

一类随机非线性系统的有限时间 H_∞ 控制

王冠正, 赵峰[†], 陈向勇, 邱建龙

(临沂大学 自动化与电气工程学院, 山东 临沂 276000;

临沂大学 复杂系统与智能计算重点实验室, 山东 临沂 276005)

摘要: 本文研究一类随机非线性系统的有限时间 H_∞ 控制问题. 考虑闭环系统在有限时间间隔内的瞬态性能和抗干扰能力, 对伊藤型随机非线性系统进行了研究. 利用Lyapunov函数和线性矩阵不等式(LMI)得到了系统满足均方有限时间有界的充分条件, 进一步设计了有限时间 H_∞ 控制器, 并给出了系统满足均方有限时间有界和相应 H_∞ 性能的充分条件. 最后给出了两个例子验证了该方法的有效性和可行性.

关键词: 随机非线性系统; 有限时间控制; H_∞ 控制; 状态反馈

引用格式: 王冠正, 赵峰, 陈向勇, 等. 一类随机非线性系统的有限时间 H_∞ 控制. 控制理论与应用, 2023, 40(2): 291–296

DOI: 10.7641/CTA.2022.10866

Finite-time H_∞ control of a class of stochastic nonlinear systems

WANG Guan-zheng, ZHAO Feng[†], CHEN Xiang-yong, QIU Jian-long

(School of Automation and Electrical Engineering, Linyi University, Linyi Shandong 276000, China;

Key Laboratory of Complex Systems and Intelligent Computing, Linyi University, Linyi Shandong 276005, China)

Abstract: This paper studies the finite-time H_∞ control problem for a class of stochastic nonlinear systems. Considering the transient performance and anti-interference ability of the closed-loop system within a finite time interval, the Itô-type stochastic nonlinear systems are studied. By constructing the Lyapunov function and linear matrix inequality (LMI), sufficient conditions for the system to satisfy the mean-square finite-time bounded are obtained. The finite-time H_∞ controller is further designed, and sufficient conditions for the system to satisfy both the mean-square finite-time bounded and the corresponding H_∞ control performance are given. Finally, two examples are given to verify the feasibility and effectiveness of the method.

Key words: stochastic nonlinear systems; finite-time control; H_∞ control; state feedback

Citation: WHANG Guanzheng, ZHAO Feng, CHEN Xiangyong, et al. Finite-time H_∞ control of a class of stochastic nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(2): 291–296

1 引言

随着科学技术的发展, 线性确定性系统理论被不断完善并形成了比较完整的理论体系. 而在现实系统中, 由于外部环境和其他不确定因素的影响, 许多工业和经济系统都被视为随机非线性系统. 然而由于随机非线性系统本身具有的不确定性和随机性, 如何有效的控制其性能引起了诸多学者的研究兴趣. 如文献[1]针对随机非线性系统研究了有限时间稳定性问题, 并提出了随机有限时间稳定性的充分条件. 文献[2]研究了随机非线性系统的全局稳定性, 并提出了3种随机非线性控制方案. 文献[3]在固定停留时间条件下,

利用李雅普诺夫方法得到了随机非线性系统随机全局稳定性的充分条件. 文献[4]研究了一类严格反馈形式的随机非线性系统的全局有限时间稳定性问题. 此外, 针对脉冲随机系统和切换随机系统等也出现了许多优秀的研究成果^[5–8].

目前随机系统的许多结果在很大程度上依赖于李雅普诺夫意义下的渐近稳定性, 这仅表明了系统在无时间约束时的渐近性能. 然而, 在实际系统中, 人们更关注系统在短时间内的性能. 即要求系统在有限的时间间隔内对系统性能完成目标控制. 比如在生活中要求汽车在突发情况下能做到迅速紧急制动避免意外

收稿日期: 2021–09–13; 录用日期: 2022–03–01.

[†]通信作者. E-mail: fzhao1986163@163.com; Tel.: +86 18953971236.

本文责任编辑: 龙离军.

国家自然科学基金项目(12026235, 12026234, 61877033, 61903170, 61833005, 11805091, 62173175), 山东省自然科学基金项目(ZR2019BF045, ZR2019MF021, ZR2019QF004)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (12026235, 12026234, 61877033, 61903170, 61833005, 11805091, 62173175) and the Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2019BF045, ZR2019MF021, ZR2019QF004).

发生;在通讯领域内要做到实时信息传输和信息交流;在军事活动中,对敌对势力发射的导弹更要做到快速拦截和精准反击. Peter Dorato 在文献[9]中首次讨论了有限时间稳定性的问题,此后由于李雅普诺夫和齐次系统等理论的发展和完善,诸多学者更是在有限时间控制的领域内进行了积极的研究. 文献[10–11]分别针对随机时滞系统和随机离散系统研究了系统的有限时间稳定. 文献[12]中对一类具有正则结构的不确定非线性切换系统进行了有限时间鲁棒镇定的研究,得到了在任意切换信号下该系统保持平衡状态全局有限时间有界稳定性的充分条件. 此外,针对不同随机系统的有限时间控制问题也出现了大量的研究成果^[13–16]. 随着有限时间控制技术研究的快速发展,其在飞行器和永磁同步电机等实际系统中也有了广泛的应用^[17].

在鲁棒控制方法中, H_∞ 控制是一种重要的控制方法,并且在很多实际系统中,都采用这种控制方式来抑制外界干扰对系统的负面影响. 如文献[18]中作者通过 H_∞ 控制研究了具有时变时滞的随机非线性系统的鲁棒控制问题. 文献[19–22]通过 H_∞ 控制分别对多类随机系统进行了研究. 结合有限时间控制和 H_∞ 控制的优点,有限时间 H_∞ 控制的定义被提出并被专家和学者们进行了深入的研究. 如基于有限时间 H_∞ 控制方法,在文献[23]中作者得到了离散系统有限时间稳定的充分条件. 文献[24]讨论了有限时间 H_∞ 在奇异随机系统中的鲁棒控制问题,在文献[25–26]中,研究了有限时间 H_∞ 控制在马尔可夫跳变系统中的应用.

目前,针对伊藤型随机非线性系统的有限时间 H_∞ 控制问题的研究还不全面. 本文利用伊藤公式和线性矩阵不等式(LMI)对该类系统的有限时间 H_∞ 控制进行了研究,得到了系统满足均方有限时间有界的充分条件,并进一步设计了有限时间 H_∞ 控制器,使得系统同时满足均方有限时间有界性及相应的 H_∞ 性能. 本文主要贡献有: 1) 在有限时间间隔内对瞬时性能和抗干扰能力进行约束的条件下,讨论了有限时间 H_∞ 控制方法在伊藤型随机非线性系统中的应用; 2) 该系统中的非线性函数满足准单边Lipschitz条件,使所提方法适用范围更广; 3) 利用LMI得到了有限时间 H_∞ 控制器存在的充分条件.

本文结构:在引言之后,我们给出了一些基础知识、定义以及证明过程中用到的引理;第3部分为本文的主要内容;第4部分为实例仿真,其结果有效地验证了所提方法的有效性;最后给出了本文的结论.

符号说明: H^T 代表矩阵 H 的转置; $\text{tr}(H)$ 代表矩阵 H 的迹; $H > 0$ ($H \geq 0$) 表示 H 为正定(半正定)矩阵; $\lambda_{\min}(H)$ 和 $\lambda_{\max}(H)$ 分别表示矩阵 H 的最小和最大特征值; $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 表示由元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的对角矩阵; I 表示 n 维的单位矩阵; $*$ 表

示在对称矩阵中的对称项; E 表示数学期望.

2 预备知识

考虑如下的伊藤型随机非线性系统

$$\begin{cases} dx(t) = [A_1x(t) + B_1u(t) + B_2v(t) + \\ \quad \Phi(x)]dt + A_2x(t)dw(t), \\ z(t) = D_1x(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 为系统状态, $\Phi(x)$ 为非线性函数, $u(t)$ 为控制输入, $z(t)$ 为控制输出, $v(t)$ 为扰动输入, $w(t)$ 表示一维标准布朗运动. A_1, A_2, B_1, B_2 和 D_1 是具有适当维数的常数矩阵.

假设 1 外部扰动 $v(t)$ 满足

$$E \int_0^t v^T(s)v(s)ds \leq d^2. \quad (2)$$

假设 2^[27] 非线性函数 $\Phi(\theta)$ 满足准单边Lipschitz条件

$$\langle L\Phi(\theta) - L\Phi(\hat{\theta}), \theta - \hat{\theta} \rangle \leq (\theta - \hat{\theta})^T M(\theta - \hat{\theta}),$$

其中 L 是对称正定矩阵, 实对称矩阵 M 在函数 $\Phi(\theta)$ 中称为关于 θ 的单边Lipschitz常数矩阵, 其值与 L 有关.

定义 1^[28] 对于给定的标量 $0 < e_1 < e_2, T > 0, N > 0$, 若

$$E[x^T(0)Nx(0)] \leq e_1^2 \Rightarrow E[x^T(t)Nx(t)] < e_2^2, \quad (3)$$

则系统(1) ($u(t) \equiv 0$) 在 $t \in [0, T]$ 上是关于参数 (e_1, e_2, T, N, d^2) 均方有限时间有界的.

定义 2^[29] 若存在状态反馈控制器 $u(t) = K \cdot x(t)$, 且满足以下两个条件:

- i) 系统是均方有限时间有界的;
- ii) 对于非零扰动 $v(t)$, 在零初始条件下, $z(t)$ 满足

$$E \int_0^t z^T(s)z(s)ds < \gamma^2 E \int_0^t v^T(s)v(s)ds, \quad (4)$$

其中: $T > 0, \gamma > 0$. 那么系统同时满足均方有限时间有界和相应的 H_∞ 性能, 且称 $u(t) = Kx(t)$ 为系统的有限时间 H_∞ 控制器.

引理 1^[30] 对下式的随机系统

$$dx(t) = f(x)dt + g(x)dw(t),$$

给定 $V(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+)$, 则有

$$dV(x, t) = LV(x, t)dt + \frac{\partial V^T}{\partial x} g(x)dw(t),$$

其中

$$LV(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{tr}[g^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(x)].$$

3 主要结果

本部分内容主要分为两部分: 第1部分得到了系

统(1) ($u(t) = 0$)满足均方有限时间有界性的充分条件; 第2部分设计了有限时间H_∞控制器, 给出了系统满足均方有限时间有界以及H_∞控制性能的充分条件.

下面给出了系统(1)($u(t) = 0$)为均方有限时间有界的充分条件.

定理 1 如果存在标量 $\alpha \geq 0, \eta_2 > \eta_1 > 0, d > 0, \gamma > 0$, 对称正定矩阵 P_1, H 满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} A_1 - \alpha \tilde{P}_1 & A_1^T H & \tilde{P}_1 B_2 \\ * & -H^T - H & H B_2 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\eta_1 I < P_1 < \eta_2 I, \quad (6)$$

$$d^2 \gamma^2 + e_1^2 \eta_2 < e_2^2 \eta_1 e^{-\alpha T}, \quad (7)$$

其中: $T > 0$, 矩阵 $N > 0, \tilde{P}_1 = N^{\frac{1}{2}} P_1 N^{\frac{1}{2}}, 0 < e_1 < e_2, A_1 = A_2^T \tilde{P}_1 A_2 + \tilde{P}_1 A_1 + A_1^T \tilde{P}_1 + 2\lambda_{\max}(M)I$, 那么系统(1)是均方有限时间有界的.

证 首先对式(5)前后分别乘以行满秩矩阵

$$\begin{bmatrix} I & A_1^T & 0 \\ 0 & B_2^T & I \end{bmatrix}$$

和他的转置, 可得

$$\begin{bmatrix} A_1 - \alpha \tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 B_2 \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

构造李雅普诺夫函数 $V(x, t) = x^T(t) \tilde{P}_1 x(t)$, 由引理1, 可得

$$\begin{aligned} LV(x, t) = & [A_1 x(t) + B_2 v(t) + \Phi(x)]^T \frac{\partial V}{\partial x} + \\ & \frac{1}{2} [A_2 x(t)]^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} A_2 x(t). \end{aligned}$$

化简得到

$$\begin{aligned} LV(x, t) = & x^T(t) [A_2^T \tilde{P}_1 A_2 + \tilde{P}_1 A_1 + A_1^T \tilde{P}_1] x(t) + \\ & x^T(t) \tilde{P}_1 B_2 v(t) + v^T(t) B_2^T \tilde{P}_1 x(t) + \\ & 2x(t) \tilde{P}_1 \Phi^T(x) = \\ & \bar{x}^T \begin{bmatrix} A_1 - 2\lambda_{\max}(M)I & \tilde{P}_1 B_2 \\ B_2^T \tilde{P}_1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \\ & 2x(t) \tilde{P}_1 \Phi^T(x), \quad (9) \end{aligned}$$

其中 $\bar{x} = [x^T(t) \ v^T(t)]^T$.

在假设2的条件下, 通过式(9)可得到

$$\begin{aligned} LV(x, t) \leq & \bar{x}^T \begin{bmatrix} A_2 & \tilde{P}_1 B_2 \\ * & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \leq \\ & \bar{x}^T \begin{bmatrix} A_1 & \tilde{P}_1 B_2 \\ * & 0 \end{bmatrix} \bar{x}, \quad (10) \end{aligned}$$

其中 $A_2 = A_2^T \tilde{P}_1 A_2 + \tilde{P}_1 A_1 + A_1^T \tilde{P}_1 + 2M$.

由式(8)(10)可得

$$LV(x, t) - \alpha V(x, t) - v^T(t) \gamma^2 v(t) < 0. \quad (11)$$

对不等式(11)两边同时从0到t进行积分并取数学期望, 得到

$$\begin{aligned} E(V(x, t) - V(x(0))) < & \\ E \int_0^t v^T(s) \gamma^2 v(s) ds + \alpha \int_0^t E V(x(s)) ds. \quad (12) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} EV(x, t) < \gamma^2 e^{\alpha t} E \int_0^t v^T(s) v(s) ds + \\ EV(x(0)) e^{\alpha t}. \quad (13) \end{aligned}$$

在不等式(13)中

$$\begin{aligned} V(x, t) = x^T(t) N^{\frac{1}{2}} P_1 N^{\frac{1}{2}} x(t) \geq \\ \lambda_{\min}(P_1) [x^T(t) N x(t)], \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x(0)) e^{\alpha t} = x^T(0) N^{\frac{1}{2}} P_1 N^{\frac{1}{2}} x(0) e^{\alpha t} \leq \\ \lambda_{\max}(P_1) e_1^2 e^{\alpha t}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\gamma^2 e^{\alpha t} E \int_0^t v^T(s) v(s) ds \leq \gamma^2 e^{\alpha t} d^2. \quad (16)$$

将式(8)(14)–(16)代入式(13)中, 可得

$$E[x^T(t) N x(t)] \leq e^{\alpha T} \left(\frac{e_1^2 \eta_2}{\eta_1} + \frac{\gamma^2 d^2}{\eta_1} \right),$$

即

$$d^2 \gamma^2 + e_1^2 \eta_2 > E[x^T(t) N x(t)] \eta_1 e^{-\alpha T}. \quad (17)$$

由式(7)(17)可得

$$E[x^T(t) N x(t)] < e_2^2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

由定义1可知系统(1)是均方有限时间有界的.

注 1 不等式(12)–(13)的计算过程中使用了Gronwall不等式, 若 $g(t) > 0$, 且 $g(t) \leq i + j \int_0^t g(s) ds$, 其中 i, j 均为正数, 则有 $g(t) \leq i e^{jt}$.

考虑状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t),$$

其中 K 是控制器增益矩阵.

系统(1)可写为

$$\begin{cases} dx(t) = [\tilde{A}x(t) + B_2 v(t) + \Phi(x)] dt + \\ \quad A_2 x(t) dw(t), \\ z(t) = D_1 x(t), \end{cases} \quad (18)$$

其中 $\tilde{A} = A_1 + B_1 K$.

下面给出了系统同时满足均方有限时间有界和H_∞性能的充分条件.

定理 2 若存在标量 $\alpha \geq 0, \eta_2 > \eta_1 > 0, T > 0$,

$d > 0, \gamma > 0$ 和对称正定矩阵 P_1 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & B_2 & UA_2^T & \sqrt{2\lambda_{\max}(M)}U \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -U & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

$$\eta_1 I < P_1 < \eta_2 I, \quad (20)$$

$$d^2 \gamma^2 + e_1^2 \eta_2 < e_2^2 \eta_1 e^{-\alpha T}, \quad (21)$$

其中: $\xi_1 = A_1 U + U A_1^T + B_1 G + G^T B_1^T - \alpha U, N > 0, U = Q^{-1}, Q = N^{\frac{1}{2}} P_1 N^{\frac{1}{2}}, 0 < e_1 < e_2$, 那么系统(18)为均方有限时间有界的, 同时满足相应的 H_∞ 性能, 且有限时间 H_∞ 控制器的增益矩阵

$$K = GU^{-1}.$$

证 由舒尔补引理及矩阵不等式(19), 可得

$$\begin{bmatrix} \varsigma_1 & B_2 \\ B_2^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

其中 $\varsigma_1 = UA_2^T U^{-1} A_2 U + A_1 U + B_1 G + U A_1^T + G^T B_1^T + 2\lambda_{\max}(M)UU - \alpha U$.

对式(22)两边同时前乘和后乘 $\text{diag}\{U, I\}^{-1}$, 得

$$\begin{bmatrix} \varsigma_2 & QB_2 \\ B_2^T Q & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \varsigma_2 &= A_2^T Q A_2 + Q A_1 + Q B_1 K + A_1^T Q + \\ &K^T B_1^T Q + 2\lambda_{\max}(M)I - \alpha Q. \end{aligned}$$

将 $\tilde{A} = A_1 + B_1 K$ 代入不等式(23), 得

$$\begin{bmatrix} A_2 - \alpha Q & QB_2 \\ B_2^T Q & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

其中 $A_2 = A_2^T Q A_2 + Q \tilde{A}_1 + \tilde{A}_1^T Q + 2\lambda_{\max}(M)I$. 根据定理1, 由条件(20)–(21)(24)可证明系统(18)是均方有限时间有界的.

由式(24)可知下式成立:

$$\begin{bmatrix} A_2 - \alpha Q + D_1^T D_1 & QB_2 \\ B_2^T Q & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

由系统(18)的微分生成算子 $LV(x, t)$ 和矩阵不等式(25)可得

$$\begin{aligned} LV(x, t) &< \\ &\alpha V(x, t) + \gamma^2 v^T(t)v(t) - z^T(t)z(t). \end{aligned} \quad (26)$$

对式(26)两边同时乘以 $e^{-\alpha t}$, 得

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} LV(x, t) &< \\ [\gamma^2 v^T(t)v(t) - z^T(t)z(t)]e^{-\alpha t} &+ \alpha V(x, t)e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (27)$$

由引理1, 有

$$\begin{aligned} L[V(x, t)e^{-\alpha t}] &= \\ e^{-\alpha t} LV(x, t) - \alpha e^{-\alpha t} V(x, t). \end{aligned} \quad (28)$$

结合式(27)–(28), 得到

$$\begin{aligned} L[V(x, t)e^{-\alpha t}] &< \\ [\gamma^2 v^T(t)v(t) - z^T(t)z(t)]e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (29)$$

在零初始条件下对式(29)从0到 t 积分并取数学期望可得

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} EV(x, t) &< \\ E \int_0^t e^{-\alpha s} (\gamma^2 v^T(s)v(s) - z^T(s)z(s)) ds &< \\ E \int_0^t e^{-\alpha s} \gamma^2 v^T(s)v(s) ds - E \int_0^t e^{-\alpha s} z^T(s)z(s) ds. \end{aligned}$$

很显然 $e^{-\alpha t} EV(x, t) > 0$, 则

$$E \int_0^t z^T(s)z(s) ds < \gamma^2 E \int_0^t v^T(s)v(s) ds. \quad (30)$$

由定义2可知, 系统(18)同时满足均方有限时间有界性和 H_∞ 控制性能.

4 仿真结果

4.1 算例1

选择系统参数矩阵为

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -26 & 15 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3.1 & 0.5 \\ 0.8 & -1.2 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.4 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\Phi(x) = [0.1 \sin(x_1 + x_2) \quad 0.2 \sin x_2]^T$ 满足假设2. 外部扰动设为

$$v(t) = [0.1 \quad 0.2 \sin t]^T.$$

满足

$$\int_0^t v^T(t)v(t) dt < d^2,$$

其中选择 $d = 0.5$, 令 $e_1 = 1, e_2 = 4$, 选择系统初始状态 $x(0) = [0.7 \quad 0.3]^T$, 根据定理2, 利用MATLAB得到了控制器增益矩阵 K 和对称正定矩阵 U 分别为

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} -2.0285 & 3.4736 \end{bmatrix}, \\ U &= \begin{bmatrix} 0.0480 & -0.0481 \\ 0.0481 & 0.2721 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由 $x(0)$ 和 e_1 可得到 $E[x^T(0)Nx(0)] \leq e_1^2$, 从图1可知, $E[x(t)^T Nx(t)] < e_2^2$, 证明了所设计的控制器符合预期要求, 系统满足均方有限时间有界和相应的 H_∞ 性能.

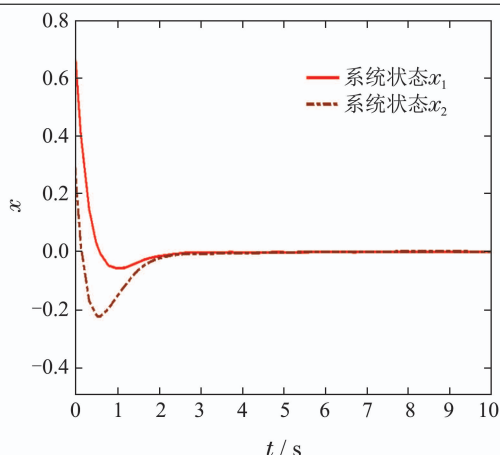


图 1 系统状态收敛曲线

Fig. 1 Convergence curve of system states

4.2 实例2

考虑文献[31]中的柔性连杆机器人的非线性动力学模型

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m, \\ \omega_m = \frac{k}{J_m}(\theta_\ell - \theta_m) - \frac{B}{J_m}\omega_m + \frac{k_\tau}{J_m}u, \\ \dot{\theta}_\ell = \omega_\ell, \\ \dot{\omega}_\ell = -\frac{k}{J_\ell}(\theta_\ell - \theta_m) - \frac{mgh}{J_\ell}\sin(\theta_\ell). \end{cases} \quad (31)$$

模型中的各种符号在文献[31]已给出详细解释, 系统(31)可简化为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x(t) + B_1u(t) + B_2v(t) + \Phi(x), \\ z = D_1x(t). \end{cases} \quad (32)$$

由于在电机工作时, 受温度, 某些材料随机振动的摩擦系数和负载等因素影响, 可能对转子造成随机扰动. 所以在文献[31]描述的系统模型中加入了布朗运动, 使其更贴合实际系统, 得到

$$dx = [A_1x(t) + B_1u(t) + B_2v(t) + \Phi(x)]dt + A_2x(t)d\omega(t),$$

其中系统模型的各项参数分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.33 \sin x_3 \end{bmatrix},$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \sin t \\ 0 \\ 0.1 \sin t \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = [0 \ 21.6 \ 0 \ 0]^T.$$

外部扰动 $v(t)$ 满足

$$\int_0^t v^T(t)v(t)dt < d^2.$$

$\Phi(x)$ 满足假设条件2, 令 $e_1 = 1, e_2 = 4, d = 0.5, x(0) = [0.7 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.4]^T$.

根据定理2, 利用MATLAB得到有限时间H_∞状态反馈控制器增益矩阵 K 和对称正定矩阵 U

$$K = [-10.7711 \ -1.6347 \ 6.6961 \ -1.6619],$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.1995 & -0.4815 & 0.1434 & -0.2923 \\ -0.4815 & 8.7860 & -0.0045 & -0.0379 \\ 0.1434 & -0.0045 & 0.1824 & -0.1433 \\ -0.2923 & -0.0379 & -0.1433 & 1.2953 \end{bmatrix}.$$

从图2可知, 系统轨迹 $x(t)$ 随时间收敛, 所求得的有限时间H_∞控制器可以使系统满足均方有限时间有界和相应的H_∞性能.

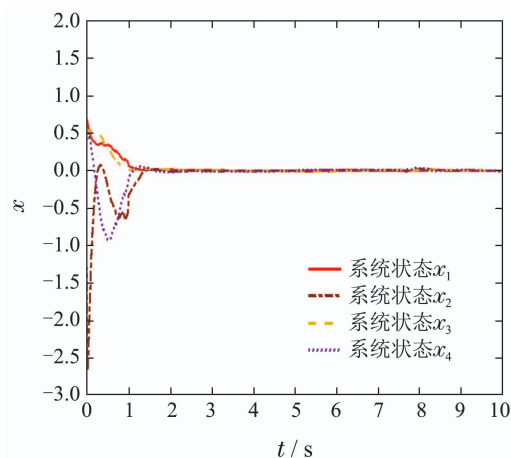


图 2 柔性连杆机器人系统状态轨迹图

Fig. 2 States trajectories diagram of flexible linkage robot system

5 结论

本文研究了一类随机非线性系统的有限时间H_∞控制问题. 利用LMI得到系统满足均方有限时间有界的充分条件, 进一步设计了有限时间H_∞控制器, 使系统不仅为均方有限时间有界而且满足相应的H_∞性能. 最后, 通过两个例子验证了所提方法的有效性. 在实际系统中, 考虑到随机系统的系统状态有时是不可测的或不完全可测的, 同时考虑非线性项未知的情况下, 利用状态观测器对不可测的系统状态进行估计, 并利用神经网络或模糊方法对非线性项进行处理, 这是下一步将要解决的问题.

参考文献:

- [1] YU X, YIN J L, KHOO S Y. Generalized Lyapunov criteria on finite-time stability of stochastic nonlinear systems. *Automatica*, 2019, 107: 183 – 189.
- [2] TAO B, JIANG Z P. New results in global stabilization for stochastic nonlinear systems. *Control Theory and Technology*, 2016, 14(1): 57 – 67.
- [3] REN W, XIONG J L. Stability analysis of impulsive stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(9): 4791 – 4797.
- [4] KHOO S Y, YIN J L, MAN Z H, et al. Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form. *Automatica*, 2013, 49(5): 1403 – 1410.
- [5] PENG D X, LI X D, RAKKIYAPPAN R, et al. Stabilization of stochastic delayed systems: Event-triggered impulsive control. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 401: 126054.
- [6] WANG P F, WANG X L, SU H. Input-to-state stability of impulsive stochastic infinite dimensional systems with Poisson jumps. *Automatica*, 2021, 128: 109553.
- [7] MU X W, HU Z H. Stability analysis for semi-markovian switched singular stochastic systems. *Automatica*, 2020, 118: 109014.
- [8] ZHANG P P, KAO Y G, HU J, et al. Robust observer-based sliding mode H_∞ control for stochastic Markovian jump systems subject to packet losses. *Automatica*, 2021, 130: 109665.
- [9] PETER D. An overview of finite-time stability. *Current Trends in Nonlinear Systems and Control*, Boston: Birkhäuser, 2006: 185 – 194.
- [10] SHEN Yi, LIAO Xiaoxin, XU Xiaodong, et al. The stability of nonlinear stochastic delay systems with its applications. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 19 – 22.
(沈轶, 廖晓昕, 许晓东, 等. 非线性随机时滞系统的稳定性与应用. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 19 – 22.)
- [11] LI Li, LU Yanrong, YU Xiao. Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty. *Control and Decision*, 2021, 36(9): 2074 – 2084.
(李丽, 卢延荣, 于晓. 参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计. 控制与决策, 2021, 36(9): 2074 – 2084.)
- [12] MOHAMMAD P A. Finite time control of a class of nonlinear switched systems in spite of unknown parameters and input saturation. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, 31: 220 – 232.
- [13] LIN X Z, CHEN C C. Finite-time output feedback stabilization of planar switched systems with/without an output constraint. *Automatica*, 2021, 131: 109728.
- [14] FU J, MA R C, CHAI T Y. Global finite-time stabilization of a class of switched nonlinear systems with the powers of positive odd rational numbers. *Automatica*, 2015, 54: 360 – 373.
- [15] NING Z P, ZHANG L X, LAM J. Stability and stabilization of a class of stochastic switching systems with lower bound of sojourn time. *Automatica*, 2018, 92: 18 – 28.
- [16] MU X W, HU Z H. Stability analysis for semi-Markovian switched singular stochastic systems. *Automatica*, 2020, 118: 109014.
- [17] DING Shihong, LI Shihua. A survey for finite-time control problems. *Control and Decision*, 2011, 26(2): 161 – 169.
(丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述. 控制与决策, 2011, 26(2): 161 – 169.)
- [18] WANG C, SHEN Y. Robust H_∞ control for stochastic systems with nonlinearity, uncertainty and time-varying delay. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, 63(5): 985 – 998.
- [19] LIU H, LI X H, WANG H Q. Adaptive neural network prescribed performance bounded- H_∞ tracking control for a class of stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(6): 2140 – 2152.
- [20] SONG X N, WANG M, AHN C K, et al. Finite-time H_∞ asynchronous control for nonlinear markov jump distributed parameter systems via quantized fuzzy output-feedback approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(9): 4098 – 4109.
- [21] MA Weiwei, JIA Xinchun, ZHANG Dawei. Observer-based networked H_∞ control for dualrate sampling systems. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(10): 1788 – 1797.
(马伟伟, 贾新春, 张大伟. 双率采样系统的基于观测器的网络化 H_∞ 控制. 自动化学报, 2015, 41(10): 1788 – 1797.)
- [22] ZHU Xianglin, JI Xiaofu. H_∞ synthesis for discrete linear systems with state saturation. *Control and Decision*, 2013, 28(2): 183 – 187.
(朱湘临, 嵇小辅. 状态饱和和线性离散系统的 H_∞ 控制. 控制与决策, 2013, 28(2): 183 – 187.)
- [23] ZONG G D, WANG R H, ZHANG W X, et al. Finite-time H_∞ control for discrete-time switched nonlinear systems with time delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(6): 914 – 936.
- [24] YOROZU T, HIRANO M, OKA K. Electron spectroscopy studies on magneto-optical media and plastic substrate interface. *IEEE Transaction Journal on Magnetics in Japan*, 1987, 2(8): 740 – 741.
- [25] LI L, ZHANG Q L. Finite-time H_∞ control for singular Markovian jump systems with partly unknown transition rates. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(1): 302 – 314.
- [26] MAO Weihua, DENG Feiqi, WAN Anhua. Robust H_∞ exponential filtering for stochastic Markovian jump time-varying delay systems. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 501 – 510.
(毛卫华, 邓飞其, 万安华. 随机Markov跳跃时滞系统的鲁棒 H_∞ 指数滤波器设计. 控制理论与应用, 2014, 31(4): 501 – 510.)
- [27] FU F Y, HOU M Z, DUANG R. Stabilization of quasi-one-sided Lipschitz nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2013, 30(2): 169 – 184.
- [28] YAN Z G, ZHONG S Y, LÜ Y P, et al. Finite-time H_2/H_∞ control for linear stochastic systems. *2017 Chinese Automation Congress*, Jinan: IEEE, 2017: 4019 – 4023.
- [29] YAN Z G, ZHANG M, SONG Y X, et al. Finite-time H_∞ control for Itô-type nonlinear time-delay stochastic systems. *IEEE Access*, 2020, 8: 83622 – 83632.
- [30] YAN Z G, SONG Y X, LIU X P. Finite-time stability and stabilization of Itô stochastic systems with markovian jump systems with generally uncertain transition rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 321(15): 512 – 525.
- [31] SOHAIRA A, MUHAMMAD R, KEUM S H. Observer-based robust control of one-sided lipschitz nonlinear systems. *ISA Transactions*, 2016, 65: 230 – 240.

作者简介:

王冠正 硕士研究生, 目前研究方向为随机系统的有限时间控制,

E-mail: wgz2059508506@163.com;

赵峰 副教授, 博士, 目前研究方向为随机非线性系统控制,

E-mail: fzhaol986163@163.com;

陈向勇 副教授, 博士, 目前研究方向为复杂网络, E-mail: chenxiangyong@lyu.edu.cn;

邱建龙 教授, 博士, 目前研究方向为物流系统建模分析与控制,

E-mail: qiu Jianlong@lyu.edu.cn.