

# 基于自适应精确罚函数的分布式资源分配算法

时侠圣<sup>1</sup>, 徐磊<sup>2</sup>, 杨涛<sup>2†</sup>

(1. 中国矿业大学 地下空间智能控制教育部工程研究中心, 江苏 徐州 221116;

2. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 辽宁 沈阳 110819)

**摘要:** 在多智能体系统中, 分布式资源分配问题是近年来研究热点之一. 分布式资源分配问题旨在通过智能体间信息交互实现资源最优配置. 其中智能体局部约束给算法设计带来巨大挑战. 首先, 针对一阶多智能体系统, 提出基于自适应精确罚函数的分布式资源分配算法, 其中各智能体利用距离函数实现局部约束求解. 此外, 自适应设计思想旨在避免算法对全局先验知识获取. 其次, 利用跟踪技术实现二阶多智能体系统算法设计. 并利用凸函数和非光滑分析法给出严谨的收敛性分析. 最后, 仿真结果验证了本文所设计优化算法对强凸分布式资源分配问题的有效性.

**关键词:** 分布式资源分配; 自适应; 距离函数; 非光滑分析

**引用格式:** 时侠圣, 徐磊, 杨涛. 基于自适应精确罚函数的分布式资源分配算法. 控制理论与应用, 2022, 39(10): 1937 – 1945

DOI: 10.7641/CTA.2022.10936

## An adaptive exact-penalty-based distributed resource allocation algorithm

SHI Xia-sheng<sup>1</sup>, XU Lei<sup>2</sup>, YANG Tao<sup>2†</sup>

(1. Engineering Research Center of Intelligent Control for Underground Space, Ministry of Education, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221116, China;

2. The State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

**Abstract:** Recently, the distributed resource allocation problem is one of the important issues in multi-agent systems. The distributed resource allocation problem aims to realize the optimal allocation of resources through the information interaction between agents. The local constraints of each agent bring great challenges to the algorithm design. First, an adaptive exact-penalty-based distributed resource allocation algorithm is proposed for the first-order multi-agent system, in which the local constraint is reformed by the distance function. Besides, the priori computation or knowledge of the global cost function is avoided based on the adaptive control scheme. Second, the above proposed first-order algorithm is modified for the second-order multi-agent system based on the tracking control technology. Then, by virtual of the non-smooth analysis and convex function theory, the rigorous convergence analysis is given. Finally, the proposed algorithms are claimed effectively by the simulation examples.

**Key words:** distributed resource allocation; adaptive; distance function; non-smooth analysis

**Citation:** SHI Xiasheng, XU Lei, YANG Tao. An adaptive exact-penalty-based distributed resource allocation algorithm. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(10): 1937 – 1945

## 1 引言

由于网络系统在许多应用场景中都具有重要应用前景, 比如传感器网络、智能电网、机器人编队等, 多智能体系统控制和优化在近年来受到越来越多的关注<sup>[1-2]</sup>. 而关于多智能体系统的分布式优化问题更是

热点之一. 分布式优化旨在通过智能体间的信息交互实现某些决策量或者行为量的最优一致性. 到目前为止, 许多学者已对分布式优化问题进行深入研究<sup>[3-6]</sup>. 事实上, 上述大部分成果都与设计分布式优化算法相关, 而智能体动力学特性并没有受到太多关注. 随着

收稿日期: 2021-09-30; 录用日期: 2022-04-27.

†通信作者. E-mail: yangtao@mail.neu.edu.cn; Tel.: +86 13504936511.

本文责任编辑: 刘帅.

中央高校基本科研业务费专项资金(2021QN1052)资助.

Supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities(2021QN1052).

信息物理系统技术和控制理论技术发展,近年来越来越多基于智能体动力学特性的连续时间分布式优化算法得到广泛研究.例如,文献[7]基于增广拉格朗日乘子法和事件触发通信机制设计一类无约束分布式优化算法,确保算法收敛的同时减少不必要的通信资源浪费.此外其他类型的智能体动力学特性也得到广泛研究,包括单积分系统<sup>[8-9]</sup>、双积分系统<sup>[10]</sup>、欧拉-拉格朗日系统<sup>[11]</sup>、线性多智能体系统<sup>[12]</sup>和非线性多智能体系统<sup>[13]</sup>等.

作为分布式优化领域最重要的分支之一,分布式资源分配问题因其广泛的应用前景而受到极大关注.例如通信网络<sup>[14]</sup>和能源系统<sup>[15]</sup>等.在资源分配问题中,智能体不但要最小化成本函数,此外也受到一些局部约束和全局等式约束.首先针对不含局部不等式约束的资源分配问题,很多优秀的连续时间分布式优化算法被设计出来,包括固定时间收敛算法<sup>[16]</sup>、预定义时间收敛算法<sup>[17]</sup>,以及基于一阶多智能体系统<sup>[18]</sup>、二阶多智能体系统<sup>[19]</sup>、高阶多智能体系统<sup>[20]</sup>、线性多智能体系统<sup>[21]</sup>和非线性多智能体系统<sup>[22]</sup>等的分布式优化算法.然而智能体局部约束广泛存在于实际系统中,比如经济调度中发电机组输出功率存在上下限等.因此在算法设计时势必要将智能体局部约束考虑进来.

为求解资源分配问题中的局部约束,文献[23]首先将微分映射算子引入进来,在算法执行时,每个智能体都需要计算梯度在约束集上的切锥,因而增加一部分计算负担.同时,直接计算梯度到约束集的投影,该文献也设计一类基于映射算子的分布式资源分配算法.该类方法受到学者广泛关注和再创新,目前已构建很多不同特色的分布式优化算法,包括微分映射算子法<sup>[24-26]</sup>和映射算子法<sup>[27-34]</sup>.映射算子虽然可以很好地解决资源分配问题中局部不等式约束,然而映射算子法的微分包含解有可能不存在.为避免映射算子的引入,若智能体局部约束为凸不等式约束时,基于KKT最优性约束条件,文献[35]对局部不等式约束建立等价的等式约束方程,设计自适应控制算法,实现不等式约束条件求解.该类方法也被称为鞍点法<sup>[36-38]</sup>.近年来,由于罚函数法可以将智能体局部约束转移至成本函数中,因此罚函数法受到学者广泛关注.文献[39-42]等和文献[43]分别利用 $\epsilon$ -精确惩罚函数法和 $\theta$ -罚函数法,将局部不等式约束转移至成本函数中,实现局部不等式约束求解.该方法也被称为内点法或者障碍函数法.对于该类精确罚函数法,必须对罚函数设计合理的惩罚因子,否则算法可能无法收敛至最优解.此外上述惩罚因子需提前获知,且无法实现自适应获取.

为此,受文献[44]启发,本文拟利用距离函数设计一类基于精确罚函数法的分布式资源分配算法.本文

贡献点可总结如下:1)将基于距离函数的精确罚函数法引入分布式资源分配问题中,设计一类新型分布式优化算法.与文献[45]不同,本文所设计算法无需智能体间交互局部成本函数梯度信息,实现智能体隐私保护;2)不同于内点法设计思想<sup>[39-43]</sup>,本文所设计算法利用自适应控制思想避免对全局成本函数先验知识的获取,无需手动调整惩罚因子大小;3)基于跟踪控制技术,本文将所设计算法推广至二阶多智能体系统,实现二阶多智能体系统分布式资源问题的最优分配.

本文的结构安排如下:第2节主要介绍网络拓扑、问题描述和非光滑分析等;第3节中给出全文主要内容,即算法设计和对应的收敛性分析;第4节提供两个案例仿真;总结部分在第5节给出.

**符号说明:**现将后续所需符号及定义说明列于下表1.

表1 符号说明  
Table 1 Symbol description

符号	意义或定义
$\mathbb{R}$	实数集
$1_n, 0_n, I_n$	$n$ 维全1、全0向量和单位矩阵
$\otimes$	克罗内克积
$T$	向量或矩阵的转置符号
$\text{int}(\Omega)$	集合 $\Omega$ 的内点集
$\text{bd}(\Omega)$	集合 $\Omega$ 的边界集
$\ln(\cdot)$	以自然数 $e$ 为底的对数函数
$\succeq$	向量或矩阵中的大于等于符号
$d(x, \Omega)$	向量 $x$ 与集合 $\Omega$ 的距离,定义为 $d(x, \Omega) = \inf\{\ x - y\ , \forall y \in \Omega\}$
$P_\Omega(x)$	集合 $\Omega$ 中离 $x$ 最近的点,定义为 $P_\Omega(x) = \arg \inf_{y \in \Omega} \ x - y\ $
$N_\Omega(x)$	点 $x$ 在集合 $\Omega$ 上的法锥,定义为 $N_\Omega(x) = \{z   z^T(y - x) \leq 0, y \in \Omega\}$

## 2 基础知识

### 2.1 图论基础知识

智能体间通信网络可由 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示.其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示智能体节点集合, $\mathcal{E}$ 表示智能体间通信链路组成的边集合.若有 $(i, j) \in \mathcal{E}$ ,则表示智能体 $i$ 和 $j$ 可直接通信.若网络 $\mathcal{G}$ 中任意两智能体间都存在通路,则称 $\mathcal{G}$ 为连通图.此外,令 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示网络 $\mathcal{G}$ 伴随矩阵.若存在 $(i, j) \in \mathcal{E}$ ,则有 $a_{ij} = a_{ji} > 0$ ;否则 $a_{ij} = 0$ .拉普拉斯矩阵 $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定义为 $l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \forall i \in \mathcal{V}$ 和 $l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$ .由于 $L$ 为对称阵,所以其特征根可记为 $0 = \rho_1(L) \leq \rho_2(L) \leq \dots \leq \rho_n(L)$ .当网络 $\mathcal{G}$ 连通时,对任意 $1_n^T x = 0$ ,有 $x^T L x \geq \rho_2(L) \|x\|^2$ ,且 $\rho_2(L) > 0$ .

**假设 1** 在本文所研究资源分配问题中, 系统通信网络  $\mathcal{G}$  为连通图.

假设 1 是无领导者多智能体系统分布式优化问题的必要条件, 以保证多智能体各局部信息的全局性流通, 确保全局最优解的获取.

**引理 1**<sup>[15]</sup> 若假设 1 成立, 则存在正交矩阵  $Q = [\frac{1}{\sqrt{n}}1_n, R] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  满足

$$\begin{cases} 0_{n \times n} \leq \rho_2(L)K_n \leq L, \\ R(A_1)^{-1}R^T L = LR(A_1)^{-1}R^T = K_n, \end{cases} \quad (1)$$

其中矩阵  $K_n, A_1$  分别定义为  $K_n = I_n - \frac{1}{n}1_n 1_n^T, A_1 = \text{diag}\{\rho_2(L), \rho_3(L), \dots, \rho_n(L)\}$ .

### 2.2 问题描述

在本文所研究资源分配问题中, 假设系统存在  $n$  个智能体. 每个智能体都拥有一个仅自身知晓的局部成本函数  $f_i(x_i) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , 以及局部资源需求量  $p_i \in \mathbb{R}^m$ . 此外, 在实际系统中, 智能体实际分配资源量都存在约束范围  $\Omega_i$ . 以智能电网经济调度问题为例, 各发电机组都有自己的发电能力范围. 而资源分配问题就是如何在各智能体约束范围内以最低成本实现全局资源量  $\sum_{i=1}^n p_i$  最优分配. 典型地, 资源分配问题数学模型归纳如下:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \\ \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n p_i, x_i \in \Omega_i. \end{aligned}$$

不同于文献 [46] 的二次成本函数, 本文成本函数  $f_i(x_i)$  为更一般凸函数. 此外, 本文考虑的局部有界约束集  $\Omega_i$  包括文献 [39–41] 中箱式约束和文献 [35] 等一般不等式约束. 在智能电网中,  $p_i$  为各发电厂所负责区域用电量的短期预测值, 该值可利用以神经网络算法为主的智能优化算法结合用户侧历史用电数据预测得到<sup>[38]</sup>. 而智能电网经济调度问题旨在满足各发电机组自身约束范围时完成一定发电量部署以实现总发电成本最低.

为解决上述问题, 以下假设和引理被广泛应用于已有资源分配算法设计中<sup>[32, 35]</sup>.

**假设 2** 系统全局总成本函数  $f(x)$  可微且  $\mu$ -强凸 ( $\mu > 0$ ), 即对任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 有  $(x - y)^T(\partial f(x) - \partial f(y)) \geq \mu \|x - y\|^2$ . 此外, 对于任意智能体  $i$ , 存在内点  $x_i \in \text{int}(\Omega_i)$  使得等式  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n p_i$  成立.

**引理 2**<sup>[32]</sup> 若假设 2 成立, 则  $x_i^*, \forall i \in \mathcal{V}$  是问题 (2) 最优解当且仅当存在一个拉格朗日乘子  $z_0^*$  满足

$$\begin{cases} 0_m \in \partial f_i(x_i^*) + N_{\Omega_i}(x_i^*) + z_0^*, \\ \sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{i=1}^n p_i. \end{cases} \quad (2)$$

**注 1** 引理 2 中最优解的充要条件表达式与已有文献一致<sup>[24, 26, 29, 32]</sup>. 为避免歧义, 其等价形式如下:

$$-\partial f_i(x_i^*) - z_0^* \in N_{\Omega_i}(x_i^*).$$

若所考虑资源分配问题为智能电网经济调度问题, 此时智能体局部约束可定义为  $\Omega_i = [x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ , 其中  $x_i^{\min}, x_i^{\max}$  分别为智能体发电能力上下限. 以智能体下界  $x_i^{\min}$  为最优解为例, 根据法锥定义有  $N_{\Omega_i}(x_i^{\min}) = (-\infty, 0]$ , 则引理 2 中集合加法可等价于  $-\partial f_i(x_i^*) - z_0^* \in (-\infty, 0]$ .

**引理 3**<sup>[44]</sup> 对于局部约束集  $\Omega_i$ , 距离函数  $d(x_i, \Omega_i) = \inf\{\|x_i - y\|, \forall y \in \Omega_i\}$  为凸函数且其梯度定义为

$$\partial d(x_i, \Omega_i) = \begin{cases} \{0\}, & x_i \in \text{int}(\Omega_i), \\ N_{\Omega_i} \cap B(0; 1), & x_i \in \text{bd}(\Omega_i), \\ \left\{ \frac{x_i - P_{\Omega_i}(x_i)}{d(x_i, \Omega_i)} \right\}, & x_i \notin \Omega_i. \end{cases} \quad (3)$$

很显然, 若  $x_i \in \Omega_i$ , 则有  $\partial d(x_i, \Omega_i) \subset N_{\Omega_i}(x_i)$ .

借助距离函数  $d(x_i, \Omega_i)$ , 将资源分配问题修改如下:

$$\begin{cases} \min_x f(x) = \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(x_i), \\ \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n p_i, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\hat{f}_i(x_i) = f_i(x_i) + c_i d(x_i, \Omega_i)$ . 当惩罚因子  $c_i$  满足  $c_i \geq \sum_{i=1}^n \nu_i$  时问题 (4) 与问题 (2) 等价, 其中  $\nu_i$  是函数  $f_i(x_i)$  的李普希茨常数<sup>[45]</sup>.

### 2.3 微分包含

—微分包含系统给定如下:

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x(t)), x(0) = x_0, t \geq 0, \quad (5)$$

其中  $\mathcal{F}$  是定义为从  $\mathbb{R}^q$  到其子集的集值映射关系. 对于几乎任意  $t \in [0, t_1]$ , 若存在一绝对连续映射  $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^q$  满足系统 (5), 则称  $x$  是其 Caratheodory 解. 系统 (5) 的平衡点记为  $\{x \in \mathbb{R}^q | 0_q \in \mathcal{F}(x)\}$ . 假定  $V : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  是局部李普希茨连续, 且  $V(x)$  在系统 (5) 的集值 Lie 微分定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(x) &= \{\psi \in \mathbb{R} | \exists v \in \mathcal{F}(x) \\ &\text{s.t. } \xi^T v = \psi, \forall \xi \in \partial V(x)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于系统 (5), 若  $\mathcal{F}$  是局部有界、上半连续, 且取值为非空、紧致和凸值, 则对于任意初始状态, 系统 (5) 都存在 Caratheodory 解<sup>[44]</sup>.

**引理 4**<sup>[44]</sup> 令  $V : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  是局部李普希茨正则函数, 且  $W \subset \mathbb{R}^q$  是系统 (5) 的紧和强不变子空间. 假定系统 (5) 的所有 Caratheodory 解都有界,  $S_V = \{x \in \mathbb{R}^q | 0 \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(x)\}$ ,  $\mathcal{M}$  是  $\bar{S}_V \cap W$  的最大弱不变子空间, 其中  $\bar{S}_V$  是  $S_V$  的闭包. 若存在  $T = T(\phi(0)) \geq$

0对任意 $t \geq T$ 使得 $\max \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(V(\phi(t))) \leq 0$ , 那么 $\phi(t)$ ,  $t \geq T$ 收敛至 $\mathcal{M}$ 的最大弱不变子空间.

### 3 算法设计及收敛性分析

#### 3.1 一阶多智能体系统

基于增广拉格朗日乘子法, 为求解带等式约束分布式资源分配问题, 通过给每个智能体分配局部拉格朗日乘子 $\lambda_i$ , 并利用比例积分控制思想对局部拉格朗日乘子建立迭代规则, 最终促使所有局部拉格朗日乘子收敛至引理2中最优拉格朗日乘子 $z_0^*$ . 进而利用梯度下降法实现资源最优分配. 基于此, 算法设计如下:

$$\dot{x}_i \in -\alpha(\partial f_i(x_i) + c_i \partial d(x_i, \Omega_i)) - \lambda_i, \quad (7a)$$

$$\dot{\lambda}_i = x_i - p_i - \beta \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) - z_i, \quad (7b)$$

$$\dot{z}_i = \beta \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j), \quad (7c)$$

$$\dot{c}_i = d(x_i, \Omega_i), \quad (7d)$$

其中控制参数 $\alpha, \beta$ 大于零. 在上述算法中, 智能体资源分配量 $x_i$ 初始值可随机选取, 且可在局部约束集之外. 辅助变量 $z_i$ 用来平衡实际资源量 $x_i$ 与 $p_i$ 的差值. 此外,  $z_i$ 与 $\beta \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)$ 一起对变量 $\lambda_i$ 实现比例-积分控制, 且其初始值设为 $z_i(0) = 0_m$ . 为避免获取局部成本函数 $f_i(x_i)$ 的李普希茨常数, 对 $c_i$ 设计自适应控制策略, 且其初始值设定为 $c_i(0) = 0_m$ . 此外, 利用 $x, \lambda, z, c, p$ 分别表示 $x_i, \lambda_i, z_i, c_i, p_i$ 的聚合向量, 例如 $x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_n^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$ .

**注2** 由于问题(4)中存在全局等式约束, 而拉格朗日乘子法恰是解决等式约束优化问题的有效途径. 且引理2中 $z_0^*$ 是全局性拉格朗日乘子, 所以需要给每个智能体设置一局部拉格朗日乘子 $\lambda_i$ (亦称之为对偶变量), 其次结合多智能体系统一致性实现局部拉格朗日乘子趋同. 更具体地, 在式(7b)中, 项 $-\beta(L \otimes I_m)\lambda$ 确保局部拉格朗日乘子一致性. 由于最优资源量 $x_i^*$ 与局部资源需求量 $p_i$ 一般情况下是不同的, 此时利用对偶变量的历史信息 $z_i$ 来平衡两者之间差值. 此外,  $x_i - p_i$ 也被证明是对偶变量 $\lambda_i$ 的梯度信息<sup>[47]</sup>. 因此式(7b)是结合梯度下降法与比例积分控制思想. 在(7a)中, 智能体由各局部梯度项 $-\nabla f_i(x_i)$ 驱动, 而对偶变量 $\lambda_i$ 则是将智能体由局部最优解牵引至全局最优解. 此外, 结合式(7d),  $c_i \partial d(x_i, \Omega_i)$ 则保证智能体局部约束成立. 以智能体 $x_i$ 处在约束集 $\Omega_i$ 左侧为例. 由式(7d)可知此时 $c_i$ 继续增大, 项 $c_i \partial d(x_i, \Omega_i) < 0$ 且继续减小. 所以式(7a)右侧大于零, 迫使 $x_i$ 增大向约束集靠近.

其次, 分析算法(7)平衡点与问题(4)最优解的关系.

**引理5** 若 $(x^*, \lambda^*, z^*, c^*)$ 是算法(7)的平衡点, 则 $x^*$ 是问题(2)的最优解. 反之亦成立.

**证** 充分性: 由于 $z_i(0) = 0_m$ 和 $1_n^T L = 0_n$ , 所以有

$\sum_{i=1}^n z_i(t) = 0, t \geq 0$ . 令 $(x^*, \lambda^*, z^*, c^*)$ 表示算法(7)的平衡点, 则有 $x^* - p - z^* = 0$ , 结合变量 $z_i$ 的零和性, 式(2)中等式约束得以成立. 此外 $(L \otimes I_m)\lambda^* = 0_{nm}$ , 结合网络 $\mathcal{G}$ 的无向性, 所以有 $\lambda^* = I_n \otimes c_0, c_0 \in \mathbb{R}^m$ . 结合 $\partial f_i(x^*) + \lambda_i^* + c_i^* \partial d(x_i^*, \Omega_i) = 0_m$ , 可知式(2)中不等式约束得以成立. 由引理2可知,  $x_i^*, \forall i \in \mathcal{V}$ 是问题(2)的最优解.

必要性: 若 $x_i^*$ 是问题(2)最优解, 则存在 $\lambda^*$ 使得 $(L \otimes I_m)\lambda^* = 0_{nm}$ 和 $x^* - p - (L \otimes I_m)\lambda^* - z^* = 0_{nm}$ . 令 $c_i^*$ 满足 $0_m \in \partial f_i(x_i^*) + N_{\Omega_i}(x_i^*) + \lambda_i^* = \partial f_i(x_i^*) + c_i^* \cdot \partial d(x_i^*, \Omega_i) + \lambda_i^*$ . 则 $(x^*, \lambda^*, z^*, c^*)$ 是算法(7)的平衡点.

现在给出算法(7)收敛性分析.

证毕.

**定理1** 若假设1和2成立, 则算法(7)收敛至问题(2)的最优解, 且控制参数收敛范围为 $\alpha > \frac{2}{3\mu}$ ,  $0 < \beta < \frac{2\alpha\mu}{\rho_n(L)}$ .

**证** 将算法(7)右侧记为 $\Psi$ . 令李雅普诺夫函数为 $V(t, x, \lambda, z, c) = V_1(t, x, c) + V_2(t, \lambda, z) + V_3(t, x, \lambda, c)$ , 其中:

$$\begin{cases} V_1 = \|\bar{x}\|^2 + \alpha\|\bar{c}\|^2, \\ V_2 = \frac{1}{2}\|\bar{\lambda} + \bar{z}\|^2 + \frac{1}{2}\|\bar{\lambda}\|^2 + \\ \quad \frac{1}{\beta}\bar{z}^T((R(\Lambda_i)^{-1}R^T) \otimes I_m)\bar{z}, \\ V_3 = \alpha(\hat{f}(x, c) - \hat{f}(x^*, c^*)) + \frac{\alpha}{2}\|c^*\|^2 + \\ \quad (x - x^*)^T(\lambda - \lambda^*) + \alpha 1_n^T(\bar{c} - c), \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\bar{x} = x - x^*, \bar{c} = c - c^*, \bar{\lambda} = \lambda - \lambda^*, \bar{z} = z - z^*, \bar{c}$ 为常数. 显然 $V$ 关于变量 $(x, \lambda, z, c)$ 是半正定的. 将 $V_1, V_2, V_3$ 在系统(7)上的集值Lie微分分别记为 $\mathcal{L}_{\Psi}V_1, \mathcal{L}_{\Psi}V_2, \mathcal{L}_{\Psi}V_3$ , 对于任意 $\zeta_1 \in \mathcal{L}_{\Psi}V_1, \zeta_2 \in \mathcal{L}_{\Psi}V_2, \zeta_3 \in \mathcal{L}_{\Psi}V_3$ , 则有

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -2\alpha(x - x^*)^T(\partial f(x) - \partial f(x^*)) + \\ & 2\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^T(c_i^* h_i^* - c_i h_i) + \\ & 2\alpha \sum_{i=1}^n (c_i - c_i^*)d(x_i, \Omega_i) - 2\bar{x}^T \bar{\lambda}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= (\bar{\lambda} + \bar{z})^T(\bar{x} - \bar{z}) + 2\bar{z}^T(K_n \otimes I_m)\bar{\lambda} + \\ & \bar{\lambda}^T(\bar{x} - \beta(L \otimes I_m)\bar{\lambda} - \bar{z}) = \\ & 2\bar{\lambda}^T \bar{x} + \bar{x}^T \bar{z} - \|\bar{z}\|^2 - \beta\bar{\lambda}^T(L \otimes I_m)\bar{\lambda}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 &= -\|\alpha \partial \bar{f} + \bar{\lambda}\|^2 + \bar{x}(\bar{x} - \beta(L \otimes I_m)\bar{\lambda} - \bar{z}) + \\ & \alpha \sum_{i=1}^n d^2(x_i, \Omega_i) - \alpha \sum_{i=1}^n d(x_i, \Omega_i), \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\partial \bar{f}(x) = [(\partial f_1(x_1) - \partial f_1(x_1^*))^T \cdots (\partial f_n(x_n) - \partial f_n(x_n^*))^T]^T, h_i \in \partial d(x_i, \Omega_i)$ . 令

$$H_i = (x_i - x_i^*)^T (c_i^* h_i^* - c_i h_i) + (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i). \quad (12)$$

接下来证明  $H_i \leq 0$ . 分两种情形讨论:  $x_i \in \Omega_i$  和  $x_i \notin \Omega_i$ .

情形I:  $x_i \in \Omega_i$ . 此时有  $d(x_i, \Omega_i) = 0$  和  $\partial d(x_i, \Omega_i) \subset N_{\Omega_i}(x_i)$ . 因为  $h_i \in \partial d(x_i, \Omega_i), h_i^* \in \partial d(x_i^*, \Omega_i)$  和  $\partial d(x_i^*, \Omega_i) \subset N_{\Omega_i}(x_i^*)$ , 所以有  $(x_i - x_i^*)^T h_i^* \leq 0$  和  $-(x_i - x_i^*)^T h_i \leq 0$ . 进而有结论  $H_i \leq 0$ .

情形II:  $x_i \notin \Omega_i$ . 此时有  $h_i = \frac{x_i - P_{\Omega_i}(x_i)}{d(x_i, \Omega_i)}$ . 若  $c_i \leq c_i^*$ , 有

$$\begin{aligned} H_i &= (x_i - x_i^*)^T (c_i^* h_i^* - c_i h_i) + (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i) \leq \\ & (x_i - x_i^*)^T (c_i^* - c_i) h_i^* + (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i) \leq \\ & (c_i^* - c_i) d(x_i, \Omega_i) + (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i) = 0. \end{aligned}$$

借助距离函数  $d(x_i, \Omega_i)$  的凸性和  $-(x_i - x_i^*)^T (h_i - h_i^*) \leq 0$ , 上述第1个不等式成立. 其次借助距离函数  $d(x_i, \Omega_i)$  的凸性和  $c_i \leq c_i^*$ , 有  $(x_i - x_i^*)^T h_i^* \leq d(x_i, \Omega_i) - d(x_i^*, \Omega_i) \leq d(x_i, \Omega_i)$ , 所以第2个不等式也成立. 若  $c_i > c_i^*$ , 有

$$\begin{aligned} H_i &= (x_i - x_i^*)^T (c_i^* h_i^* - c_i h_i) + (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i) \leq \\ & -(c_i - c_i^*) (x_i - x_i^*)^T h_i + (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i) = \\ & -(c_i - c_i^*) (x_i - P_{\Omega_i}(x_i) + P_{\Omega_i}(x_i) - x_i^*)^T \cdot \\ & \frac{x_i - P_{\Omega_i}(x_i)}{d(x_i, \Omega_i)} + (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i) \leq \\ & -(c_i - c_i^*) (x_i - P_{\Omega_i}(x_i))^T \frac{x_i - P_{\Omega_i}(x_i)}{d(x_i, \Omega_i)} + \\ & (c_i - c_i^*) d(x_i, \Omega_i) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

上述第1个不等式推导过程中利用  $d(x_i, \Omega_i)$  的凸性, 第2个不等式推导过程中利用映射算子的性质  $(P_{\Omega_i} - x_i^*)^T (x_i - P_{\Omega_i}(x_i)) \geq 0$ . 从而有结论

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_2 &\leq -(2\alpha\mu - \frac{1}{2}) \|\bar{x}\|^2 - \\ & \frac{1}{2} \|\bar{z}\|^2 - \beta \bar{\lambda}^T (L \otimes I_m) \bar{\lambda}. \end{aligned} \quad (14)$$

由上式可知, 若  $\alpha > \frac{1}{4\mu}, \beta > 0$ , 则  $c_i(t)$  有界. 进而由式(7d)可知, 对任意  $i \in \mathcal{V}$ , 有  $d(x_i, \Omega_i) \rightarrow 0$ . 所以必然存在时间  $T(x_0, \lambda_0, z_0, c_0) > 0$  使得  $d(x_i, \Omega_i) \leq \frac{1}{2}, \forall t \geq T(x_0, \lambda_0, z_0, c_0)$ . 综合可知

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 &\leq -(\frac{3}{2}\alpha\mu - 1) \|\bar{x}\|^2 - \|\bar{z}\|^2 - \\ & \beta (1 - \frac{\beta\rho_n(L)}{2\alpha\mu}) \bar{\lambda}^T (L \otimes I_m) \bar{\lambda} - \end{aligned}$$

$$\|\alpha \partial \bar{f} + \bar{\lambda}\|^2 - \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n d(x_i, \Omega_i), \quad (15)$$

其中  $t \geq T(x_0, \lambda_0, z_0, c_0)$ . 在上式分析中利用了以下不等式:

$$-\beta \bar{x}^T L \bar{\lambda} \leq \frac{\alpha\mu}{2} \|\bar{x}\|^2 + \frac{\beta^2 \rho_n(L)}{2\alpha\mu} \bar{\lambda}^T L \bar{\lambda}. \quad (16)$$

结合  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  的任意性可知, 对任意  $t \geq T(x_0, \lambda_0, z_0, c_0)$  有

$$\max \mathcal{L}_\Psi V(x, \lambda, z, c) \leq 0. \quad (17)$$

由式(15)可知对于  $t \geq T(x_0, \lambda_0, z_0, c_0) > 0, x(t), \lambda(t), z(t), c(t)$  有界. 令  $\mathcal{K} = \{(x, \lambda, z, c) | V(x, \lambda, z, c) \leq V(x_0, \lambda_0, z_0, c_0)\}$ , 且  $\mathcal{M} \subset \mathcal{K} \cap \{(x, \lambda, z, c) | 0 \in \mathcal{L}_\Psi V(x, \lambda, z, c)\}$  是最大弱不变集.

其次, 对任意  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{z}, \hat{c}) \in \mathcal{M}, \hat{x}$  是问题(2)的最优解. 由于  $0 \in \mathcal{L}_\Psi(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{z}, \hat{c})$ , 即有

$$\begin{cases} \partial f_i(\hat{x}_i) + \hat{c}_i \partial d(\hat{x}_i, \Omega_i) + \hat{\lambda}_i = 0, \\ (L \otimes I_m) \hat{\lambda} = 0, \\ \hat{x} - p - (L \otimes I_m) \hat{\lambda} - \hat{z} = 0, \\ d(\hat{x}_i, \Omega_i) = 0, \forall i \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (18)$$

可见  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{z}, \hat{c})$  是系统(7)的平衡点, 即  $\hat{x}$  是问题(2)的最优解.

最后, 证明系统(7)生成的轨迹  $x(t)$  收敛至问题(2)最优解. 给定任意初始值, 存在有界轨迹  $(x(t), \lambda(t), z(t), c(t))$ . 所以存在一个升序时间序列  $\{t_r\}$  使得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (x(t_r), \lambda(t_r), z(t_r), c(t_r)) = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{z}, \hat{c}), \quad (19)$$

其中  $\lim_{r \rightarrow \infty} t_r = +\infty$ . 根据  $V$  定义, 对任意  $\varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$  使得  $V(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{z}, \hat{c}) \leq \varepsilon$ , 其中

$$\begin{cases} \|x - \hat{x}\| \leq \sigma, \|\lambda - \hat{\lambda}\| \leq \sigma, \\ \|z - \hat{z}\| \leq \sigma, \|c - \hat{c}\| \leq \sigma. \end{cases} \quad (20)$$

由式(19)可知, 对任意  $\varepsilon > 0, \exists t_r > 0$  使得

$$\begin{cases} \|x(t_r) - \hat{x}\| \leq \sigma, \|\lambda(t_r) - \hat{\lambda}\| \leq \sigma, \\ \|z(t_r) - \hat{z}\| \leq \sigma, \|c(t_r) - \hat{c}\| \leq \sigma. \end{cases} \quad (21)$$

进而有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|x - \hat{x}\| + \|\lambda - \hat{\lambda}\| + \|z - \hat{z}\| + \|c - \hat{c}\|) \leq \\ & V(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{z}, \hat{c}) \leq \\ & V(\hat{x}(t_r), \hat{\lambda}(t_r), \hat{z}(t_r), \hat{c}(t_r)) \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (22)$$

因此, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), \lambda(t), z(t), c(t)) = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{z}, \hat{c}). \quad (23)$$

即  $x(t)$  收敛至问题(2)的最优解. 证毕.

**注3** 基于映射算子 $P_{\Omega_i}(\cdot)$ ,已有很多文献对问题(2)进行深入探讨.然而如文献[44]所述,基于映射算子的分布式优化算法很难检查其Cathedory解是否存在,因为映射操作也许是非凸的.而与已有的内点法算法相比,本文所设计算法不需要提前获知惩罚因子大小,避免对先验知识获取[39-43].同样基于距离函数,文献[45]所设计的分布式资源分配算法需要智能体间交互局部成本函数梯度信息,降低算法隐私性.此外,该文献亦要求算法在初始状态时必须满足等式约束.而本文所设计算法可实现初始状态自由,且智能体之间仅交互拉格朗日乘子信息.

**3.2 二阶多智能体系统**

当所考虑系统为二阶多智能体系统时,利用跟踪控制技术,算法设计如下:

$$\dot{x}_i = v_i, \tag{24a}$$

$$\dot{v}_i = -kv_i - (x_i - y_i), \tag{24b}$$

$$\dot{y}_i \in -\alpha(\partial f_i(y_i) + c_i \partial d(y_i, \Omega_i)) - \lambda_i, \tag{24c}$$

$$\dot{\lambda}_i = y_i - p_i - \beta \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) - z_i, \tag{24d}$$

$$\dot{z}_i = \beta \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j), \tag{24e}$$

$$\dot{c}_i = d(y_i, \Omega_i), \tag{24f}$$

其中控制参数 $\alpha, \beta, k$ 为正数.在上式中,辅助变量 $y$ 收敛至问题(2)最优解.然后利用跟踪技术令智能体资源量 $x$ 趋向于 $y$ ,最终实现问题最优解获取.此外,变量 $x_i, \lambda_i$ 初始值可自由设定,变量 $z_i, c_i$ 设定为零初始.

**定理2** 若假设1和2成立,则算法(24)收敛至问题(2)最优解,且控制参数收敛范围为 $\alpha > \frac{7}{6\mu}, 0 < \beta < \frac{2\alpha\mu}{\rho_n(L)}, k > 3$ .

**证** 令李雅普诺夫函数为

$$V(t, x, v, y, \lambda, z, c) = V_1(t, y, c) + V_2(t, \lambda, z) + V_3(t, y, \lambda, c) + V_4(t, x, v, y),$$

其中 $V_1, V_2, V_3$ 与定理1类似,而 $V_4$ 定义如下:

$$V_4 = \frac{k-1}{2} \|\bar{x}\|^2 + \frac{1}{2} \|\bar{x} + \bar{v}\|^2. \tag{25}$$

显然 $V$ 关于变量 $(x, v, y, \lambda, z, c)$ 是半正定的.任取 $\zeta_4 \in \mathcal{L}_\Psi V_4$ ,则有

$$\zeta_4 = -(k-3)\|\bar{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 + \frac{5}{4}\|\bar{y}\|^2. \tag{26}$$

在上式中利用了如下不等式:

$$\begin{cases} \bar{x}^T \bar{y} \leq \frac{1}{4} \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2, \\ -\bar{x}^T \bar{v} \leq \frac{1}{4} \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{v}\|^2, \\ \bar{v}^T \bar{y} \leq \frac{1}{4} \|\bar{y}\|^2 + \|\bar{v}\|^2. \end{cases} \tag{27}$$

类似于定理1,有结论

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 \leq -(k-3)\|\bar{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{x}\|^2 -$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2}\alpha\mu - \frac{7}{4}\right)\|\bar{y}\|^2 - \|\bar{z}\|^2 - \\ & \beta\left(1 - \frac{\beta\rho_n(L)}{2\alpha\mu}\right)\bar{\lambda}^T(L \otimes I_m)\bar{\lambda} - \\ & \|\alpha\partial\bar{f} + \bar{\lambda}\|^2 - \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n d(x_i, \Omega_i). \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $t \geq T(x_0, \lambda_0, z_0, c_0)$ .余下分析与定理1一致,在此予以省略.证毕.

**注4** 在已有分布式资源分配算法,文献[26,38,40]针对二阶多智能体系统设计相应的微分映射算子算法、映射算子算法和 $\epsilon$ -精确罚函数法.其中文献[40]中惩罚因子过小会导致算法在稳定点时产生波动,且该方法只能解决一维资源分配问题;文献[26]通过奇异摄动法和微分映射算子解决局部不等式约束,增加计算量的同时并没有给出摄动参数收敛范围.另外该算法要求智能体初始状态也必须在局部约束范围内;文献[38]通过使用映射算子避免局部约束切向锥的求解,但基于符号函数的固定时间收敛理论的引入增加算法分析难度,且该方法无法定量分析算法稳定点的最优性.此外,与文献[26,38]的跟踪算法不同,本文所设计算法(24)没有利用到虚拟变量 $y_i$ 的二阶导信息,降低算法复杂度.

**注5** 文献[19]针对二阶智能体设计一种无局部约束分布式资源分配算法,并在智能电网经济调度问题上做了仿真验证,其中发电机组可视为如下二阶系统:

$$\begin{cases} \dot{P}_i = -\frac{1}{T_{mi}}P_i + \frac{K_{mi}}{T_{mi}}X_{ei}, \\ \dot{X}_{ei} = -\frac{1}{T_{ei}}X_{ei} + \frac{1}{T_{ei}}\bar{u}_i, \end{cases} \tag{29}$$

其中: $T_{mi}, T_{ei}, K_{mi}$ 是与涡轮发电机系统相关的参数, $P_i, \bar{u}_i$ 为输出发电量和涡轮发电机控制输入, $X_{ei}$ 为系统开环值.通过反馈线性化理论,上述发电机控制输入可设计为

$$\bar{u}_i = \frac{T_{mi}T_{ei}}{K_{mi}}\left(\frac{T_{mi}+T_{ei}}{T_{mi}T_{ei}}\dot{P}_i + \frac{1}{T_{mi}T_{ei}}P_i + u_i\right), \tag{30}$$

其中 $u_i$ 为本文所设计控制策略.从算法(24)可得到 $u_i = -kv_i - (P_i - y_i)$ ,进而实现基于涡轮发电机系统的经济调度问题.

**4 案例分析**

本小节通过一组案例仿真来验证所设计算法的有效性.案例数据来自文献[45],其中第1个案例为一维经济调度问题,包含6个智能体节点,且通信网络为无向环图.智能体局部成本函数定义为 $f_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i |x_i - \gamma_i| + c_i$ ,其中 $x_i$ 表示发表机组输出功率,单位为MW. $a_i, b_i, c_i, \gamma_i$ 为发电机组成本参数,总结在表2中.

此外,局部不等式约束定义为 $\Omega_i = [x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ , $x_i^{\min}, x_i^{\max}$ 分别是发电机组上下发电能力极限.在此案例中,假设系统总功率约束为 $\sum_{i=1}^n x_i = 215$  MW.首先利用集中式拉格朗日乘子法解得该问题最优解为 $x^* = [23.4853 \ 35 \ 50 \ 30.9804 \ 43.7206 \ 31.8137]^T \in \mathbb{R}^6$ .令其初始值为 $x(0) = [45 \ 40 \ 25 \ 35 \ 30 \ 40]$ ,一阶多智能体算法控制参数设置为 $\alpha = 0.8, \beta = 0.5$ .算

法轨迹图展示如图1所示. 从图1 可以看出, 所设计一阶多智能体算法(7)收敛至问题(2)最优解. 令 $\alpha=2$ ,  $\beta=0.5, k=4$ , 算法(24)轨迹图展示如图2所示.

表 2 发电机组参数  
Table 2 The parameters of each agent

机组编号	机组参数	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$\gamma_i$	$\Omega_i$
1		2	3	0.5	30	[20, 40]
2		1	4	1.5	28	[25, 35]
3		0.5	5	3	45	[35, 50]
4		1.5	2	1	35	[25, 45]
5		1	3.5	2.5	40	[20, 47]
6		1.5	4.5	2	35	[28, 42]

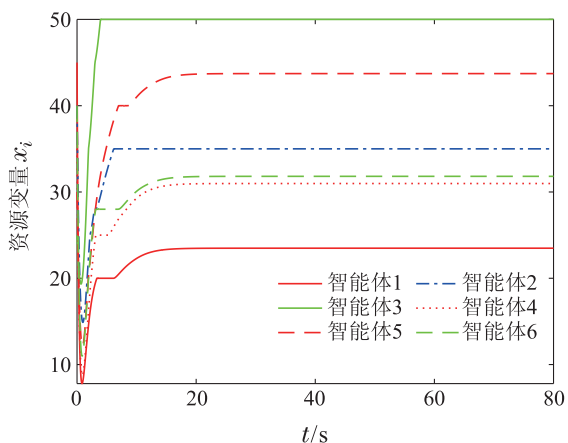


图 1 案例1中算法(7)发电机功率轨迹图

Fig. 1 The power trajectories  $x_i(t)$  in case 1 with algorithm (7)

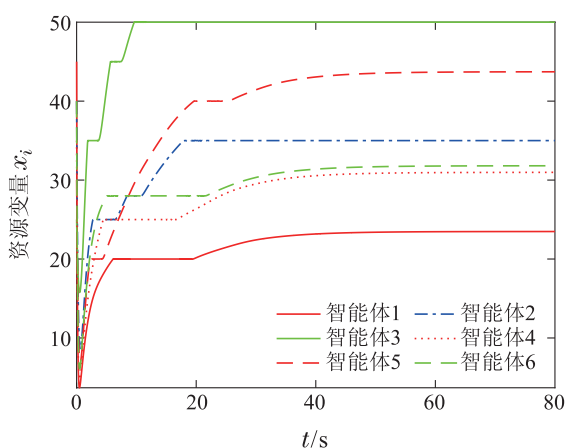


图 2 案例1中算法(24)发电机功率轨迹图

Fig. 2 The power trajectories  $x_i(t)$  in case 1 with algorithm (24)

为分析本文所设计算法优越性, 针对一阶多智能体系统, 本文算法(7)与文献[31]映射算子法、文献[24]微分映射算子法、文献[23]映射算子法、文献[39]精确罚函数法和文献[35]鞍点法等收敛轨迹对比如图3

所示, 其中误差 $e$ 定义为 $e(t) = \ln\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i(t) - x_i^*)^2\right)$ , 并且各算法控制参数采用原文章中案例设置值.

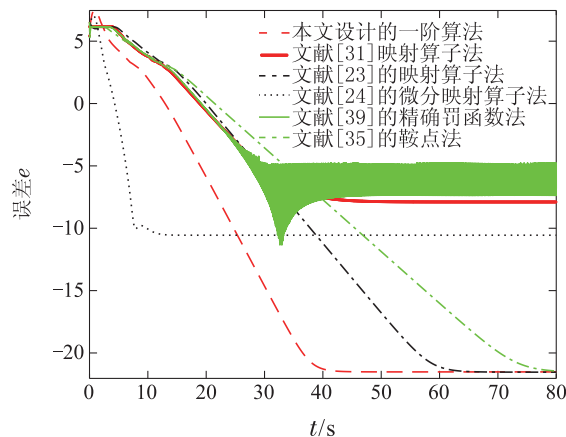


图 3 已有一阶多智能体系统分布式资源分配算法收敛轨迹图

Fig. 3 The convergence trajectories  $e_i(t)$  for the existing distributed resource allocation algorithm over first-order multi-agent systems

从图3可以看出, 文献[39]的精确罚函数法容易导致算法在稳定点处发生轻微波动, 且收敛速度较慢. 而文献[35]和文献[23]可以实现较高收敛精度. 由于已有文献采用类似设计框架, 当设置同样控制参数时算法收敛速度大致相当. 此外, 本文算法(7)中参数 $\alpha$ 能够调节 $\lambda^*$ , 所以可以通过降低 $\alpha$ 值进而降低 $\lambda^*$ 值, 从而提高算法收敛速度. 定理1分析过程中可以给出更宽收敛范围, 即 $\alpha > \frac{1}{2\mu}$ . 所以本文所设计算法在面

对较大强凸系数的资源分配问题具有较快收敛速度. 而针对二阶多智能体系统, 本文算法(24)与文献[26]微分映射法和文献[38]映射算子法的收敛速度轨迹图展示如图4所示.

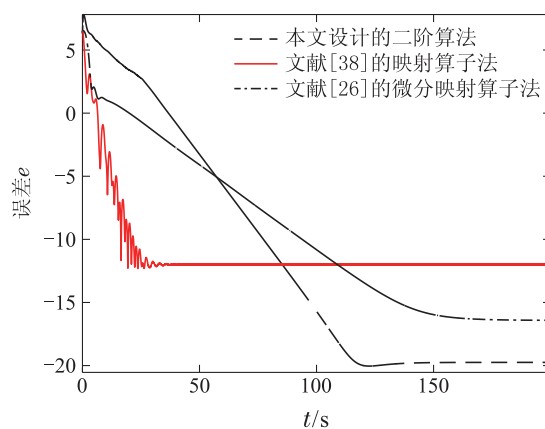


图 4 已有二阶多智能体系统分布式资源分配算法收敛轨迹图

Fig. 4 The convergence trajectories  $e_i(t)$  for the existing distributed resource allocation algorithm over second-order multi-agent systems

从图4可以看出, 由于文献[38]利用固定时间收敛



理论加速算法的收敛速度, 所以其收敛速度最快, 但符号函数和幂函数的引入也致使其稳定点精度有限. 由于文献[26]利用摄动法分析算法的收敛性. 为确保算法收敛, 摄动参数理论上无限小. 但是较小摄动参数导致算法收敛速度较低. 与之相比, 本文所设计算法在保证稳定点具有较高精度的同时算法也具有较快的收敛速度.

其次, 对一个二阶多智能体系统进行案例仿真<sup>[38]</sup>, 其中4个智能体的局部成本函数和约束定义如下:

$$\begin{cases} f_1(x_1) = x_{11}^2 + x_{12}^2 + \sqrt{(x_{11} - 2)^2 + (x_{12} - 2)^2}, \\ f_2(x_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2 + \frac{x_{21}^2}{20\sqrt{x_{21}^2 + 1}} + \frac{x_{22}^2}{20\sqrt{x_{22}^2 + 1}}, \\ f_3(x_3) = (x_{31} - 2)^2 + (x_{32} - 3)^2, \\ f_4(x_4) = \ln(e^{-0.05x_{41}} + e^{0.05x_{41}}) + x_{41}^2 + x_{42}^2 + \ln(e^{-0.05x_{42}} + e^{0.05x_{42}}), \\ \Omega_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^2 \mid \|x_1 - [2 \ 2]^T\| \leq 2\}, \\ \Omega_2 = \{x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_{21} \leq 2, 0 \leq x_{22} \leq 1\}, \\ \Omega_3 = \{x_3 \in \mathbb{R}^2 \mid x_{31} \geq 0.5, x_{32} \geq 1, x_{31} + x_{32} \leq 6\}, \\ \Omega_4 = \{x_4 \in \mathbb{R}^2 \mid \|x_4 - [3 \ 5]^T\| \leq 2\}. \end{cases} \quad (31)$$

此外该系统的网络连接拓扑也假定为环图. 等式约束为  $p = [7 \ 13]^T$ , 令控制参数  $\alpha = 1, \beta = 0.5$ , 则算法(7)的轨迹如图5所示. 其中星号\*表示上述二维分布式资源分配问题的理论最优解,  $x_1^* = (1.8884, 3.4729), x_2^* = (1.8237, 1), x_3^* = (1.4396, 4.5604), x_4^* = (1.8483, 3, 9666)$ .

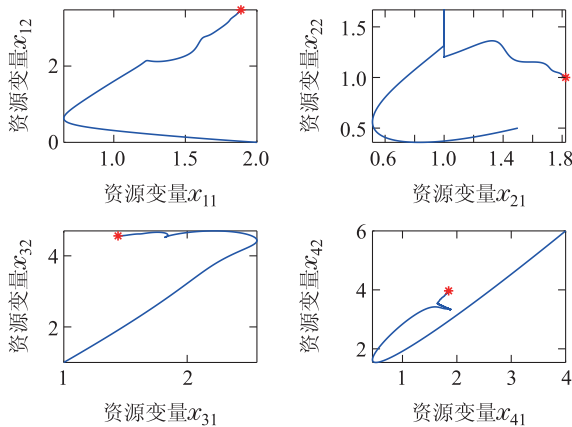


图5 案例2中算法(24)各智能体轨迹图

Fig. 5 The trajectories  $x_i(t)$  for each agent of algorithm (24) in case 2

与案例1类似, 定义算法轨迹  $x(t)$  与理论最优解  $x^*$  误差  $e(t)$ , 并将其展示在图6中. 从图5和图6可以看出, 本文所提算法对二维及以上资源分配有效.

### 5 结论

在资源分配问题中, 智能体局部约束增加了算法

分析的难度. 为确保算法Cateodory解一定存在, 结合智能体动力学特性, 本文设计一种新型一阶分布式资源分配算法, 其中算法利用距离函数表征各智能体的局部约束, 并利用距离函数设计自适应控制策略, 避免算法使用到全局成本函数的先验知识. 此外, 利用跟踪控制技术将算法推广至二阶多智能体系统. 未来会进一步考虑通信延迟或者事件触发通信对算法设计的影响, 并研究自适应控制参数设计.

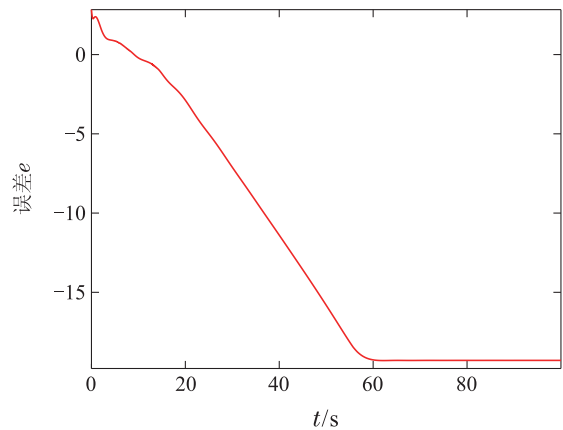


图6 案例2中算法(24)误差  $e(t)$  轨迹图

Fig. 6 The trajectories  $e(t)$  of algorithm (24) in case 2

### 参考文献:

- [1] YANG T, YI X, WU J, et al. A survey of distributed optimization. *Annual Reviews in Control*, 2019, 47: 278 – 305.
- [2] YANG T, YI X, LU S, et al. Intelligent manufacturing for the process industry driven by industrial artificial intelligence. *Engineering*, 2021, 7(9): 1224 – 1230.
- [3] YANG Tao, CHAI Tianyou. Research status and prospects of distributed collaborative optimization. *Scientia Sinica Technologica*, 2020, 50(11): 1414 – 1425. (杨涛, 柴天佑. 分布式协同优化的研究现状与展望. *中国科学: 技术科学*, 2020, 50(11): 1414 – 1425.)
- [4] XU J, TIAN Y, SUN Y, et al. Distributed algorithm for composite optimization: Unified framework and convergence analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 3555 – 3570.
- [5] DING T, ZHU S, HE J, et al. Differentially private distributed optimization via state and direction perturbation in multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(2): 722 – 737.
- [6] DING T, ZHU S, CHEN C, et al. Differentially private distributed resource allocation via deviation tracking. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 2021, 67(2): 222 – 235.
- [7] KIA S S, CORTES J, MARTINEZ S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication. *Automatica*, 2015, 55: 254 – 264.
- [8] YANG Tao, XU Lei, YI Xinlei, et al. Event-triggered distributed optimization algorithms. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(1): 133 – 143. (杨涛, 徐磊, 易新蕾, 等. 基于事件触发的分布式优化算法. *自动化学报*, 2022, 48(1): 133 – 143.)
- [9] CHEN R J, YANG T, CHAI T Y. Distributed accelerated optimization algorithms: Insights from an ODE. *Sicence China Technological Sciences*, 2020, 63(9): 1647 – 1655.
- [10] YI X, YAO L, YANG T, et al. Distributed optimization for second-order multi-agent systems with dynamic event-triggered communication. *Proceeding of the IEEE Conference on Decision and Control*. Miami, FL, USA: IEEE, 2018: 3397 – 3402.



- [11] ZHANG Y, DENG Z, HONG Y. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous Euler - Lagrangian systems. *Automatica*, 2017, 79: 207 - 213.
- [12] LI Z, WU Z, LI Z, et al. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multi-agent systems with event-triggered mechanisms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 65 (4): 1763 - 1770.
- [13] WANG X, HONG Y, JI H. Distributed optimization for a class of nonlinear multi-agent systems with disturbance rejection. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 46(7): 1655 - 1666.
- [14] IIDUKA H. Distributed optimization for network resource allocation with nonsmooth utility functions. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2019, 6(4): 1354 - 1365.
- [15] SHI X, ZHENG R, LIN Z, et al. An exponentially convergent distributed algorithm for resource allocation problem. *Asian Journal of Control*, 2021, 23(2): 1072 - 1082.
- [16] CHEN G, LI Z. A fixed-time convergent algorithm for distributed convex optimization in multi-agent systems. *Automatica*, 2018, 95: 539-543.
- [17] LIN W T, WANG Y W, LI C, et al. Predefined-time optimization for distributed resource allocation. *Journal of Franklin Institute*, 2020, 357(16): 11323 - 11348.
- [18] LIN W T, WANG Y W, LI C, et al. Distributed resource allocation via accelerated saddle point dynamics. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, 8(9): 1588 - 1599.
- [19] DENG Z, WANG L. Distributed event-triggered algorithm for optimal resource allocation of second-order multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 2020, 14(14): 1937 - 1946.
- [20] DENG Z. Distributed algorithm design for resource allocation problems of high-order multiagent systems. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8(1): 177 - 186.
- [21] LI S, NIAN X, DENG X. Distributed optimization of general linear multi-agent systems with external disturbance. *Journal of Franklin Institute*, 2021, 358(11): 5951 - 5970.
- [22] LI S, NIAN X, DENG X, et al. Distributed resource allocation of second-order nonlinear multiagent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(11): 5330 - 5342.
- [23] YI P, HONG Y, LIU F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems. *Automatica*, 2016, 74: 259 - 269.
- [24] DENG Z, LIANG S, HONG Y. Distributed continuous-time algorithms for resource allocation problems over weight-balanced digraphs. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(11): 3116 - 3125.
- [25] LI R. Distributed algorithm design for optimal resource allocation problems via incremental passivity theory. *Systems & Control Letters*, 2020, DOI: 10.1016/j.sysconle.2020.104650.
- [26] DENG Z. Distributed algorithm design for resource allocation problems of second-order multiagent systems over weighted-balanced digraphs. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(6): 3512 - 3521.
- [27] ZENG X, YI P, HONG Y. Distributed algorithm for robust resource allocation with polyhedral uncertain allocation parameters. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2018, 31(1): 103 - 109.
- [28] LI K, LIU Q, YANG S, et al. Cooperative optimization of dual multiagent system for optimal resource allocation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(11): 4676 - 4687.
- [29] DENG Z, NIAN X, HU C. Distributed algorithm design for nonsmooth resource allocation problems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(7): 3208 - 3217.
- [30] LIANG S, ZENG X, CHEN G, et al. Distributed sub-optimal resource allocation via a projected form of singular perturbation. *Automatica*, 2020, DOI:10.1016/j.automatica.2020.109180.
- [31] ZHU Y, REN W, YU W, et al. Distributed resource allocation over directed graphs via continuous-time algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(2): 1097 - 1106.
- [32] ZHU Y, WEN G, YU W, et al. Nonsmooth resource allocation of multi-agent systems with disturbances: A proximal approach. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8(3): 1454 - 1464.
- [33] CHEN G, LI Z. Distributed optimal resource allocation over strongly connected digraphs: A surplus-based approach. *Automatica*, 2021, DOI: 10.1016/j.automatica.2020.109459.
- [34] ZHU Y, WEN G, YU W, et al. Continuous-time distributed proximal gradient algorithms for nonsmooth resource allocation over general digraphs. *IEEE Transactions on Networks Science and Engineering*, 2021, 8(2): 1733 - 1744.
- [35] CHEN G, YANG Q, SONG Y, et al. A distributed continuous-time algorithm for nonsmooth constrained optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(11): 4914 - 4921.
- [36] BAI L, YE M, SUN C, et al. Distributed economic dispatch control via saddle point dynamics and consensus algorithms. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 27(2): 898 - 905.
- [37] LI D, LI N, LEWIS F. Projection-free distributed optimization with nonconvex local objective functions and resource allocation constraint. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8(1): 413 - 422.
- [38] SHI Xiasheng, YANG Tao, LIN Zhiyun, et al. Distributed resource allocation algorithm for second-order multi-agent systems in continuous-time. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(8): 2050 - 2060. (时侠圣, 杨涛, 林志贇, 等. 基于连续时间的二阶多智能体分布式资源分配算法. *自动化学报*, 2021, 47(8): 2050 - 2060.)
- [39] CHERUKURI A, CORTES J. Initialization-free distributed coordination for economic dispatch under varying loads and generator commitment. *Automatica*, 2016, 74: 183 - 193.
- [40] WANG D, WANG Z, WEN C, et al. Second-order continuous-time algorithm for optimal resource allocation in power systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(2): 626 - 637.
- [41] CHEN G, GUO Z. Initialization-free distributed fixed-time convergent algorithms for optimal resource allocation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(2): 845 - 854.
- [42] GUO Z, CHEN G. Predefined-time distributed optimal allocation of resources: A time-base generator scheme. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 52(1): 438 - 447.
- [43] LI C, YU X, HUANG T. Distributed optimal consensus over resource allocation network and its application to dynamical economic dispatch. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(6): 2407 - 2418.
- [44] ZHOU H, ZENG X, HONG Y. Adaptive exact penalty design for constrained distributed optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4661 - 4667.
- [45] LIAN M, GUO Z, WANG X, et al. Adaptive exact penalty design for optimal resource allocation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3105385.
- [46] SHI X, ZHENG R, LIN Z, et al. Distributed optimization for economic power dispatch with event-triggered communication. *Asian Journal of Control*, 2020, 22(6): 2412 - 2421.
- [47] YANG T, LU J, WU J, et al. A distributed algorithm for economic dispatch over time-varying directed networks with delays. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(6): 5095 - 5106.

#### 作者简介:

**时侠圣** 讲师, 硕士生导师, 博士, 目前研究方向为多智能体分布式优化、固定时间收敛等, E-mail: shixiasheng@cumt.edu.cn;

**徐磊** 博士生, 目前研究方向为多智能体控制、优化及应用, E-mail: 2010345@stu.neu.edu.cn;

**杨涛** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为信息物理系统、复杂工业过程的分布式优化, Email: yangtao@mail.neu.edu.cn