

# 带有大输出时滞的ODE-热方程级联系统的观测器设计

张静<sup>1</sup>, 康文<sup>2,3†</sup>

(1. 北京科技大学 自动化学院, 北京 100083; 2. 北京理工大学 数学与统计学院, 北京 100081;  
3. 北京理工大学 信息安全的数学理论与计算机工业和信息化部重点实验室, 北京 102488)

**摘要:** 为了估计系统的状态并补偿输出时滞, 本文提出一种新颖的观测器设计方法应用在常微分方程(ODE)-热方程级联系统中. 不同于传统观测器的设计方法, 该方法的核心思想是将大时滞划分为若干段小时滞, 再设计一串级联的子观测器逐步地估计系统的状态. 这种方法的优势在于对于大时滞仍有效. 本文通过backstepping-like方法实现了原系统与目标系统的等价变换, 结合Lyapunov-Krasovskii方法和线性矩阵不等式理论, 得到了误差系统指数稳定的结果. 最后, 通过仿真实例验证了级联观测器的有效性.

**关键词:** 偏微分方程与常微分方程(PDE-ODE)级联系统; 级联观测器; 稳定性; backstepping-like方法

**引用格式:** 张静, 康文. 带有大输出时滞的ODE-热方程级联系统的观测器设计. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1417–1425

DOI: 10.7641/CTA.2022.10908

## Observer design for a cascaded ODE-Heat system with a large output delay

ZHANG Jing<sup>1</sup>, KANG Wen<sup>2,3†</sup>

(1. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;  
2. School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;  
3. Key Laboratory of Mathematical Theory and Computation in Information Security, Beijing Institute of Technology, Beijing 102488, China)

**Abstract:** This paper provides a novel observer design for a cascaded ordinary differential equation (ODE)-heat system to estimate the state of the system and compensate the output delay. Different from the traditional observer schemes, the core idea of this method is to divide the large delay into small pieces and a chain of cascaded sub-observers is designed to achieve the state estimation sequentially. The advantage of this approach is that the large delay can be compensated. For stability analysis, the backstepping-like method is employed to transform the original system into an equivalent target system. By the Lyapunov-Krasovskii method and the linear matrix inequality theory, the exponential stability analysis of the error system is established. Finally, a numerical simulation is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** PDE-ODE cascaded systems; cascade observer; stability; backstepping-like method

**Citation:** ZHANG Jing, KANG Wen. Observer design for a cascaded ODE-Heat system with a large output delay. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1417–1425

## 1 引言

事物的变化规律常用常微分方程(ordinary differential equation, ODE)来描述, 而现实生活中的许多物理、化学、生物等现象用偏微分方程(partial differential equation, PDE)来描述才更加符合实际情况, 比如热方程、波动方程、Euler-Bernoulli方程、Schrödinger方程、Maxwell方程等. 分布参数系统具有十分广泛的

工程背景, 在航空、航天、化工、生态、人口、金融等领域有着巨大的应用价值. 由于实际生活中的很多现象并不是单一存在的, 因此可以通过级联系统来描述更为复杂的耦合问题, 比如电磁耦合、化学反应等. 由于迫切的工程需要, PDE-PDE, PDE-ODE, ODE-ODE级联系统的控制问题一直受到学者们的关注<sup>[1-5]</sup>, 因此对级联系统的进一步探索是十分必要的, 具有十分

收稿日期: 2021-09-25; 录用日期: 2022-04-14.

† 通信作者. E-mail: kangwen@amss.ac.cn.

本文责任编辑: 郭宝珠.

国家自然科学基金面上项目(62273046), 广东省基础与应用基础研究基金面上项目(2022A1515010039), 北京理工大学青年教师学术启动计划项目(317001222207)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62273046), the Guangdong Basic and Applied Basic Research (2022A1515010039) and the Beijing Institute of Technology Research Fund Program for Young Scholars (317001222207).

重要的实际意义.

近年来, PDE系统的边界控制问题是控制领域的热点问题. 文献[6]首次将backstepping方法应用到PDE系统的边界控制中. Backstepping方法的精妙之处在于通过设计变换极大地减少了计算量, 降低了求解难度, 实现了PDE系统的Lyapunov稳定. 正因如此, 学者们将backstepping方法运用到不同的PDE控制系统中, 如Euler-Bernoulli方程<sup>[7]</sup>、Korteweg-de Vries方程<sup>[8]</sup>、波方程<sup>[9]</sup>等, 取得了非常多的研究成果. 研究者们还将backstepping方法与多种多样的控制设计方法相结合, 将其推广到了级联系统中, 如PDE-ODE级联系统的滑模控制设计<sup>[10]</sup>、事件触发控制设计<sup>[11]</sup>、自适应控制设计<sup>[12]</sup>、鲁棒控制设计<sup>[13]</sup>等. 上述文献所提到的backstepping变换依赖于Volterra积分变换, 在此基础上发展而来的backstepping-like变换也被运用到控制系统中(见文献[14]). 两种变换方法类似, 但是后者不含有积分项, 为系统的稳定性分析带来了便利.

随着数字和通信技术的快速发展, 时滞在现实生活中不可避免, 尤其在工程系统中普遍存在, 如道路交通系统、远程手术、金属冶炼、通信网络控制等. 无论时滞存在于控制输入、系统状态还是输出信号中, 它都有可能带来不稳定因素, 因此对于时滞系统的研究具有十分重要的理论和应用价值(见文献[15–18]). 为了补偿时滞, 文献[19]提出了预测控制器的设计. 在此基础上, 文献[20]结合了backstepping方法, 将带有输入时滞的ODE或PDE系统转换为ODE-PDE或PDE-PDE级联系统的边界控制问题, 并为之设计了预测控制器和相应的观测器. 上述方法的局限性在于当时滞较大时传统的观测器可能会失效. 因此, 为了进一步突破时滞长度的限制, 研究者们将文献[21]中级联观测器的设计方法应用到带有输出时滞(见文献[22–23])和输入时滞(见文献[24–25])的系统中. 这种方法的主要思路是将大时滞划分为若干段小时滞, 设计一串级联的子观测器逐步完成对系统状态的估计. 级联观测器的设计方法在不同的控制系统中得到了推广, 如非线性二维双曲方程<sup>[26]</sup>、网络控制系统<sup>[27]</sup>、PDE-ODE级联系统<sup>[14]</sup>等. 但对ODE-热方程级联系统的观测器设计尚未研究, 至今仍是难点问题. 本文的主要贡献在于:

- 1) 对ODE-热方程级联系统, 有效地补偿了输出时滞;
- 2) 由于直接分析误差系统的稳定性较为困难, 本文将backstepping-like方法与级联观测器的设计相结合, 得到了误差系统稳定的条件;
- 3) ODE-热方程级联系统的观测器设计问题转换为一个线性矩阵不等式的求解问题, 比较容易实现和验证.

本文的其他章节内容如下: 第2部分是问题描述; 第3部分进行了级联观测器的设计; 第4部分分析了误差系统的稳定性; 第5部分给出了一个仿真实例来验证理论结果; 最后, 第6部分是本文的结论和未来的研究方向.

## 2 问题描述

### 2.1 符号说明

在本文中,  $\mathbb{R}^n$ 表示 $n$ 维欧式空间, 其相应的范数用 $\|\cdot\|$ 表示. 任一矩阵 $P > 0$ 是对称且正定的. 符号 $*$ 表示矩阵中的对称块. 对于平方可积函数 $z(x)$ , 其在空间 $L^2(0, l)$ 上的范数表示为

$$\|z\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l |z(x)|^2 dx.$$

Sobolev空间

$$H^1(0, l) \triangleq \{z \in L^2(0, l), z' \in L^2(0, l)\},$$

其相应的范数表示为

$$\|z\|_{H^1(0,l)}^2 = \|z\|_{L^2(0,l)}^2 + \|z'\|_{L^2(0,l)}^2.$$

$C^i(E, F)$ 表示从集合 $E$ 映射到集合 $F$ 的函数的集合, 上标 $i$ 表示函数 $i$ 阶连续可微. 对于函数 $z(x, t)$ , 下标 $x$ 和 $t$ 表示偏导数, 如 $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $z_t = \frac{\partial z}{\partial t}$ ,  $z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

### 2.2 重要引理

**引理 1**(Jensen不等式<sup>[18]</sup>) 对于任意的对称正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、常数 $\tau > 0$ 和向量函数 $\xi(x) : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 有下面的不等式成立:

$$\int_0^\tau \xi^T(s) R \xi(s) ds \geq \frac{1}{\tau} \left( \int_0^\tau \xi(s) ds \right)^T R \left( \int_0^\tau \xi(s) ds \right).$$

**引理 2**(Wirtinger不等式<sup>[28]</sup>) 设标量函数 $\xi(x)$ 绝对连续, 且 $\xi(x) \in H^1(l_a, l_b)$ .

如果 $\xi(l_a) = 0$ 或 $\xi(l_b) = 0$ , 那么以下不等式成立:

$$\|\xi\|_{L^2(l_a, l_b)}^2 \leq \frac{4(l_b - l_a)^2}{\pi^2} \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\|_{L^2(l_a, l_b)}^2.$$

如果 $\xi(l_a) = \xi(l_b) = 0$ , 那么有以下不等式成立:

$$\|\xi\|_{L^2(l_a, l_b)}^2 \leq \frac{(l_b - l_a)^2}{\pi^2} \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\|_{L^2(l_a, l_b)}^2.$$

### 2.3 系统描述

考虑如下所示的ODE-热方程级联系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ z_t(x, t) = \gamma z_{xx}(x, t) + f(x, u(t)), \\ z_x(0, t) = 0, \\ z(1, t) = CX(t), \\ X(0) = X_0, z(x, 0) = z_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x \in (0, 1)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为幂零矩阵,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .  $\gamma > 0$ 表示粘度系数.  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示输入信号.  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ 为常微分方程的状态变量,  $z(x, t)$

$\in \mathbb{R}$ 为热方程的状态变量.  $f(x, u(t))$ 是一类满足  $C^1([0, 1] \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ 的函数, 且满足Lipschitz条件  $|f(x_1, u(t)) - f(x_2, u(t))| \leq \alpha|x_1 - x_2|$ , 其中 $\alpha$ 为Lipschitz常数.

**假设 1** 假设  $(A, C)$ 是可观测的, 并且输出信号可测

$$y(t) = \begin{cases} z(0, t-r), & t \geq r, \\ 0, & t < r, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $r > 0$ 表示输出时滞.

本文的目标是: 当系统的输出时滞 $r$ 较大时, 设计有效的观测器来估计系统的状态, 并补偿时滞.

### 3 级联观测器设计

为了处理输出时滞 $r$ 较大的问题, 本文将级联观测器的设计运用到系统(1)中. 这种新颖的观测器的设计方法将时滞 $r$ 分成 $M$ 段, 通过设计 $M$ 个级联观测器, 逐步估计系统的状态并补偿时滞.

#### 3.1 级联系统符号说明

首先, 为了方便表达, 定义下列标记:

$$X^0(t) = X(t-r), \quad (3a)$$

$$X^j(t) = X(t + \frac{j}{M}r - r), \quad (3b)$$

$$z^0(x, t) = z(x, t-r), \quad (3c)$$

$$z^j(x, t) = z(x, t + \frac{j}{M}r - r), \quad (3d)$$

$$u^0(t) = u(t-r), \quad (3e)$$

$$u^j(t) = u(t + \frac{j}{M}r - r), \quad (3f)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, M$ .

于是, 根据以上定义得到下面的关系:

$$X^{j-1}(t) = X^j(t - \frac{r}{M}), \quad (4a)$$

$$z^{j-1}(x, t) = z^j(x, t - \frac{r}{M}). \quad (4b)$$

进一步, 得到系统  $[X^j(t) \ z^j(x, t)]$ 的表达形式

$$\begin{cases} \dot{X}^j(t) = AX^j(t) + Bu^j(t), \\ z_t^j(x, t) = \gamma z_{xx}^j(x, t) + f(x, u^j(t)), \\ z_x^j(0, t) = 0, \\ z^j(1, t) = CX^j(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $j = 1, \dots, M$ .

通过上面的处理, 原系统(1)被表达成了等价的 $M$ 个级联的ODE-PDE系统.

#### 3.2 Backstepping-like变换

受到文献[14][29]的启发, 为了后续系统的稳定性

分析, 引入如下backstepping-like变换:

$$w^j(x, t) = z^j(x, t) - CN(x)N^{-1}(1)X^j(t), \quad (6)$$

其中核函数  $N(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足

$$\begin{cases} \frac{d^2N}{dx^2}(x) = \gamma^{-1}N(x)A, \\ \frac{dN}{dx}(0) = 0, \\ N(0) = I. \end{cases} \quad (7)$$

由上式发现核函数  $N(x)$ 满足下面的性质<sup>[29]</sup>:

$$1) \ N(x) = I + \gamma^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} A^k,$$

$$2) \ N(x)A = AN(x),$$

$$3) \ N^{-1}(x)A = AN^{-1}(x),$$

$$4) \ N(x) \stackrel{\text{def}}{=} [I \ 0]e^{\kappa} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\text{其中 } \kappa = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix} x.$$

由变换(6)可知, 矩阵  $N(1)$ 需满足可逆的条件. 根据文献[29], 只有当 $A$ 为幂零矩阵, 即 $A^n = 0$ 时,  $N(1)$ 可逆成立.

那么对于  $j = 1, \dots, M$ , 根据变换(6), 系统(5)转换为目标系统

$$\begin{cases} \dot{X}^j(t) = AX^j(t) + Bu^j(t), \\ w_t^j(x, t) = \gamma w_{xx}^j(x, t) + f(x, u^j(t)) - CN(x)N^{-1}(1)Bu^j(t), \\ w_x^j(0, t) = 0, \\ w^j(1, t) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

上述的backstepping-like变换(6)实现了从原系统  $[X^j(t) \ z^j(x, t)]$ 到目标系统  $[X^j(t) \ w^j(x, t)]$ 的转换, 这种处理方式有利于后续稳定性的分析.

变换(6)是可逆的, 其逆变换为

$$z^j(x, t) = w^j(x, t) + CN(x)N^{-1}(1)X^j(t). \quad (9)$$

即目标系统(8)可以经逆变换(9)变换回原系统(5).

#### 3.3 级联观测器设计

针对输出时滞 $r$ 可能较大的情况, 本文设计如下所示的级联观测器:

当  $j = 1$ 时,

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}^1(t) = A\hat{X}^1(t) + Bu^1(t) - N(1)L[\hat{z}^1(0, t - \frac{r}{M}) - y(t)], \\ \hat{w}_t^1(x, t) = \gamma \hat{w}_{xx}^1(x, t) + f(x, u^1(t)) - CN(x)N^{-1}(1)Bu^1(t), \\ \hat{w}_x^1(0, t) = 0, \ \hat{w}^1(1, t) = 0, \\ \hat{z}^1(0, t - \frac{r}{M}) = \hat{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) + CN^{-1}(1)\hat{X}^1(t - \frac{r}{M}), \end{cases} \quad (10a)$$

当  $j = 2, 3, \dots, M$  时,

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}^j(t) = A\hat{X}^j(t) + Bu^j(t) - \\ \quad N(1)L[\hat{z}^j(0, t - \frac{r}{M}) - \hat{z}^{j-1}(0, t)], \\ \hat{w}_t^j(x, t) = \gamma\hat{w}_{xx}^j(x, t) + f(x, u^j(t)) - \\ \quad CN(x)N^{-1}(1)Bu^j(t), \\ \hat{w}_x^j(0, t) = 0, \hat{w}^j(1, t) = 0, \\ \hat{z}^j(0, t - \frac{r}{M}) = \hat{w}^j(0, t - \frac{r}{M}) + CN^{-1}(1)\hat{X}^j(t - \frac{r}{M}), \end{cases} \quad (10b)$$

其中  $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为待定的观测器增益, 并且满足  $A - LC$  为 Hurwitz 矩阵的条件.

接下来, 定义误差为

$$\tilde{X}^j(t) = \hat{X}^j(t) - X^j(t), \quad (11a)$$

$$\tilde{w}^j(x, t) = \hat{w}^j(x, t) - w^j(x, t), \quad (11b)$$

$$\tilde{z}^j(x, t) = \hat{w}^j(x, t) + CN(x)N^{-1}(1)\hat{X}^j(t) - z^j(x, t). \quad (11c)$$

由于

$$\tilde{X}^j(t) = \tilde{X}^j(t - \frac{r}{M}) + \int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{X}}^j(s)ds, \quad (12)$$

结合式(8)和式(10a)–(10b), 当  $j = 1$  时, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}^1(t) &= A\tilde{X}^1(t) - N(1)L[\hat{z}^1(0, t - \frac{r}{M}) - y(t)] = \\ &= A\tilde{X}^1(t) - N(1)L[\hat{z}^1(0, t - \frac{r}{M}) - z^1(0, t - \frac{r}{M})] = \\ &= A\tilde{X}^1(t) - N(1)L\tilde{z}^1(0, t - \frac{r}{M}) = \\ &= A\tilde{X}^1(t) - N(1)L[\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) + \\ &CN^{-1}(1)\tilde{X}^1(t - \frac{r}{M})] = \\ &= A\tilde{X}^1(t) - N(1)L[\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) + CN^{-1}(1)\tilde{X}^1(t) - \\ &CN^{-1}(1)\int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{X}}^1(s)ds] = \\ &= [A - N(1)LCN^{-1}(1)]\tilde{X}^1(t) - N(1)L\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) + \\ &N(1)LCN^{-1}(1)\int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{X}}^1(s)ds. \end{aligned}$$

同理, 当  $j = 2, 3, \dots, M$  时, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}^j(t) &= \\ &= [A - N(1)LCN^{-1}(1)]\tilde{X}^j(t) - N(1)L\tilde{w}^j(0, t - \frac{r}{M}) + \\ &N(1)LCN^{-1}(1)\int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{X}}^j(s)ds + N(1)L\tilde{w}^{j-1}(0, t) + \\ &N(1)LCN^{-1}(1)\tilde{X}^{j-1}(t). \end{aligned}$$

因此, 得到如下所示的误差系统:

当  $j = 1$  时,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}^1(t) = [A - N(1)LCN^{-1}(1)]\tilde{X}^1(t) - \\ \quad N(1)L\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) + \\ \quad N(1)LCN^{-1}(1)\int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{X}}^1(s)ds, \\ \tilde{w}_t^1(x, t) = \gamma\tilde{w}_{xx}^1(x, t), \\ \tilde{w}_x^1(0, t) = 0, \\ \tilde{w}^1(1, t) = 0. \end{cases} \quad (13a)$$

当  $j = 2, 3, \dots, M$  时,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}^j(t) = [A - N(1)LCN^{-1}(1)]\tilde{X}^j(t) - \\ \quad N(1)L\tilde{w}^j(0, t - \frac{r}{M}) + \\ \quad N(1)LCN^{-1}(1)\int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{X}}^j(s)ds + \\ \quad N(1)L\tilde{w}^{j-1}(0, t) + \\ \quad N(1)LCN^{-1}(1)\tilde{X}^{j-1}(t), \\ \tilde{w}_t^j(x, t) = \gamma\tilde{w}_{xx}^j(x, t), \\ \tilde{w}_x^j(0, t) = 0, \\ \tilde{w}^j(1, t) = 0. \end{cases} \quad (13b)$$

为了表述方便, 令  $\tilde{Y}^j(t) = N^{-1}(1)\tilde{X}^j(t)$ , 则误差系统表示如下:

当  $j = 1$  时,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{Y}}^1(t) = (A - LC)\tilde{Y}^1(t) - L\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) + \\ \quad LC\int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{Y}}^1(s)ds, \\ \tilde{w}_t^1(x, t) = \gamma\tilde{w}_{xx}^1(x, t), \\ \tilde{w}_x^1(0, t) = 0, \\ \tilde{w}^1(1, t) = 0. \end{cases} \quad (14a)$$

当  $j = 2, 3, \dots, M$  时,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{Y}}^j(t) = (A - LC)\tilde{Y}^j(t) - L\tilde{w}^j(0, t - \frac{r}{M}) + \\ \quad LC\int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{Y}}^j(s)ds + L\tilde{w}^{j-1}(0, t) + \\ \quad LC\tilde{Y}^{j-1}(t), \\ \tilde{w}_t^j(x, t) = \gamma\tilde{w}_{xx}^j(x, t), \\ \tilde{w}_x^j(0, t) = 0, \\ \tilde{w}^j(1, t) = 0. \end{cases} \quad (14b)$$

#### 4 稳定性分析

**定理 1** 选择适当的增益矩阵  $L$ , 级联观测器的数量  $M$  和参数  $\delta > 0$ , 给定可调参数  $k_1 \in (0, 2\gamma p_4]$ , 如

果存在正常数 $p_1, p_2, p_3, p_4, g, h$ 和矩阵 $P > 0$ 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$-2\gamma(p_2 - \delta p_3) \leq 0, \tag{15}$$

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ * & \zeta_{22} & -\frac{r}{M}C^T L^T L \\ * & * & \zeta_{33} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{16}$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} \theta_{11} & p_1 - p_2 & he^{-2\delta\frac{r}{M}} \\ * & \theta_{22} & 0 \\ * & * & \theta_{33} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{17}$$

其中:

$$\zeta_{11} = -Q + \frac{r}{M}(A - LC)^T(A - LC),$$

$$\zeta_{12} = PLC + \frac{r}{M}(A - LC)^T LC,$$

$$\zeta_{13} = -PL - \frac{r}{M}(A - LC)^T L,$$

$$\zeta_{22} = -(\frac{M}{r} - 2\delta)I + \frac{r}{M}C^T L^T LC,$$

$$\zeta_{33} = -k_1 + \frac{r}{M}L^T L,$$

$$\theta_{11} = -he^{-2\delta\frac{r}{M}} + g + 2\delta p_1,$$

$$\theta_{22} = -2p_3 + \frac{r^2}{M^2}h,$$

$$\theta_{33} = -(g + h)e^{-2\delta\frac{r}{M}} - \frac{\pi^2}{4}(2\gamma p_4 - k_1) + 2\delta p_4,$$

$$Q = -[P(A - LC) + (A - LC)^T P + 2\delta P],$$

那么, 对于系统(1), 级联观测器(10a)-(10b)可以完成对系统状态的估计, 误差系统(14a)-(14b)指数稳定.

**证** 此定理的证明可以通过以下4步完成:

**步骤 1** 针对 $j = 1$ 的情形, 证明误差系统(14a)指数稳定.

定义如下所示的Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V^1(t) = & \tilde{Y}^{1T}(t)P\tilde{Y}^1(t) + \\ & \int_{t-\frac{r}{M}}^t (s-t + \frac{r}{M})\dot{\tilde{Y}}^{1T}(s)\dot{\tilde{Y}}^1(s)ds + \\ & p_1 \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t)]^2 dx + \gamma p_3 \int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t)]^2 dx + \\ & p_4 \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx + \\ & g \int_0^1 \int_{t-\frac{r}{M}}^t e^{2\delta(s-t)} [\tilde{w}^1(x, s)]^2 ds dx + \\ & \frac{r}{M}h \int_0^1 \int_{-\frac{r}{M}}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\delta(s-t)} [\tilde{w}_s^1(x, s)]^2 ds d\theta dx. \end{aligned} \tag{18}$$

沿着误差系统(14a)的解, 对 $V^1(t)$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}^1(t) + 2\delta V^1(t) \leq & -\tilde{Y}^{1T}(t)Q\tilde{Y}^1(t) - 2\tilde{Y}^{1T}(t)PL\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\tilde{Y}^{1T}(t)PLC\Upsilon^1(t) + \frac{r}{M}\dot{\tilde{Y}}^{1T}(t)\dot{\tilde{Y}}^1(t) - \\ & (1 - 2\delta\frac{r}{M}) \int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{Y}}^{1T}(s)\dot{\tilde{Y}}^1(s)ds + \\ & 2p_1 \int_0^1 \tilde{w}^1(x, t)\tilde{w}_t^1(x, t)dx + \\ & 2\gamma p_3 \int_0^1 \tilde{w}_x^1(x, t)\tilde{w}_{xt}^1(x, t)dx + \\ & 2p_4 \int_0^1 \tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})\tilde{w}_t^1(x, t - \frac{r}{M})dx + \\ & g \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t)]^2 dx - \\ & ge^{-2\delta\frac{r}{M}} \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx - \\ & \frac{r}{M}h \int_0^1 \int_{t-\frac{r}{M}}^t e^{2\delta(s-t)} [\tilde{w}_s^1(x, s)]^2 ds dx + \\ & (\frac{r}{M})^2 h \int_0^1 [\tilde{w}_t^1(x, t)]^2 dx + \\ & 2\delta p_1 \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t)]^2 dx + 2\delta\gamma p_3 \int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t)]^2 dx + \\ & 2\delta p_4 \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx, \end{aligned} \tag{19}$$

其中:

$$Q = -[P(A - LC) + (A - LC)^T P + 2\delta P],$$

$$\Upsilon_1(t) = \int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{Y}}^1(s)ds.$$

根据Jensen不等式, 可得

$$\begin{aligned} & -(1 - 2\delta\frac{r}{M}) \int_{t-\frac{r}{M}}^t \dot{\tilde{Y}}^{1T}(s)\dot{\tilde{Y}}^1(s)ds \leq \\ & -(\frac{M}{r} - 2\delta)\Upsilon_1^T(t)\Upsilon_1(t) \end{aligned} \tag{20}$$

和

$$\begin{aligned} & -\frac{r}{M}h \int_0^1 \int_{t-\frac{r}{M}}^t e^{2\delta(s-t)} [\tilde{w}_s^1(x, s)]^2 ds dx \leq \\ & -he^{-2\delta\frac{r}{M}} \int_0^1 [\int_{t-\frac{r}{M}}^t \tilde{w}_s^1(x, s)dx]^2 dx = \\ & -he^{-2\delta\frac{r}{M}} \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t) - \tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx. \end{aligned} \tag{21}$$

根据边界条件 $\tilde{w}_x^1(0, t) = 0$ 和 $\tilde{w}^1(1, t) = 0$ , 通过分部积分法, 得到

$$\begin{aligned} & 2p_4 \int_0^1 \tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})\tilde{w}_t^1(x, t - \frac{r}{M})dx = \\ & -2\gamma p_4 \int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx. \end{aligned} \tag{22}$$

通过Sobolev不等式和Wirtinger不等式得到

$$-\int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx \leq -[\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M})]^2$$

和

$$-\int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx \leq -\frac{\pi^2}{4} \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx.$$

利用上式, 对式(22)进一步做如下处理:

$$\begin{aligned}
 & 2p_4 \int_0^1 \tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M}) \tilde{w}_t^1(x, t - \frac{r}{M}) dx = \\
 & -2\gamma p_4 \int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx \leq \\
 & -k_1 [\tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M})]^2 - \\
 & \frac{\pi^2}{4} (2\gamma p_4 - k_1) \int_0^1 [\tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx, \quad (23)
 \end{aligned}$$

其中常数  $k_1 \in (0, 2\gamma p_4]$ .

对误差系统(14a)应用Descriptor方法<sup>[30]</sup>, 可得

$$\begin{aligned}
 0 = & 2 \int_0^1 [p_2 \tilde{w}^1(x, t) + p_3 \tilde{w}_t^1(x, t)] \times \\
 & [\gamma \tilde{w}_{xx}^1(x, t) - \tilde{w}_t^1(x, t)] dx. \quad (24)
 \end{aligned}$$

通过分部积分法, 式(24)可写为

$$\begin{aligned}
 0 = & -2\gamma p_2 \int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t)]^2 dx - \\
 & 2\gamma p_3 \int_0^1 \tilde{w}_x^1(x, t) \tilde{w}_{xt}^1(x, t) dx - \\
 & 2p_2 \int_0^1 \tilde{w}^1(x, t) \tilde{w}_t^1(x, t) dx - \\
 & 2p_3 \int_0^1 [\tilde{w}_t^1(x, t)]^2 dx. \quad (25)
 \end{aligned}$$

根据式(20)–(23), 将式(25)的右端加到式(19)的右端, 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}^1(t) + 2\delta V^1(t) \leq & \phi_1^T(t) \Xi_1 \phi_1(t) + \int_0^1 \varphi_1^T(x, t) \Xi_2 \varphi_1(x, t) dx - \\
 & 2\gamma (p_2 - \delta p_3) \int_0^1 [\tilde{w}_x^1(x, t)]^2 dx, \quad (26)
 \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(t) = & \text{col} \left\{ \tilde{Y}^{1T}(t), \Upsilon_1(t), \tilde{w}^1(0, t - \frac{r}{M}) \right\}, \\
 \varphi_1(t) = & \text{col} \left\{ \tilde{w}^1(x, t), \tilde{w}_t^1(x, t), \tilde{w}^1(x, t - \frac{r}{M}) \right\}.
 \end{aligned}$$

如果  $-2\gamma (p_2 - \delta p_3) \leq 0$  成立, 并且  $\Xi_1$  和  $\Xi_2$  满足线性矩阵不等式(16)–(17), 那么有  $\dot{V}^1(t) + 2\delta V^1(t) \leq 0$ .

**步骤 2** 针对  $j = 2, 3, \dots, M$  的情形, 证明误差系统(14b)指数稳定.

误差系统(14b)与系统(14a)类似, 其唯一的不同在于系统(14b)含有额外的项  $L\tilde{w}^{j-1}(0, t) + LC\tilde{Y}^{j-1}(t)$ . 定义Lyapunov函数

$$\begin{aligned}
 V^j(t) = & \tilde{Y}^{jT}(t) P \tilde{Y}^j(t) + \\
 & \int_{t-\frac{r}{M}}^t (s-t + \frac{r}{M}) \dot{\tilde{Y}}^{jT}(s) \dot{\tilde{Y}}^j(s) ds + \\
 & p_1 \int_0^1 [\tilde{w}^j(x, t)]^2 dx + \gamma p_3 \int_0^1 [\tilde{w}_x^j(x, t)]^2 dx + \\
 & p_4 \int_0^1 [\tilde{w}^j(x, t - \frac{r}{M})]^2 dx + \\
 & g \int_0^1 \int_{t-\frac{r}{M}}^t e^{2\delta(s-t)} [\tilde{w}^j(x, s)]^2 ds dx +
 \end{aligned}$$

$$\frac{r}{M} h \int_0^1 \int_{-\frac{r}{M}}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\delta(s-t)} [\tilde{w}_s^j(x, s)]^2 ds d\theta dx. \quad (27)$$

如果线性矩阵不等式(15)–(17)成立, 那么  $V^j(t)$  满足

$$\dot{V}^j(t) + (2\delta - \varepsilon\chi) V^j(t) - \chi V^{j-1}(t) \leq 0, \quad (28)$$

其中: 常数  $\varepsilon > 0$  足够小,  $\chi > 0$  足够大, 且  $2\delta - \varepsilon\chi > 0$ .

**步骤 3** 证明误差系统(14)指数稳定.

考虑如下所示的Lyapunov函数<sup>[31]</sup>:

$$V(t) = V^1(t) + \varepsilon V^2(t) + \dots + \varepsilon^{M-1} V^M(t).$$

用  $\varepsilon^{j-1}$  乘式(28), 再将其与  $\dot{V}^1(t) + 2\delta V^1(t) \leq 0$  相加, 可得

$$\dot{V}(t) + (2\delta - \varepsilon\chi) V(t) \leq 0.$$

故, 误差系统(14)指数稳定.

**步骤 4** 步骤1–3讨论了系统  $[\tilde{Y}^j(t), \tilde{w}^j(x, t)]$  的指数稳定性, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\|\tilde{Y}^j(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\tilde{w}^j(x, t)\|_{L^2(0,l)}^2] = 0.$$

接下来讨论系统  $[\tilde{X}^j(t), \tilde{z}^j(x, t)]$  的稳定性.

根据变换(6), 可得

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{z}^j(x, t)\| \leq & \|\tilde{w}^j(x, t)\| + \max_{0 \leq x \leq 1} |CN(x)| \cdot |N^{-1}(1)| \cdot |\tilde{X}^j(t)|.
 \end{aligned}$$

由上式和  $\tilde{Y}^j(t) = N^{-1}(1)\tilde{X}^j(t)$  可得

$$\begin{aligned}
 |\tilde{X}^j(t)|^2 + \|\tilde{z}^j(x, t)\|^2 \leq & a_1 |N(1)\tilde{Y}^j(t)|^2 + 2\|\tilde{w}^j(x, t)\|^2,
 \end{aligned}$$

其中  $a_1 = 1 + 2(\max_{0 \leq x \leq 1} |CN(x)| \cdot |N^{-1}(1)|)^2$ . 所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\|\tilde{X}^j(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\tilde{z}^j(x, t)\|_{L^2(0,l)}^2] = 0. \quad \text{证毕.}$$

**注 1** 定理1中的线性矩阵不等式条件依赖于  $M$  的取值. 如果对于某个  $M$  的取值, 线性矩阵不等式存在可行解, 那么当其他参数不变时, 对于任意比  $M$  大的正整数, 线性矩阵不等式也一定有可行解. 也就是说, 对于大时滞  $r$ , 可以找到一个足够大的  $M$  使得定理1中的线性矩阵不等式条件成立.

**注 2** 当时滞  $r$  不变时,  $M$  的取值越大,  $r/M$  的值越小, 观测误差的收敛效果越好. 后面的仿真实例会验证这一点.

## 5 仿真实例

为了验证所设计的观测器(10)的有效性, 考虑如下所示的ODE–热方程级联系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), \\ z_t(x, t) = z_{xx}(x, t) + x u_2(t), \\ z_x(0, t) = 0, \\ z(1, t) = [1 \ 0] X(t), \\ X(0) = [0 \ 3]^T, z(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (29)$$

其中:  $X(t)=[X_1(t) X_2(t)]^T, u(t)=[u_1(t) u_2(t)]^T$ .

当输出时滞  $r = 0.6$  时, 分别考虑  $M = 1, M = 2$  和  $M = 6$  三种情形下的观测器(10). 考虑上述3种情形的目的是, 通过  $M$  的不同取值, 比较观测器的性能. 根据定理1, 令  $k_1 = \gamma p_4$ , 给定  $L = [2 \ 2]^T$  和  $\delta = 0.2$ . 通过Yalimp方法, 得到线性矩阵不等式(15)–(17)的可行解如表1所示.

表 1 可行解

Table 1 The feasible solutions

	$M = 2$	$M = 6$
$P$	$\begin{bmatrix} 2.3757 & -1.3584 \\ -1.3584 & 1.4634 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.1859 & -2.1109 \\ -2.1109 & 2.8032 \end{bmatrix}$
$p_1$	81.6190	2.7082
$p_2$	102.7873	3.5013
$p_3$	131.8752	3.6412
$p_4$	346.7440	7.0275
$g$	30.9470	0.9865
$h$	219.3543	4.4967

选取  $u_1(t) = \sin t$  和  $u_2(t) = \cos t$ . 仿真采用有限差分法, 时间和空间上的步长分别取  $dt = 0.0001$  和  $dx = 0.1$ . 仿真结果如图1–9所示.

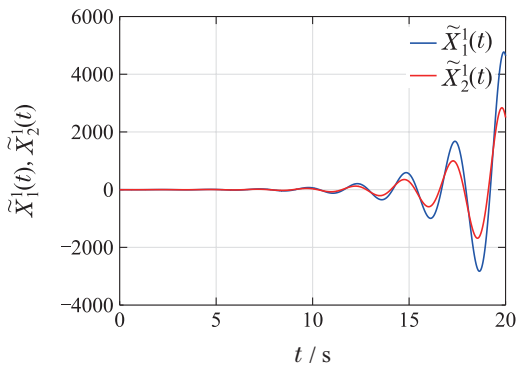


图 1  $M = 1$  时的观测误差  $\tilde{X}_1^1(t)$  和  $\tilde{X}_2^1(t)$

Fig. 1 Observation errors  $\tilde{X}_1^1(t)$  and  $\tilde{X}_2^1(t)$  with  $M = 1$

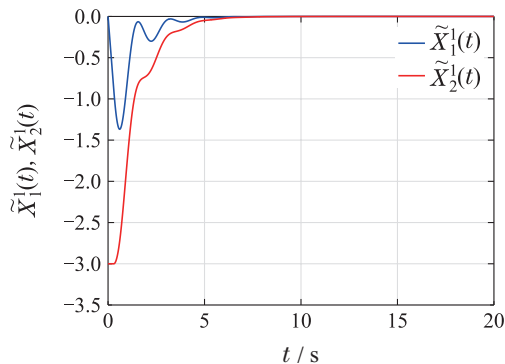


图 2  $M = 2$  时的观测误差  $\tilde{X}_1^1(t)$  和  $\tilde{X}_2^1(t)$

Fig. 2 Observation errors  $\tilde{X}_1^1(t)$  and  $\tilde{X}_2^1(t)$  with  $M = 2$

由图1和图5可知, 当  $M = 1$  时, 观测误差不收敛, 这说明经典的观测器(单个观测器)不足以补偿时滞

$r = 0.6$ , 无法完成对系统状态的估计. 这正是本文提出级联观测器的必要性, 需要增大  $M$  的取值, 来达到估计系统状态的目的. 由图2和图6可知, 当  $M = 2$  时, 观测误差指数收敛, 这说明与单个观测器相比, 级联观测器的设计对补偿时滞是有效的. 由图3和图7可知, 当  $M = 6$  时, 观测误差指数收敛且收敛效果更好, 这说明  $M$  的取值越大, 级联观测器的性能越好. 图4是关于  $t, \tilde{X}_1^1(t)$  和  $\tilde{X}_2^1(t)$  的三维图, 可以更加直观地看到误差  $\tilde{X}_1^1(t)$  随时间  $t$  的变化趋势. 为了更加直观地比较误差  $\tilde{z}^1(x, t)$  的收敛效果, 图8刻画了其在端点  $x = 1$  处的观测误差. 上面的仿真结果证实了本文所设计的级联观测器的有效性, 也验证了定理1的结果.

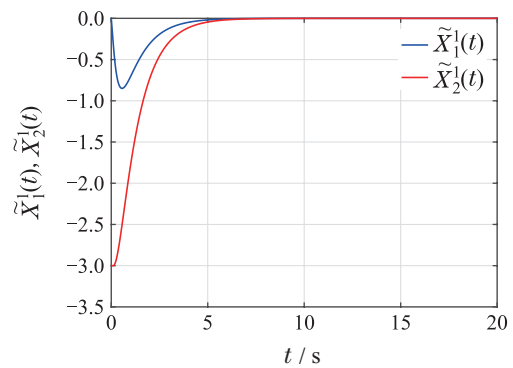


图 3  $M = 6$  时的观测误差  $\tilde{X}_1^1(t)$  和  $\tilde{X}_2^1(t)$

Fig. 3 Observation errors  $\tilde{X}_1^1(t)$  and  $\tilde{X}_2^1(t)$  with  $M = 6$

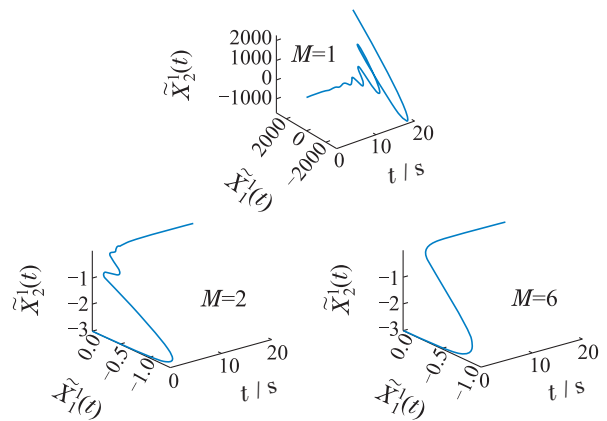


图 4 关于  $t, \tilde{X}_1^1(t)$  和  $\tilde{X}_2^1(t)$  的三维图

Fig. 4 Three-dimensional image of  $t, \tilde{X}_1^1(t)$  and  $\tilde{X}_2^1(t)$

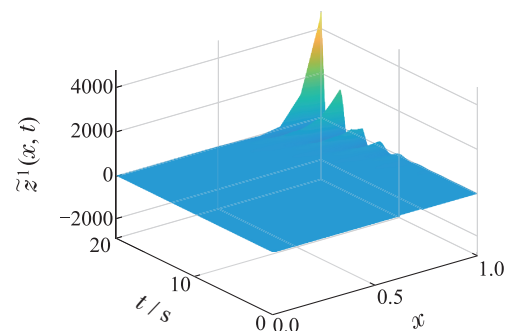


图 5  $M = 1$  时的观测误差  $\tilde{z}^1(x, t)$

Fig. 5 Observation error  $\tilde{z}^1(x, t)$  with  $M = 1$

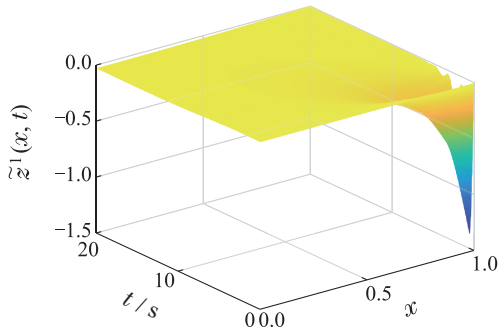


图6  $M = 2$ 时的观测误差  $\tilde{z}^1(x, t)$

Fig. 6 Observation error  $\tilde{z}^1(x, t)$  with  $M = 2$

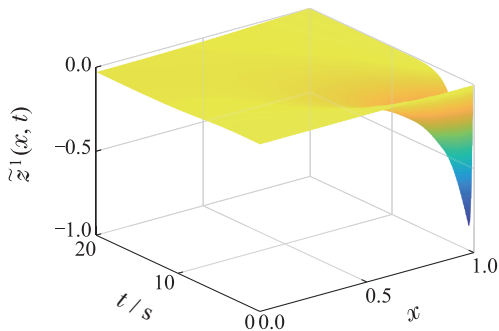


图7  $M = 6$ 时的观测误差  $\tilde{z}^1(x, t)$

Fig. 7 Observation error  $\tilde{z}^1(x, t)$  with  $M = 6$

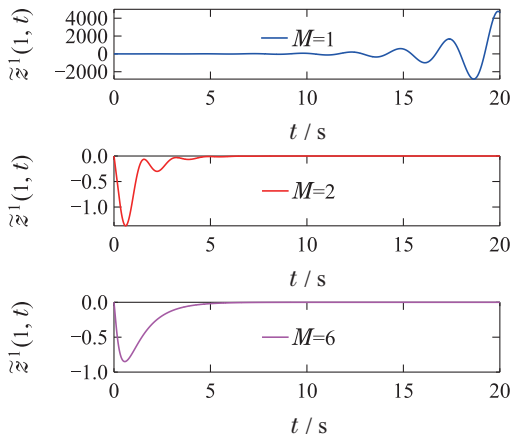


图8  $r = 0.6$ 时的观测误差  $\tilde{z}^1(1, t)$

Fig. 8 Observation error  $\tilde{z}^1(1, t)$  with  $r = 0.6$

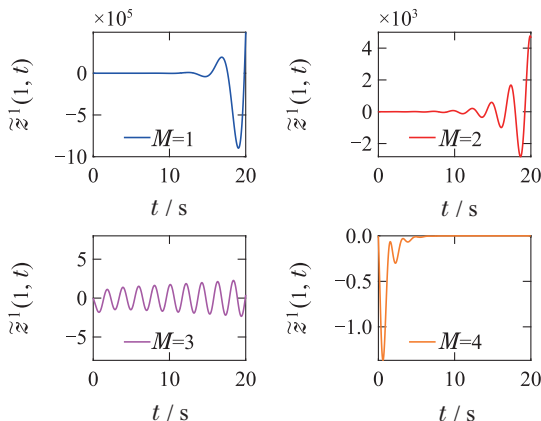


图9  $r = 1.2$ 时的观测误差  $\tilde{z}^1(1, t)$

Fig. 9 Observation error  $\tilde{z}^1(1, t)$  with  $r = 1.2$

为了进一步验证本文的理论结果,考虑了其他时滞的情况并进行了分析.文中以  $r = 1.2$  为例,通过 Yalimp 方法进行了验证.发现只有当  $M \geq 4$  时,线性矩阵不等式(15)–(17)才有可行解.从图9的仿真结果也可以看出,  $M = 1, 2, 3$  时的级联观测器不足以补偿时滞  $r = 1.2$ ,观测误差  $\tilde{z}^1(1, t)$  不收敛.当  $M = 4$  时,观测误差  $\tilde{z}^1(1, t)$  指数收敛.因此,可以通过增加级联观测器的数量  $M$  来实现对大时滞的补偿,并完成对系统状态的估计.

### 6 结论

本文为带有输出时滞的ODE-热方程级联系统设计了一种新颖的级联观测器来估计系统的状态,其优势体现在对任意时滞均有效.这种观测器设计方法将大时滞划分为若干段小时滞,逐步估计系统的状态.结合 backstepping-like 方法,本文证明了误差系统指数稳定.最后,通过仿真实例,验证了所提出的理论结果.然而,本文考虑的是常时滞的情况,对于变时滞的研究可以在下一步工作中考虑.后续工作还可以考虑输入时滞、状态时滞的存在,将级联观测器的设计方法推广到更为复杂的系统中,比如PDE-PDE级联系统.

### 参考文献:

- [1] HE X, HE W, LIU Y, et al. Robust adaptive control of an offshore ocean thermal energy conversion system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(12): 5285 – 5295.
- [2] WANG J M, WANG F, LIU X D. Exponential stability of a schrödinger equation through boundary coupling a wave equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 65(7): 3136 – 3142.
- [3] KANG W, FRIDMAN E. Boundary control of delayed ODE-heat cascade under actuator saturation. *Automatica*, 2017, 83: 252 – 261.
- [4] GUO Chunli, ZHOU Zhongcheng. Boundary control for a partial differential equation-ordinary differential equation system cascaded at internal point. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(6): 779 – 785.  
(郭春丽, 周中成. 一类内部点级联的PDE-ODE系统的边界控制. 控制理论与应用, 2014, 31(6): 779 – 785.)
- [5] QIN Zhenhua, HE Xiongxiang, LI Gang, et al. Adaptive decentralized tracking control for nonlinear interconnected systems with input quantization and output constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(5): 1111 – 1124.  
(秦贞华, 何熊熊, 李刚, 等. 考虑量化输入和输出约束的互联系统自适应分散跟踪控制. 自动化学报, 2021, 47(5): 1111 – 1124.)
- [6] BOSKOVIC D M, KRSTIC M, LIU W. Boundary control of an unstable heat equation via measurement of domain-averaged temperature. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(12): 2022 – 2028.
- [7] GUO B Z, JIN F F. Backstepping approach to the arbitrary decay rate for Euler-Bernoulli beam under boundary feedback. *International Journal of Control*, 2010, 83(10): 2098 – 2106.
- [8] CERPA E, CORON J M. Rapid stabilization for a Korteweg-de Vries equation from the left Dirichlet boundary condition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1688 – 1695.
- [9] JIN F F, GUO W. Boundary state feedback exponential stabilization for a one-dimensional wave equation with velocity recirculation. *Automatica*, 2020, 113: 108796.



- [10] KANG W, FRIDMAN E. Sliding mode control of Schrödinger equation-ODE in the presence of unmatched disturbances. *Systems & Control Letters*, 2016, 98: 65 – 73.
- [11] WANG J, KRSTIC M. Event-triggered backstepping control of  $2 \times 2$  hyperbolic PDE-ODE systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, 53(2): 7551 – 7556.
- [12] WANG J, KRSTIC M. Regulation-triggered adaptive control of a hyperbolic PDE-ODE model with boundary interconnections. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2021, 35(8): 1513 – 1543.
- [13] DAI J, REN B. UDE-based robust boundary control for an unstable parabolic PDE with unknown input disturbance. *Automatica*, 2018, 93: 363 – 368.
- [14] AHMED-ALI T, GIRI F, KRSTIC M, et al. PDE based observer design for nonlinear systems with large output delay. *Systems & Control Letters*, 2018, 113: 1 – 8.
- [15] KANG W, FRIDMAN E. Distributed stabilization of Korteweg-de Vries-Burgers equation in the presence of input delay. *Automatica*, 2019, 100: 260 – 273.
- [16] HUANG Yaxin, ZHANG Xinghui, JIANG Mengmeng. Adaptive control for high-order nonlinear feedforward systems with input and state delays. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(7): 1273 – 1279. (黄亚欣, 张星慧, 蒋蒙蒙. 带有输入和状态时滞的高阶非线性前馈系统的自适应控制. *自动化学报*, 2017, 43(7): 1273 – 1279.)
- [17] LI J, FENG H, WU J. Stabilization of a semilinear wave equation with variable coefficients and a delay term in the boundary feedback. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, 2013(112): 1 – 18.
- [18] GU K, CHEN J, KHARITONOV V L. *Stability of Time-delay Systems*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2003.
- [19] ARTSTEIN Z. Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(4): 869 – 879.
- [20] KRSTIC M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Berlin: Birkhauser, 2009.
- [21] GERMANI A, MANES C, PEPE P. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(1): 96 – 101.
- [22] AHMED-ALI T, CHERRIER E, LAMNABHI-LAGARRIGUE F. Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 221 – 226.
- [23] AHMED-ALI T, FRIDMAN E, GIRI F, et al. Observer design for a class of parabolic systems with large delays and sampled measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(5): 2200 – 2206.
- [24] NAJAFIA M, HOSSEINIA S, SHEIKHOLESLAM F, et al. Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors. *International Journal of Control*, 2013, 86(4): 599 – 609.
- [25] SANZ R, GARCIA P, FRIDMAN E, et al. Robust predictive extended state observer for a class of nonlinear systems with time-varying input delay. *International Journal of Control*, 2020, 93(2): 217 – 225.
- [26] KANG W, HAN Z, LIU Z, et al. Fuzzy observer for 2-D parabolic equation with output time delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021, 29(11): 3552 – 3560.
- [27] YANG Z, FRIDMAN E. Sub-predictors for network-based control under uncertain large delays. *Automatica*, 2021, 123: 109350.
- [28] WANG T. Stability in abstract functional differential equations. Part II. Applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1994, 186(3): 853 – 861.
- [29] AHMED-ALI T, KARAFYLLIS I, GIRI F, et al. Exponential stability analysis of sampled-data ODE-PDE systems and application to observer design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(6): 3091 – 3098.
- [30] FRIDMAN E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, 2001, 43(4): 309 – 319.
- [31] FRIDMAN E, BONNET C, MAZENC F, et al. Stability of the cell dynamics in acute myeloid leukemia. *Systems & Control Letters*, 2016, 88: 91 – 100.

#### 作者简介:

张 静 博士研究生, 目前研究方向为分布参数系统的预测控制, E-mail: janet\_zhangjing@163.com;

康 文 研究员, 目前研究方向为分布参数系统、时滞系统、智能控制等, E-mail: kangwen@amss.ac.cn.