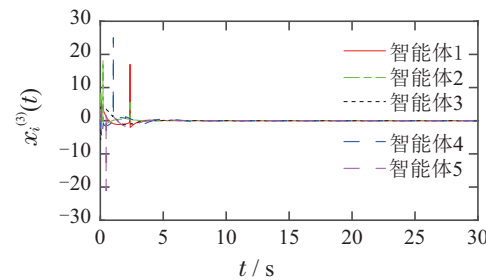


图5 在一致拟强 $\delta$ 连通图下的状态轨迹 $x_i^{(3)}(t)$

Fig. 5 The state trajectory  $x_i^{(3)}(t)$  under switching topologies described by the UQCGs

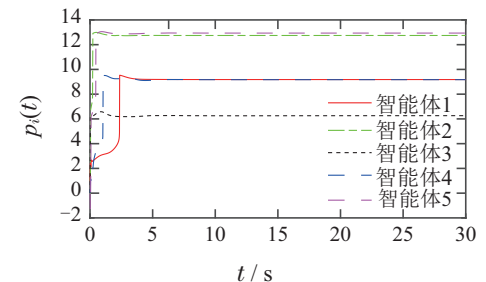


图6 在一致拟强 $\delta$ 连通图下的 Nussbaum函数的参数 $p_i(t)$

Fig. 6 The Nussbaum parameters  $p_i(t)$  under switching topologies described by the UQCGs

### 5 结论

在本文中,提出了一种具有未知控制系数且不等同的非线性多智能体系统神经网络分布式控制算法.首先,提出了在切换拓扑下非线性多智能体系统的自适应神经网络分布式控制方法,采用RBF神经网络逼近非线性函数,自适应光滑项处理有界的扰动和

RBF神经网络的逼近误差.可以看出基于本文的控制算法,具有未知控制系数且不等同的非线性多智能体系统在一致拟强 $\delta$ 连通图下可以达到一致,并且闭环系统的所有信号均是有界的.此外,本文把相关的一致性算法扩展到了一般有向图含有一个有向生成树的情形.最后,本文提供一个实际的工业实例,验证所述结论在仿真环境下的有效性.在今后的研究中,笔者将考虑具有未知控制系数的多智能体系统有限时间协同控制策略设计,以及具有未知控制系数和网络时延的多智能体系统协同控制策略设计等方面.

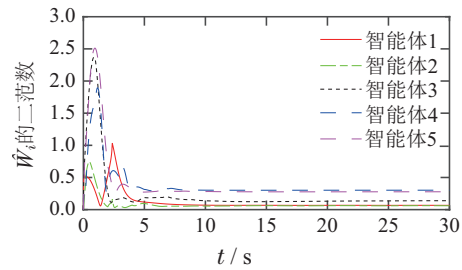


图7 在一致拟强 $\delta$ 连通图下的RBF神经网络权值范数 $\|\hat{W}_i\|$

Fig. 7 The RBFNN weight norms  $\|\hat{W}_i\|$  under switching topologies described by the UQCGs

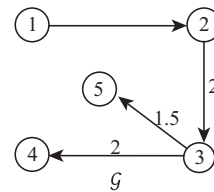


图8 有向图 $\mathcal{G}$ 包含一个有向生成树

Fig. 8 The directed graph  $\mathcal{G}$  having a spanning tree

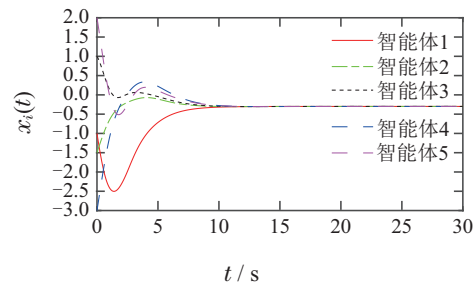


图9 在有向图包含一个有向生成树下的状态轨迹 $x_i(t)$

Fig. 9 The state trajectory  $x_i(t)$  under the directed graph having a spanning tree

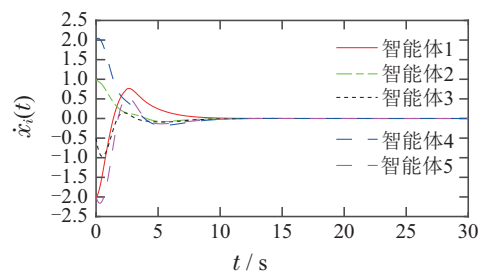


图10 在有向图包含一个有向生成树下的状态轨迹 $\dot{x}_i(t)$

Fig. 10 The state trajectory  $\dot{x}_i(t)$  under the directed graph having a spanning tree



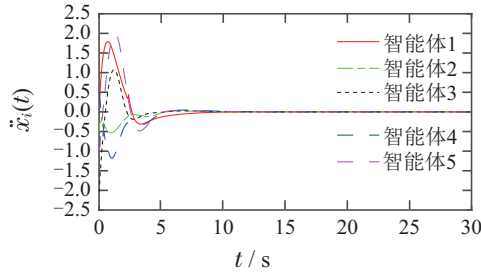


图 11 在有向图包含一个有向生成树下的状态轨迹  $\dot{x}_i(t)$   
Fig. 11 The state trajectory  $\dot{x}_i(t)$  under the directed graph having a spanning tree

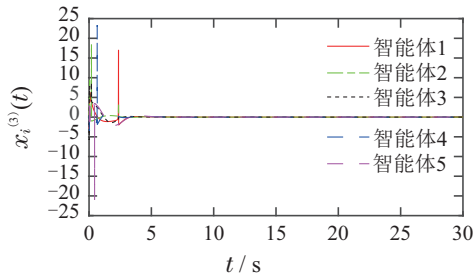


图 12 在有向图包含一个有向生成树下的状态轨迹  $x_i^{(3)}(t)$   
Fig. 12 The state trajectory  $x_i^{(3)}(t)$  under the directed graph having a spanning tree

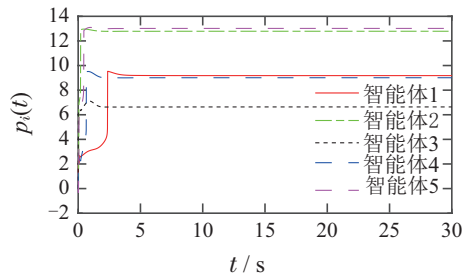


图 13 在有向图包含一个有向生成树下的Nussbaum函数的参数  $p_i(t)$   
Fig. 13 The Nussbaum parameters  $p_i(t)$  under the directed graph having a spanning tree

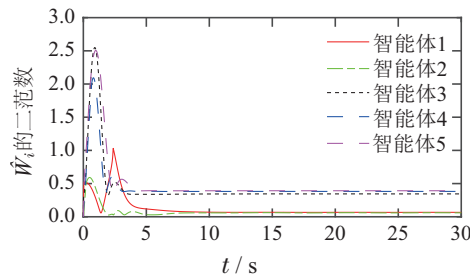


图 14 在有向图包含一个有向生成树下的RBF神经网络权重范数  $\|\hat{W}_i\|$   
Fig. 14 The RBFNN weight norms  $\|\hat{W}_i\|$  under the directed graph having a spanning tree

参考文献:

[1] FANG H, WEI Y, CHEN J, et al. Flocking of second-order multiagent systems with connectivity preservation based on algebraic connectiv-

ity estimation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(4):1067 – 1077.

[2] WANG Q, CAO X, SUN C. Robust output synchronization of linear multi-agent systems with constant disturbances via integral control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(9): 1628 – 1639.

[3] LI D, GAO H. A hardware platform framework for an intelligent vehicle based on a driving brain. *Engineering*, 2018, 4(4): 464 – 470.

[4] LI X, WANG L, LIU Z, et al. Lower bounds on the proportion of leaders needed for expected consensus of 3-D flocks. *IEEE Transactions Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(11): 2555 – 2565.

[5] HE W, MENG T, HE X, et al. Unified iterative learning control for flexible structures with input constraints. *Automatica*, 2018, 96: 326 – 336.

[6] XIE G, GAO H, QIAN L, et al. Vehicle trajectory prediction by integrating physics-and maneuver-based approaches using interactive multiple models. *IEEE Transactions Industrial Electronics*, 2018, 65(7): 5999 – 6008.

[7] HE W, YAN Z, SUN C, et al. Adaptive neural network control of a flapping wing micro aerial vehicle with disturbance observer. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(10): 3452 – 3465.

[8] CHEN W, LI X, REN W, et al. Adaptive consensus of multi-agent systems with unknown identical control directions based on a novel Nussbaum-type function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1887 – 1892.

[9] CHEN C, LIU Z, ZHANG Y, et al. Saturated nussbaum function based approach for robotic systems with unknown actuator dynamics. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(10): 2311 – 2322.

[10] WANG Q, SUN C. Adaptive consensus of multiagent systems with unknown high-frequency gain signs under directed graphs. *IEEE Transactions Systems, Man and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(6): 2181 – 2186.

[11] ASTOLFI A, HSU L, NETTO M, et al. Two solutions to the adaptive visual servoing problem. *IEEE Transactions Robotics and Automation*, 2002, 18(3): 387 – 392.

[12] DU J, GUO C, YU S, et al. Adaptive autopilot design of time-varying uncertain ships with completely unknown control coefficient. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2007, 32(2): 346 – 352.

[13] NUSSBAUM, R. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(5): 243 – 246.

[14] ZHANG Y, WEN C, SOH, Y. Adaptive backstepping control design for systems with unknown high-frequency gain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2350 – 2354.

[15] YU Z, LI S, YU Z, et al. Adaptive neural output feedback control for nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis and unknown control directions. *IEEE Transactions Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(4): 1147 – 1160.

[16] WANG C, WEN C, LIN Y. Adaptive actuator failure compensation of a class of nonlinear systems with unknown control direction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(1): 385 – 392.

[17] CHEN C, WEN C, LIU Z, et al. Adaptive consensus of nonlinear multi-agent systems with non-identical partially unknown control directions and bounded modelling errors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(9): 4654 – 4659.

[18] REZAEI H, ABDOLLAHI F. Adaptive consensus control of nonlinear multiagent systems with unknown control directions under stochastic topologies. *IEEE Transactions Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(8): 3538 – 3547.

[19] PENG J, YE X. Cooperative control of multiple heterogeneous agents with unknown high-frequency-gain signs. *Systems & Control Letters*, 2014, 68: 51 – 56.

- [20] WANG G. Distributed control of higher-order nonlinear multi-agent systems with unknown non-identical control directions under general directed graphs. *Automatica*, 2019, 110: 118559.
- [21] WANG Q, PSILLAKIS H, SUN C. Adaptive cooperative control with guaranteed convergence in time-varying networks of nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(12): 5035 – 5046.
- [22] DING Z. Adaptive consensus output regulation of a class of nonlinear systems with unknown high-frequency gain. *Automatica*, 2015, 51: 348 – 355.
- [23] SU Y. Cooperative global output regulation of second-order nonlinear multi-agent systems with unknown control direction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(12): 3275 – 3280.
- [24] GUO M, XU D, LIU L. Cooperative output regulation of heterogeneous nonlinear multi-agent systems with unknown control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(6): 3039 – 3045.
- [25] WANG Q, PSILLAKIS H, SUN C. Cooperative control of multiple agents with unknown high-frequency gain signs under unbalanced and switching topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(6): 2495 – 2501.
- [26] PSILLAKIS H. Consensus in networks of agents with unknown high-frequency gain signs and switching topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3993 – 3998.
- [27] WANG Q, PSILLAKIS H, SUN C. Cooperative control of multiple high-order agents with nonidentical unknown control directions under fixed and time-varying topologies. *IEEE Transactions Systems, Man and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4): 2582 – 2591.
- [28] ZHENG Y, WEN C, LI Z. Robust adaptive asymptotic tracking control of uncertain nonlinear systems subject to nonsmooth actuator nonlinearities. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, 27(1/2): 108 – 121.
- [29] SLOTINE J, LI W. *Applied Nonlinear Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [30] SHI G, JOHANSSON K. Robust consensus for continuous-time multi-agent dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2013, 51(5): 3673 – 3691.
- [31] HAYKIN S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [32] SANNER R, SLOTINE J. Gaussian networks for direct adaptive control. *IEEE Transactions Neural Networks*, 1992, 3(6): 837 – 863.
- [33] POLYCARPOU M, IOANNOU P. A robust adaptive nonlinear control design. *Automatica*, 1996, 32(3): 423 – 427.
- [34] WANG Q, PSILLAKIS H, SUN C, et al. Adaptive NN distributed control for time-varying networks of nonlinear agents with antagonistic interactions. *IEEE Transactions Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(6): 2573 – 2583.
- [35] REZAEI M, KABIRI M, MENHAJ M. Adaptive consensus for high-order unknown nonlinear multi-agent systems with unknown control directions and switching topologies. *Information Sciences*, 2018, 459: 224 – 237.

#### 作者简介:

王庆领 副教授, 目前研究方向为多智能体系统协同控制, E-mail: qlwang@seu.edu.cn;

王雪娆 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统故障诊断, E-mail: wangxuerao@seu.edu.cn.