

基于多个自主水下航行器的分布式协同流场估计

何 翌¹, 郑荣濠^{1,2†}, 张森林^{1,2}, 刘妹琴^{1,2,3}

(1. 浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027; 2. 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027;

3. 西安交通大学 人工智能与机器人研究所, 陕西 西安 710049)

摘要: 本文考虑利用多个自主式水下航行器(AUV)实现流场估计, 提出了一种基于树型网络的分布式方法来估计水下流场. 在本文中, 借助绝对运动积分误差和相对运动积分误差, 流场估计问题被描述为求解一个以未知流场为变元的非线性方程组. 继而本文在多AUV系统内建立一个低通讯成本的树型网络, 并在该网络上运行一种分布式算法以求解与流场估计相关的非线性方程组. 在该算法中, 每个AUV将当前的流场估计值连续地投影到自身拥有的约束方程的解集中, 并通过扩散和池化两个步骤在树型网络间传递流场估计值. 本文证明了上述算法的收敛性, 并通过仿真实验验证了所述分布式协同流场估计方法的有效性.

关键词: 流场估计; 树型结构; 自主式水下航行器; 分布式算法; 非线性Kaczmarz

引用格式: 何翌, 郑荣濠, 张森林, 等. 基于多个自主水下航行器的分布式协同流场估计. 控制理论与应用, 2022, 39(11): 2036 – 2045

DOI: 10.7641/CTA.2022.11071

Distributed cooperative flow field estimation using multiple AUVs

HE Yi¹, ZHENG Rong-hao^{1,2†}, ZHANG Sen-lin^{1,2}, LIU Mei-qin^{1,2,3}

(1. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;

2. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;

3. Institute of Artificial Intelligence and Robotics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

Abstract: This paper considers the use of multiple autonomous underwater vehicles (AUVs) to estimate the flow field, and proposes a distributed method based on a tree-structure network to estimate the underwater flow field. In this paper, the flow field estimation problem is described as solving a nonlinear equation system with the unknown flow field as argument using absolute motion-integration error and relative motion-integration error. Then this paper establishes a tree-structure network with low communication cost in the multi-AUV system to run a distributed algorithm to solve the nonlinear equation system related to the flow field estimation. In this algorithm, each AUV continuously projects current flow field estimation value to the solution set of its own constraint equations. And through the two steps of dispersion and pooling, the flow field estimation value is transferred within the tree-structure network. This paper proves the convergence of the proposed algorithm, and the effectiveness of the distributed cooperative flow field estimation method is verified through simulation experiments.

Key words: flow field estimation; tree structure; autonomous underwater vehicle; distributed algorithm; nonlinear Kaczmarz

Citation: HE Yi, ZHENG Ronghao, ZHANG Senlin, et al. Distributed cooperative flow field estimation using multiple AUVs. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(11): 2036 – 2045

1 引言

近年来, 自主式水下航行器(autonomous underwater vehicle, AUV)由于其可靠性高、成本低、灵活性强等特点, 被广泛应用于各种海洋场景任务, 包括环

境监控与探测、海洋搜寻与营救、监管与安全等短期或长期任务^[1]. 在这些任务中, 如何使AUV在陌生的水下环境中仍沿着预定轨迹行驶是一个至关重要的问题^[2]. 然而AUV在水中的位置不可避免地受到水下

收稿日期: 2021-11-05; 录用日期: 2022-03-01.

†通信作者. E-mail: rzheng@zju.edu.cn; Tel.: +86 571-87952707.

本文责任编辑: 闫敬.

国家自然科学基金委员会-浙江两化融合联合基金(U1709203, U1909206, U1809212), 浙江省自然科学基金(LZ19F030002), 国家自然科学基金项目(61873235), 浙江省重点研发计划项目(2019C03109)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China-Zhejiang Joint Fund for the Integration of Industrialization and Informatization under Grant (U1709203, U1909206, U1809212), the National Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LZ19F030002), the National Natural Science Foundation of China (61873235), and the Key Research and Development Program of Zhejiang Province (2019C03109).

流场的影响, 而且由于GPS定位信号无法到达水下, 通常AUV要根据所在水域的先验流场信息来估计自身位置并进行水下导航^[3].

为获得水下流场信息, 单AUV流场估计主要借助于解析流模型(flow-based model, AFM)^[4-5]和计算流体动力学(computational fluid dynamics, CFD)^[6-7]. 解析流模型易于实现且成本较低, 但只适用于特定形状的AUV. 如DeVries等^[4]利用势流理论对机翼型AUV周围的流场进行建模, 使用一种递归贝叶斯滤波算法来融合AUV体表传感器阵列采集到的流速信息, 以此估计出周围流场. 但文献[4]中的结论不能泛化到其他形状的AUV. 相对地, 计算流体动力学适用于任意形状的AUV的流场建模, 但往往面临过高的计算量. 此外, 单AUV流场估计通常需要在AUV体表安装传感器阵列来测量局部流速和压强, 硬件成本较高. 并且, 单AUV难以胜任大范围的流场估计任务.

随着多水下机器人协同控制技术研究的发展^[8], 已有研究人员将多AUV系统应用于大范围的海洋流场估计任务. 其中, 受到计算机层析成像(computerized tomography, CT)^[9]方法的启发, Chang等^[10]提出了运动层析成像(motion tomography, MT)方法, 利用多AUV来测量目标海域的某一深度的平均流场. MT方法考虑水下流场对AUV轨迹的影响, 将AUV真实出水位置与预测出水位置之间的误差定义为运动积分误差(motion-integration error). 运动积分误差的存在是由于真实流场与预测流场不一致, 其值可表示为以流场为变元的积分. 基于此, MT方法将流场估计问题描述为一个欠定非线性估计问题. 为了进一步提升MT方法估计流场的准确度, Shi等^[11]考虑AUVs在水下航行过程中可以测得与其相邻AUV之间的相对位置, 并定义了相对运动积分误差(relative motion-integration error), 给原欠定非线性问题^[10]以更多的约束, 从而提升了流场估计的准确度.

文献[10-11]分别提出一种迭代算法来求解与MT相关的非线性方程组. 但这些算法是在集中式框架中开发的, 需要将所有数据汇总到一台中央计算机进行统一计算. 当多AUV系统遇到应用规模较大、通信能力有限或是涉及数据隐私的情况, 集中式计算将不能满足任务要求. 因此本文考虑分布式流场估计.

本文基于Shi等^[11]的研究成果, 仍然将流场估计问题描述为求解与绝对运动积分误差和相对运动积分误差相关的非线性方程组. 受启发于文献[12-13]所提出的一种用于求解线性方程组 $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 的基于树型网络的分布式Kaczmarz算法, 本文将每个AUV视为网络中的一个节点, 并根据AUV间的相对位置测量关系和通信成本, 确定这些节点间的连接方式, 最终形成一个树型网络. 进一步地, 本文将文献[14-15]所讨论的一种非线性Kaczmarz迭代法推广到上述树型

网络中, 在分布式框架下求解与流场估计相关的非线性方程组. 在所提出的算法中, 每个AUV利用自身拥有的约束方程来更新流场估计值, 然后通过扩散与池化步骤在树型网络间传递流场估计值, 最终成功估计出真实流场.

事实上, 首个分布式MT流场估计方法由Chang等^[16]提出, 其基于一致性原理将文献[10]中的集中式MT方法迁移到分布式框架中. 但该方法要求AUV网络对应的加权增广邻接矩阵为双随机矩阵, 这导致网络的扩展性、灵活性较差. 而本文采用基于树型网络的分布式结构, 可以方便地在网络中加入新分支或新节点, 因而允许根据实际需求(例如希望整个网络的通信成本最低)调整树型网络的具体拓扑结构来运行分布式流场估计算法.

本文的主要贡献如下: 第一, 本文考虑了相对位置测量, 相比于已有的分布式MT流场估计方法^[16], 可以获得更高的流场估计精度; 第二, 本文提出一种基于树型网络的分布式算法求解与流场估计相关的非线性方程组, 避免了集中式计算的缺点. 并且算法只要求分布式网络具有树型拓扑结构, 而对树型网络的具体形状无任何要求, 可以灵活适应各种工程需求; 第三, 本文证明了在容易满足的假设条件下, 所提出的分布式协同流场估计算法得到的流场估计值会收敛至真实流场值. 相对地, 文献[10-11]的收敛性证明都基于一个强假设, 实际应用时难以保证该强假设的成立. 而文献[16]只分析了分布式算法在线性情况下的收敛性, 对于非线性情况并没有给出严格的收敛性证明.

后文的主要内容总结如下: 第2节讨论了与MT流场估计问题相关的背景与预备知识, 并总结出与协同流场估计相关的非线性方程组; 第3节首先介绍所述树型网络的生成方法及其特征, 接着给出基于树型网络的分布式协同流场估计算法的详细流程; 第4节证明了所提出算法的收敛性; 第5节通过仿真实验进一步验证算法的有效性; 最后第6节对全文进行总结, 并给出未来工作的方向.

2 背景与问题描述

2.1 航行器在流场中的水平运动

本文考虑 N 个航行器 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ 在某一深度的水下区域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ 中航行. 航行器在水下航行过程中能够通过超短基线(ultra-short baseline, USBL)定位系统或其他声学定位系统测得与其相邻航行器之间的相对位置. 令 $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}^i$ 表示航行器 v_i 的测量邻居集合. 若 $v_j \in \mathcal{N}_{\mathcal{M}}^i$, 则 v_i 会在水下航行过程中测量与 v_j 的相对位置. 值得注意的是, $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}^i$ 可以为空集.

为了分析流场区域 \mathcal{D} 中的流场对航行器运动轨迹的影响, 使用具有恒定对水速度 v_i^c 的一阶粒子模型对

航行器的运动进行建模. 令 $t \in [0, \infty)$ 表示时间, 并定义 $\mathcal{T} := [t^0, t^f]$ 为观察间隔. 令 $\mathbf{r}_i(t) \in \mathcal{D}$ 表示航行器 v_i 的真实位置, $\mathbf{r}_{ij}(t) := \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)$ 表示航行器 v_i 和 v_j 之间的相对位置. 本文假设航行器 v_i 的真实位置 $\mathbf{r}_i(t)$ 仅在 $t = t^0$ 和 $t = t^f$ 时刻可测, 此时航行器位于水面, 可以接收到GPS信号. 为简约起见, 在不引起歧义的情况下, (t) 在叙述中略去.

注1 为了讨论方便, 假设航行器 v_i 的对水速度 ν_i^c 不随时间变化, 同时假设所有航行器的入水和出水时间相同. 但后文的讨论仍然适用于 $\nu_i^c(t)$ 随时间变化, 以及各航行器的入水和出水时间不相同的情况.

本文考虑流场 \mathbf{f} 在观察间隔 \mathcal{T} 内是时不变的, 可将其表示为以 \mathbf{r} 为变元的函数, 即 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$. 若已知真实流场 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, 则在 \mathcal{T} 内航行器 v_i 的真实位置 \mathbf{r}_i 和真实相对位置 \mathbf{r}_{ij} 可按下式计算:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \nu_i^c \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_i), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{ij} = \nu_j^c \begin{bmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{bmatrix} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_j) - \nu_i^c \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} - \mathbf{f}(\mathbf{r}_i). \quad (2)$$

上式中 θ_i 为航行器 v_i 的航向角度. 本文假设 θ_i 可以通过罗盘准确测得. 由于真实流场 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ 是未知的, 因而无法计算出航行器的真实轨迹. 但在流场估计任务开始前, 航行器可以根据预测流场 $\tilde{\mathbf{f}}$ 计算出各自的预测轨迹. 预测位置 $\tilde{\mathbf{r}}_i$ 和预测相对位置 $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$ 按下式计算:

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = \nu_i^c \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{r}}_i), \quad (3)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{ij} = \nu_j^c \begin{bmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{r}}_j) - \nu_i^c \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{r}}_i). \quad (4)$$

为方便讨论, 本文中令 $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{0}$. 但后文的所有讨论仍然适用于式(3)–(4)中预测流场 $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{r}}_i) \neq \mathbf{0}$ 的情况.

定义观察间隔 \mathcal{T} 内的绝对运动积分误差 \mathbf{d}_i 为

$$\mathbf{d}_i := \int_{t^0}^{t^f} (\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i(t)) dt = \mathbf{r}_i(t^f) - \tilde{\mathbf{r}}_i(t^f) = \int_{t^0}^{t^f} \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) dt. \quad (5)$$

由于 $t = t^f$ 时刻的真实出水位置 $\mathbf{r}_i(t^f)$ 可以通过GPS获得, 而预测出水位置 $\tilde{\mathbf{r}}_i(t^f)$ 可以通过计算得到, 所以 \mathbf{d}_i 是可知的.

再定义 $\mathcal{T}^h := [t^0, t^h] \in \mathcal{T}$ 期间内航行器 v_i 和 v_j 的相对运动积分误差 $\boldsymbol{\mu}_{ij}^h$ 为

$$\boldsymbol{\mu}_{ij}^h := \int_{t^0}^{t^h} (\dot{\mathbf{r}}_{ij}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{ij}(t)) dt = \mathbf{r}_{ij}(t^h) - \tilde{\mathbf{r}}_{ij}(t^h) =$$

$$\int_{t^0}^{t^h} (\mathbf{f}(\mathbf{r}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_i)) dt. \quad (6)$$

由于 $\mathbf{r}_{ij}(t^h)$ 可以通过实际测量获得, 而 $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}(t^h)$ 可以通过计算得到, 所以 $\boldsymbol{\mu}_{ij}^h$ 也是可知的.

2.2 协同流场估计问题的描述

2.2.1 区域网格化

理论上, 无法获得连续流场在所有位置 \mathbf{r} 上的估计值. 在下面的讨论中, 用一离散化网格流场近似连续流场, 通过减小网格的大小, 可以更逼近连续流场. 将水平区域 \mathcal{D} 分割成 $P = A \times B$ 个单元格(图1), 令 $D^{(a,b)}$ 表示第 (a, b) 个单元格, 其中 $a \in \{1, 2, \dots, A\}$, $b \in \{1, 2, \dots, B\}$. 定义索引值 $\iota := (a-1)B + b$, 则 $D^\iota \equiv D^{(a,b)}$, $\iota \in \{1, 2, \dots, P\}$. 考虑单元格 D^ι 内的流速是恒定的, 记为 $\mathbf{f}^\iota := [f_x^\iota \ f_y^\iota]^\top$, 其中 f_x^ι, f_y^ι 分别代表 \mathbf{f}^ι 的 x 和 y 分量. 将所有单元格的流速值堆叠起来得到 $\bar{\mathbf{f}} := [\bar{\mathbf{f}}_x \ \bar{\mathbf{f}}_y]$, 其中 $\bar{\mathbf{f}}_x := [f_x^1 \ f_x^2 \ \dots \ f_x^P]^\top$, $\bar{\mathbf{f}}_y := [f_y^1 \ f_y^2 \ \dots \ f_y^P]^\top$. 此外, 本文假设航行器 v_i 在 D^ι 内的航向角是恒定的, 记为 θ_i^ι . 因此航行器在 D^ι 内的轨迹可被近似为直线段, 在整个区域 \mathcal{D} 上的轨迹被近似为折线段.

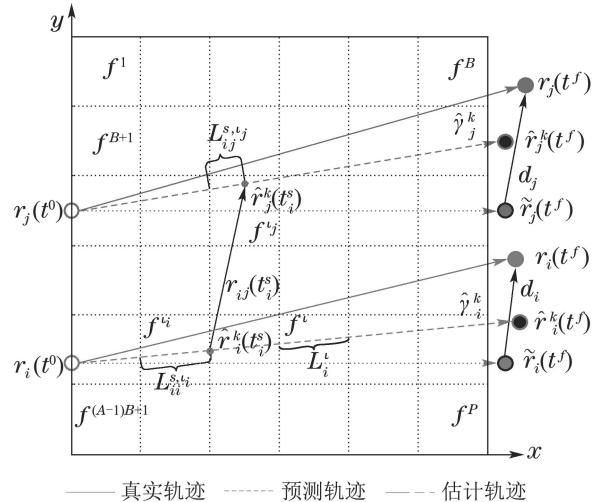


图1 协同流场估计示意图

Fig. 1 Illustration of the cooperative flow field estimation

令 $\gamma_i := \{\mathbf{r}_i(t)\}_{t \in \mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ 表示航行器 v_i 在观察间隔 \mathcal{T} 内的运动轨迹, 定义其弧长参数为 l_i , 则

$$dl_i = \nu_i(\mathbf{f}(\mathbf{r}_i)) dt, \quad t \in [t^0, t^f], \quad (7)$$

其中 $\nu_i(\mathbf{f}(\mathbf{r}_i))$ 表示航行器 v_i 沿着轨迹 γ_i 在 \mathbf{r}_i 处的对地速度

$$\nu_i(\mathbf{f}(\mathbf{r}_i)) = \|\dot{\mathbf{r}}_i\| = \|\nu_i^c \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_i)\|. \quad (8)$$

将式(7)代入式(5), 得

$$\mathbf{d}_i(\gamma_i, \mathcal{T}) = \int_{\gamma_i} \frac{1}{\nu_i(\mathbf{f}(\mathbf{r}_i))} \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) dl_i. \quad (9)$$

考虑流场对航行器轨迹的累积影响, 定义航行器 v_i 在 D^l 内的轨迹 γ_i^l 的长度为 $L_i^l = L_i^l(\bar{\mathbf{f}})$

$$L_i^l(\bar{\mathbf{f}}) = \int_{\gamma_i^l} d\ell_i. \quad (10)$$

若航行器 v_i 的轨迹不经过 D^l , 则 $L_i^l(\bar{\mathbf{f}}) = 0$. 将上式代入式(9)并按 x 和 y 分量展开, 得到绝对运动积分误差的离散表达式

$$d_{i,x} = \sum_{l=1}^P \frac{L_i^l(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^l(\mathbf{f}^l)} f_x^l, \quad d_{i,y} = \sum_{l=1}^P \frac{L_i^l(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^l(\mathbf{f}^l)} f_y^l, \quad (11)$$

其中 $\nu_i^l(\mathbf{f}^l)$ 为航行器 v_i 在 D^l 内的对地速度. 由前文分析可知, $\nu_i^l(\mathbf{f}^l)$ 是个定值. 构造矢量

$$\mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}}) = \begin{bmatrix} \frac{L_i^1(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^1(\mathbf{f}^1)} & \frac{L_i^2(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^2(\mathbf{f}^2)} & \cdots & \frac{L_i^P(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^P(\mathbf{f}^P)} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

则式(11)可以重新写成

$$\mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}}) \bar{\mathbf{f}}_x - d_{i,x} = 0, \quad \mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}}) \bar{\mathbf{f}}_y - d_{i,y} = 0. \quad (13)$$

注意到矢量 $\mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}})$ 的第 l 个元素的分子 $L_i^l(\bar{\mathbf{f}})$ 表示航行器 v_i 在网格 D^l 内的轨迹长度, 分母 $\nu_i^l(\mathbf{f}^l)$ 表示 v_i 在网格 D^l 内的速度, 因而 $\mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}})$ 的第 l 个元素表示航行器 v_i 在 D^l 内的航行时间.

至此, 式(13)建立了与绝对运动积分误差 \mathbf{d}_i 相关的非线性方程组.

2.2.2 相对运动积分误差的离散化

假设航行器 v_i 的轨迹先后经过 $S_i + 1$ 个单元格, 记为 $\{D_i^1, D_i^2, \dots, D_i^{S_i+1}\}$. 令 $t_i^s \in \{t_i^1, t_i^2, \dots, t_i^{S_i}\}$ 表示航行器 v_i 离开 D_i^s 的时刻. 因为 t_i^s 受整个流场的累积影响, 所以 t_i^s 是流场 $\bar{\mathbf{f}}$ 的函数, 即 $t_i^s = t_i^s(\bar{\mathbf{f}})$. 航行器 v_i 和 $v_j \in \mathcal{N}_{\mathcal{M}}^i$ 在 $\mathcal{T}_i^s := [t^0, t_i^s]$ 期间的相对运动积分误差也可以显式表示为 $\bar{\mathbf{f}}$ 的函数, 即 $\boldsymbol{\mu}_{ij}^s = \boldsymbol{\mu}_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}})$. 根据式(6), 有

$$\boldsymbol{\mu}_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}) = \int_{t^0}^{t_i^s} (\mathbf{f}(\mathbf{r}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_i)) dt. \quad (14)$$

令 $\gamma_{ii}^s := \{\mathbf{r}_i(t)\}_{t \in \mathcal{T}_i^s}$, $\gamma_{ij}^s := \{\mathbf{r}_j(t)\}_{t \in \mathcal{T}_i^s}$ 分别表示航行器 v_i 和 v_j 在 \mathcal{T}_i^s 期间的运动轨迹, 并定义其弧长参数 ℓ_{ii}^s, ℓ_{ij}^s 为

$$d\ell_{ii}^s := \nu_i(\mathbf{f}(\mathbf{r}_i)) dt, \quad t \in [t^0, t_i^s],$$

$$d\ell_{ij}^s := \nu_j(\mathbf{f}(\mathbf{r}_j)) dt, \quad t \in [t^0, t_i^s].$$

将上式代入式(14)得

$$\boldsymbol{\mu}_{ij}^s = \int_{\gamma_{ij}^s} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}_j)}{\nu_j(\mathbf{f}(\mathbf{r}_j))} d\ell_{ij}^s - \int_{\gamma_{ii}^s} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}_i)}{\nu_i(\mathbf{f}(\mathbf{r}_i))} d\ell_{ii}^s. \quad (15)$$

模仿式(10), \mathcal{T}_i^s 期间内航行器 v_i 在 D^{l_i} 内的轨迹 γ_{ii}^{s,l_i} 和航行器 v_j 在 D^{l_j} 内的轨迹 γ_{ij}^{s,l_j} 的长度(图1)分别为

$$L_{ii}^{s,l_i}(\bar{\mathbf{f}}) = \int_{\gamma_{ii}^{s,l_i}} d\ell_{ii}^s, \quad L_{ij}^{s,l_j}(\bar{\mathbf{f}}) = \int_{\gamma_{ij}^{s,l_j}} d\ell_{ij}^s.$$

将上式代入式(15), 得

$$\boldsymbol{\mu}_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}) = \sum_{l=1}^P \left(\frac{L_{ij}^{s,l}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_j^l(\mathbf{f}^l)} - \frac{L_{ii}^{s,l}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^l(\mathbf{f}^l)} \right) \mathbf{f}^l. \quad (16)$$

根据式(6)(14), $\boldsymbol{\mu}_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}})$ 也可以写成

$$\boldsymbol{\mu}_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}) = \mathbf{r}_{ij}(t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) - \tilde{\mathbf{r}}_j(t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) + \tilde{\mathbf{r}}_i(t_i^s(\bar{\mathbf{f}})). \quad (17)$$

对每个航行器 v_i 和它的相邻航行器 $v_j \in \mathcal{N}_{\mathcal{M}}^i$, 定义

$$\mathbf{T}_{ii}^s(\bar{\mathbf{f}}) = \begin{bmatrix} \frac{L_{ii}^{s,1}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^1(\mathbf{f}^1)} & \frac{L_{ii}^{s,2}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^2(\mathbf{f}^2)} & \cdots & \frac{L_{ii}^{s,P}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_i^P(\mathbf{f}^P)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}) = \begin{bmatrix} \frac{L_{ij}^{s,1}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_j^1(\mathbf{f}^1)} & \frac{L_{ij}^{s,2}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_j^2(\mathbf{f}^2)} & \cdots & \frac{L_{ij}^{s,P}(\bar{\mathbf{f}})}{\nu_j^P(\mathbf{f}^P)} \end{bmatrix}.$$

将上式代入式(16)后联立式(17), 并按 x 和 y 分量展开, 可得与相对运动积分误差相关的方程

$$\begin{cases} R_{ix}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) - Q_{jx}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) = 0, \\ R_{iy}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) - Q_{jy}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

其中:

$$Q_{jx}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) = \mathbf{T}_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}) \bar{\mathbf{f}}_x + \tilde{r}_{j,x}(t_i^s(\bar{\mathbf{f}})), \quad (19)$$

$$R_{ix}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) = \mathbf{T}_{ii}^s(\bar{\mathbf{f}}) \bar{\mathbf{f}}_x + \tilde{r}_{i,x}(t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) + r_{ij,x}(t_i^s(\bar{\mathbf{f}})). \quad (20)$$

将上式中下标 x 替换成 y 即可得到 $Q_{jy}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$, $R_{iy}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$. 注意到在分布式框架中, 航行器 v_i 不拥有 v_j 的朝向角、对水速度等信息, 因而 v_i 无法在本地计算出 $Q_{jx}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$. 但是给定 $\bar{\mathbf{f}}$ 和 $t_i^s(\bar{\mathbf{f}})$ 后, 航行器 v_i 和 v_j 可以分别在本地计算出 $R_{ix}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 和 $Q_{jx}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$. 对于 $R_{iy}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$, $Q_{jy}^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 同理.

至此, 式(13)(18)借助 $\mathbf{d}_i, \boldsymbol{\mu}_{ij}^s$ 建立了以 $\bar{\mathbf{f}}$ 为变元的非线性方程组. 下一节将设计一种基于树型网络的分布式算法来求解该非线性方程组, 并得到待求流场 $\bar{\mathbf{f}}$.

3 基于树型网络的分布式流场估计

3.1 最小生成树的生成方式

在所有航行器浮出水面后, 每个航行器都执行如下步骤:

- 1) 搜索通信范围内的航行器, 并建立通信连接.
- 2) 通过GPS获得自身与通信邻居之间的距离, 并将该距离作为相应通信连接的权值.
- 3) 如果自身测量了与通信邻居的相对位置, 则将对通信连接的权值置为一个极小值(例如将权值除以一个数).
- 4) 运行文献[17]中的分布式最小生成树生成算法.

下面对上述过程进行详细解释. 令有向图 $\mathcal{G}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{M}})$ 表示航行器间的相对位置测量关系. 其中: \mathcal{V} 表示 N 个航行器(节点), 有向边 $\langle i, j \rangle \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ 表示航行

器 v_i 测量了与 v_j 的相对位置. 值得注意的是, \mathcal{G}_M 甚至可以不满足弱连通性. 再令无向图 $\mathcal{G}_C(\mathcal{V}, \mathcal{E}_C)$ 表示飞行器间的通信网络. 其中: 无向边 $(i, j) \in \mathcal{E}_C$ 表示飞行器 v_i 和 v_j 可以双向通信. 所述通信网络是通过合并所有飞行器的通信连接而建立起来的, 但是每个飞行器都只知道自己的通信邻居. 本文假设静态通信网络 \mathcal{G}_C 是连通的, 这是对任意分布式系统的基本要求. \mathcal{E}_C 中边的权值通过上述4个步骤确定. 最终, 通过运行文献[17]的分布式算法获得 \mathcal{G}_C 的最小生成树 $\mathcal{G}_U(\mathcal{V}, \mathcal{E}_U)$. 令 $\mathcal{N}_U^i = \{v_j \in \mathcal{V} | (i, j) \in \mathcal{E}_U\}$ 表示 v_i 在 \mathcal{G}_U 中的邻居集合. 下文提出的分布式流场估计算法, 正是运行在最小生成树 \mathcal{G}_U 上. 图2为生成最小生成树的一个示例.

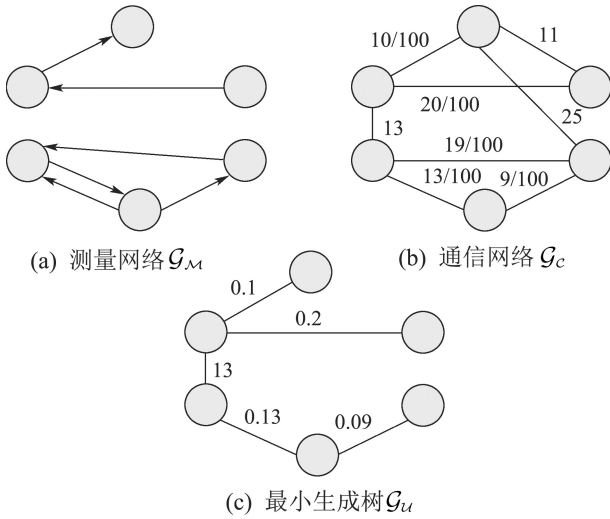


图2 最小生成树示意图

Fig. 2 Illustration of the generation of the minimum weight spanning tree

下面说明 $\mathcal{G}_U(\mathcal{V}, \mathcal{E}_U)$ 作为树型网络的特点与性质. 用 v_i 和 v_j 表示树中的任意节点, v_r 表示树的唯一根节点. 若 v_i 处在 v_r 到 v_j 的通道上, 则称 v_i 为 v_j 的上级节点, 记作 $v_i \prec v_j$. 相应地, v_j 称为 v_i 的下级节点, 记作 $v_j \succ v_i$. 若 $v_j \succ v_i$ 且 $(j, i) \in \mathcal{E}_U$, 那么称 v_j 为 v_i 的直接下级节点. 节点 v_i 的直接下级节点集合记为 $\mathcal{C}(v_i)$. 没有下级节点的节点称为叶节点 v_l , 并定义 \mathcal{G}_U 的叶节点集合为 $\mathcal{L} = \{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_\zeta}\}$, 其中 ζ 为树网络 \mathcal{G}_U 中叶节点的个数.

对于 $\forall v_j \in \mathcal{C}(v_i)$, 定义边 (j, i) 的非负权重为

$$\omega(j, i) = |\mathcal{C}(v_i)|^{-1}. \quad (21)$$

则对任意 $v_i \notin \mathcal{L}$, 有 $\sum_{v_j \in \mathcal{C}(v_i)} \omega(j, i) = 1$. 若 $v_j \succ v_i$ 但 $v_j \notin \mathcal{C}(v_i)$, 则定义

$$\omega(j, i) := \prod_{m=1}^{M-1} \omega(j_m, j_{m+1}), \quad (22)$$

其中: $v_j = v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_M} = v_i$ 是 v_j 到 v_i 的唯一通路. 结合式(21)(22), 通过归纳法易得

$$\sum_{v_l \in \mathcal{L}} \omega(l, r) = 1. \quad (23)$$

3.2 基于树型网络的分布式协同流场估计算法

为方便讨论, 暂时省略方程(13)(18)的下标 x 和 y . 则飞行器 v_i 拥有的与未知流场 $\bar{\mathbf{f}}$ 相关的非线性方程组表示为

$$\mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}})\bar{\mathbf{f}} - d_i = 0, \quad (24)$$

$$R_i^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) - Q_j^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) = 0, \quad (25)$$

其中: $v_i \in \mathcal{V}$, $v_j \in \mathcal{N}_i$, $s \in \{1, 2, \dots, S_i\}$, $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_M^i \cap \mathcal{N}_U^i$. 注意, \mathcal{N}_i 可能为空. 将所有飞行器拥有的方程组堆叠起来, 就得到与未知流场 $\bar{\mathbf{f}}$ 相关的总非线性方程组. 后文将证明, 只要所得到的总非线性方程组中线性无关的方程个数等于待求流场 $\bar{\mathbf{f}}$ 的维度 P , 则通过所提出的分布式算法可以求解出真实流场 $\bar{\mathbf{f}}^*$.

为描述方便, 先作如下定义:

$$h_i(\bar{\mathbf{f}}) := \mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}})\bar{\mathbf{f}} - d_i,$$

$$h_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}) := R_i^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})) - Q_j^s(\bar{\mathbf{f}}, t_i^s(\bar{\mathbf{f}})). \quad (26)$$

算法的每一轮迭代都包含扩散阶段(dispersion stage)与池化阶段(pooling stage)(图3). 其中第 k 轮迭代从估计值 $\bar{\mathbf{f}}^k$ 开始并在树网络的根节点令 $\bar{\mathbf{f}}_r^k = \bar{\mathbf{f}}^k$. 每个节点 v_i 从它的直接上级节点接收最新的流场估计值作为输入, 然后将其顺序投影到自身拥有的约束方程(24)–(25)的解集中, 即

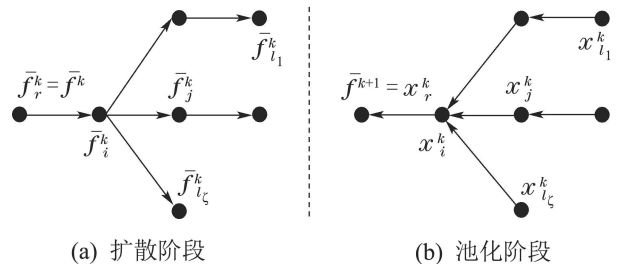
$$\bar{\mathbf{f}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_i^n - \lambda_i^n \frac{h_i(\bar{\mathbf{f}}_i^n)}{\|\nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_i(\bar{\mathbf{f}}_i^n)\|^2} \nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_i(\bar{\mathbf{f}}_i^n), \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_i^n - \lambda_i^n \frac{h_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n)}{\|\nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n)\|^2} \nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n), \quad (28)$$

最终迭代得到 $\bar{\mathbf{f}}_i^k$. 接着, 节点 v_i 将 $\bar{\mathbf{f}}_i^k$ 传递给 $\mathcal{C}(v_i)$. 该步骤持续进行直到每个叶节点 v_l 都计算出最新的流场估计值 $\bar{\mathbf{f}}_l^k$. 上述过程称为扩散阶段. 下一阶段为池化阶段. 对于每个叶节点 $v_l \in \mathcal{L}$, 令 $\mathbf{x}_l^k = \bar{\mathbf{f}}_l^k$. 对所有 $v_i \notin \mathcal{L}$, 按下式更新估计值:

$$\mathbf{x}_i^k = \sum_{v_j \in \mathcal{C}(v_i)} \omega(j, i) \mathbf{x}_j^k. \quad (29)$$

该过程持续进行到根节点并得到 \mathbf{x}_r^k . 令 $\bar{\mathbf{f}}^{k+1} = \mathbf{x}_r^k$, 至此一轮完整的迭代结束.



(a) 扩散阶段

(b) 池化阶段

图3 基于树型网络的分布式流场估计算法示意图

Fig. 3 Illustration of the distributed flow field estimation algorithm based on the tree-structure network

式(27)–(28)中的松弛参数 $\lambda_i^n \in (0, 2)$, 并且梯度

向量 $\nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_i(\bar{\mathbf{f}})$ 按下式计算:

$$\nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_i(\bar{\mathbf{f}}) = \left[\frac{\partial h_i(\bar{\mathbf{f}})}{\partial f^1} \quad \frac{\partial h_i(\bar{\mathbf{f}})}{\partial f^2} \quad \cdots \quad \frac{\partial h_i(\bar{\mathbf{f}})}{\partial f^P} \right]^T, \quad (30)$$

$$\frac{\partial h_i(\bar{\mathbf{f}})}{\partial f^\ell} = \lim_{\Delta f^\ell \rightarrow 0} \frac{h_i(\bar{\mathbf{f}} + \Delta \bar{\mathbf{f}}^\ell) - h_i(\bar{\mathbf{f}} - \Delta \bar{\mathbf{f}}^\ell)}{2\Delta f^\ell}, \quad (31)$$

其中: $\Delta \bar{\mathbf{f}}^\ell = [0 \ \cdots \ \Delta f^\ell \ \cdots \ 0]^T, \ell \in \{1, \dots, P\}$.

对于梯度向量 $\nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}})$, 有

$$\nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_{ij}^s(\bar{\mathbf{f}}) = \nabla R_i^s(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}})) - \nabla Q_j^s(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_j^s(\bar{\mathbf{f}})), \quad (32)$$

其中: $\mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}) = \{\dots, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}} + \Delta \bar{\mathbf{f}}^\ell), \dots, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}} - \Delta \bar{\mathbf{f}}^\ell), \dots\}$.

这里 $\nabla R_i^s(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 和 $\nabla Q_j^s(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_j^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 的计算方法与 $\nabla_{\bar{\mathbf{f}}} h_i(\bar{\mathbf{f}})$ 相同. 不同的是, $\nabla R_i^s(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 可以在 v_i 本地计算得到, 而 $\nabla Q_j^s(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_j^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 需要在 v_i 将 $\bar{\mathbf{f}}$ 和 $\mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}})$ 发送给 v_j 之后, 由 v_j 计算得到后返回给 v_i . 值得注意的是, 根据第 2.2.2 节中 $\mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}})$ 的定义, 若按 $\bar{\mathbf{f}}$ 计算出航行器 v_i 的轨迹不经过 D^ℓ , 则有 $\mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}} \pm \Delta \bar{\mathbf{f}}^\ell) = \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}})$. 此外, $\nabla Q_j^s(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_j^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 通常是稀疏矢量. 因而实际中需要在 v_i 和 v_j 间传递的数据量要减少许多.

4 收敛性分析

算法 1 的完整迭代流程可以用图 4 来表示. 其中航行器节点 v_i 拥有 $1 + q_i$ 个约束方程 (24)–(25), 这里 $q_i = S_i \times |\mathcal{N}_i|$. 将每个方程视为一个方程节点, 则每个方程节点对应一次流场估计值的迭代. 将 $m = \sum_{i=1}^N (1 + q_i)$ 个方程节点按迭代顺序连接起来, 得到有 m 个节点的树型图 \mathcal{G}'_U (图 4). 易知, \mathcal{G}'_U 仍然有 1 个根节点和 ζ 个叶节点. 用 r' 和 \mathcal{L}' 分别表示 \mathcal{G}'_U 的根节点和叶节点集合. 将 m 个方程重新编号, 并使方程节点编号与方程编号一致, 则有总非线性方程组

$$\Psi(\bar{\mathbf{f}}) = [\psi_1(\bar{\mathbf{f}}) \ \psi_2(\bar{\mathbf{f}}) \ \cdots \ \psi_m(\bar{\mathbf{f}})]^T = \mathbf{0}. \quad (33)$$

对于 \mathcal{G}'_U 中的任意叶节点 $l \in \mathcal{L}'$, 从 r' 到 l 的唯一通路表示为 $r' = (l, 1) \rightarrow (l, 2) \rightarrow \cdots \rightarrow (l, p_l) = l$, 这里 p_l 表示 r' 到 l 所经过的节点数.

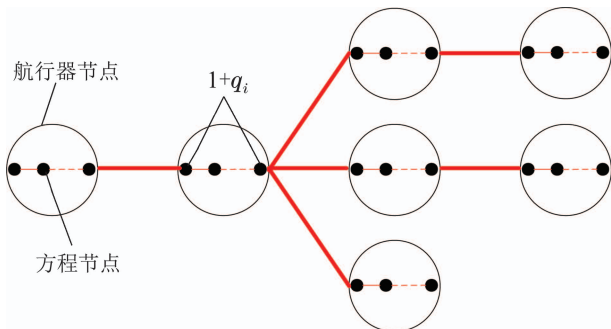


图 4 由方程节点组成的树型网络 \mathcal{G}'_U

Fig. 4 Tree-structure network \mathcal{G}'_U composed of equation nodes

算法 1: 分布式协同流场估计

输入: 相对位置测量 $\mathbf{r}_{ij}(t)$, 绝对运动积分误差 \mathbf{d}_i , 松弛参数 $\lambda_i \in (0, 2)$, 初始估计值 $\bar{\mathbf{f}}_x^0, \bar{\mathbf{f}}_y^0$; 迭代轮数 $k = 0$;

while $|e_{i,x}|, |e_{i,y}| \geq \epsilon_e$ 或 $|\eta_{ij,x}^s|, |\eta_{ij,y}^s| \geq \epsilon_\eta$ **do**
 令 $n = 0$. 若 $v_i = v_r$, 令 $\bar{\mathbf{f}}_i^n = \bar{\mathbf{f}}^k$; 否则, 等待从上级节点接收最新流场估计值作为 $\bar{\mathbf{f}}_i^n$;
 使用约束方程 (24) 更新 $\bar{\mathbf{f}}_{i,x}^n, \bar{\mathbf{f}}_{i,y}^n$

$$\bar{\mathbf{f}}_{i,x}^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_{i,x}^n - \lambda_i \frac{h_{i,x}(\bar{\mathbf{f}}_i^n) \nabla_{\bar{\mathbf{f}}_x} h_{i,x}(\bar{\mathbf{f}}_i^n)}{\|\nabla_{\bar{\mathbf{f}}_x} h_{i,x}(\bar{\mathbf{f}}_i^n)\|^2},$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{i,y}^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_{i,y}^n - \lambda_i \frac{h_{i,y}(\bar{\mathbf{f}}_i^n) \nabla_{\bar{\mathbf{f}}_y} h_{i,y}(\bar{\mathbf{f}}_i^n)}{\|\nabla_{\bar{\mathbf{f}}_y} h_{i,y}(\bar{\mathbf{f}}_i^n)\|^2};$$

for $v_j \in \mathcal{N}_i, s = 1 : S_i$ **do**

令 $n = n + 1$. 向 v_j 发送 $\bar{\mathbf{f}}_i^n, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n), \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n)$, 等待 v_j 传回 $Q_{jx}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}})), Q_{jy}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}})), \nabla Q_{jx}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$ 和 $\nabla Q_{jy}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}))$; 按下式更新 $\bar{\mathbf{f}}_i^n$:

$$\bar{\mathbf{f}}_{i,x}^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_{i,x}^n - \lambda_i \frac{h_{ij,x}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n) \nabla_{\bar{\mathbf{f}}_x} h_{ij,x}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n)}{\|\nabla_{\bar{\mathbf{f}}_x} h_{ij,x}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n)\|^2},$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{i,y}^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_{i,y}^n - \lambda_i \frac{h_{ij,y}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n) \nabla_{\bar{\mathbf{f}}_y} h_{ij,y}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n)}{\|\nabla_{\bar{\mathbf{f}}_y} h_{ij,y}^s(\bar{\mathbf{f}}_i^n)\|^2};$$

end

令 $\bar{\mathbf{f}}_i^k = \bar{\mathbf{f}}_i^{n+1}$. 将 $\bar{\mathbf{f}}_i^k$ 传递给 $\mathcal{C}(v_i)$;

若 $v_i \in \mathcal{L}$, 令 $\mathbf{x}_i^k = \bar{\mathbf{f}}_i^k$;

否则, 令 $\mathbf{x}_i^k = \sum_{v_j \in \mathcal{C}(v_i)} \omega(j, i) \mathbf{x}_j^k$;

若 $v_i \neq v_r$, 将 \mathbf{x}_i^k 传递给直接上级节点;

否则, 令 $\bar{\mathbf{f}}^{k+1} = \mathbf{x}_r^k$;

令 $k = k + 1$. 对 $v_j \in \mathcal{N}_i$, 计算

$$e_{i,x} = \mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}}^k) \bar{\mathbf{f}}_x^k - \mathbf{d}_{i,x},$$

$$e_{i,y} = \mathbf{T}_i(\bar{\mathbf{f}}^k) \bar{\mathbf{f}}_y^k - \mathbf{d}_{i,y},$$

$$\eta_{ij,x}^s = R_{ix}^s(\bar{\mathbf{f}}^k, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}^k)) - Q_{jx}^s(\bar{\mathbf{f}}^k, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}^k)),$$

$$\eta_{ij,y}^s = R_{iy}^s(\bar{\mathbf{f}}^k, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}^k)) - Q_{jy}^s(\bar{\mathbf{f}}^k, \mathbf{t}_i^s(\bar{\mathbf{f}}^k));$$

end

则在算法 1 的第 k 次扩散阶段, $\bar{\mathbf{f}}^k$ 从根节点最终传递到叶节点 l 时, 有

$$\bar{\mathbf{f}}_l^k = \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^k), \quad (34)$$

其中:

$$\mathbf{G}_l(\cdot) := \mathbf{g}_{l,p_l}(\cdots \mathbf{g}_{l,1}(\cdot) \cdots), \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^P, \quad (35)$$

$$\mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}) = \bar{\mathbf{f}} - \lambda_{l,p} \frac{\psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}) \nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}})}{\|\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}})\|^2},$$

$$p \in \{1, \dots, p_l\}. \quad (36)$$

在第 k 次池化阶段, 根据式 (22)–(29), 通过归纳法易得

$$\bar{\mathbf{f}}^{k+1} = \sum_{l \in \mathcal{L}'} \omega(l, r) \bar{\mathbf{f}}_l^k. \quad (37)$$

联立式(34)(37), 算法1经过一轮完整迭代后, 有

$$\bar{\mathbf{f}}^{k+1} = \Phi(\bar{\mathbf{f}}^k), \quad (38)$$

其中

$$\Phi(\cdot) := \sum_{l \in \mathcal{L}'} \omega(l, r) \mathbf{G}_l(\cdot). \quad (39)$$

下面将证明, 由式(38)产生的序列 $\{\bar{\mathbf{f}}^k\}$ 将会收敛到真实流场, 即定理2.

引理 1 若 $\lambda_{l,p} \in (0, 2)$, 则 $\|\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\| \leq 1$. 同时, 当且仅当 $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T)$, 有 $\|\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. 这里, $\text{Ker}(\cdot)$ 表示零空间.

证 因为 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 为真实流场, 所以对于以 $\bar{\mathbf{f}}$ 为变元的方程组(33), 有 $\psi_i(\bar{\mathbf{f}}^*) = 0, i \in \{1, \dots, m\}$. 据此, 投影算子(36)在 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 处的Jacobian矩阵为

$$\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*) = \mathbf{I} - \lambda_{l,p} \frac{\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*) \nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T}{\|\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\|^2}.$$

定义线性算子

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*) \nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T}{\|\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\|^2}.$$

显然, 有 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. 这表明 \mathbf{P} 是一个幂等矩阵, 因而是个投影算子^[18]. 根据正交投影理论, 对于任意矢量 \mathbf{v} , 满足 $\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v} + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v}$. 则

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{P}\mathbf{v} + (1 - \lambda_{l,p})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{P}\mathbf{v}\|^2 + |1 - \lambda_{l,p}|^2 \|(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v}\|^2 \leq \\ &= \|\mathbf{P}\mathbf{v}\|^2 + \|(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

当且仅当 $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, 上式取等. 此时,

$$\mathbf{v} \in \text{Ker}(\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T),$$

且 $\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v} = \mathbf{v}$. 证毕.

引理 2 若 $\lambda_{l,p} \in (0, 2)$, 则 $\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\| \leq 1$. 同时, 当且仅当 $\mathbf{v} \in \bigcap_{p=1}^{p_l} \text{Ker}(\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T)$, 有 $\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$.

证 由于 $\psi_i(\bar{\mathbf{f}}^*) = 0$ 对 $i \in \{1, \dots, m\}$ 都成立, 代入式(36)后有 $\mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*) = \bar{\mathbf{f}}^*$. 因而根据求导的链式法则, 有

$$\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*) = \prod_{p=p_l}^1 \nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*).$$

则有

$$\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\| = \left\| \prod_{p=p_l}^1 \nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*) \right\| \leq \prod_{p=p_l}^1 \|\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\|.$$

由引理1知, $\|\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\| \leq 1$, 所以 $\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\| \leq 1$. 根据矩阵诱导范数的定义, 对任意矢量 \mathbf{v} , 有

$$\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|.$$

又因为

$$\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \left\| \prod_{p=p_l}^1 \nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v} \right\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\left\| \prod_{p=p_l}^2 \nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*) \right\| \|\nabla \mathbf{g}_{l,1}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| \leq \\ &\left\| \prod_{p=p_l}^2 \nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*) \right\| \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

所以, 若矢量 \mathbf{v} 满足 $\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则必须有 $\|\nabla \mathbf{g}_{l,1}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. 根据引理 1, 此时有 $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T)$ 且 $\nabla \mathbf{g}_{l,1}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v} = \mathbf{v}$. 那么此时

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| &= \|\nabla \mathbf{g}_{l,p_l}(\bar{\mathbf{f}}^*) \cdots \nabla \mathbf{g}_{l,1}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \\ &= \|\nabla \mathbf{g}_{l,p_l}(\bar{\mathbf{f}}^*) \cdots \nabla \mathbf{g}_{l,2}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

重复上述步骤, 易总结出: 若 $\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, 必须有 $\|\nabla \mathbf{g}_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ 对 $p \in \{1, \dots, p_l\}$ 都成立. 根据引理1, 此时有 $\mathbf{v} \in \bigcap_{p=1}^{p_l} \text{Ker}(\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T)$.

证毕.

定理 1 设 P 为矢量 $\bar{\mathbf{f}}$ 的维度, 若有 $\text{rank}(\mathbf{Z}) = P$, 则有 $\|\nabla \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\| < 1$, 其中:

$$\mathbf{z}_i = \frac{\nabla \psi_i(\bar{\mathbf{f}}^*)}{\|\nabla \psi_i(\bar{\mathbf{f}}^*)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (40)$$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m]. \quad (41)$$

证 根据式(39), 映射 $\Phi(\cdot)$ 在 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 处的Jacobian矩阵为

$$\nabla \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*) = \sum_{l \in \mathcal{L}'} \omega(l, r) \nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*).$$

则有

$$\begin{aligned} \|\nabla \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| &= \left\| \sum_{l \in \mathcal{L}'} \omega(l, r) \nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v} \right\| \leq \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}'} \|\omega(l, r) \nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}'} \omega(l, r) \|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| \leq \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}'} \omega(l, r) \|\mathbf{v}\|, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\|\nabla \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|, \quad (43)$$

其中式(42)是根据引理2的结论, 式(43)是根据式(23). 上式表明, 对于任意矢量 \mathbf{v} , 有

$$\|\nabla \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|.$$

假设存在 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 满足 $\|\nabla \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则根据前文的推导, 必须有 $\|\nabla \mathbf{G}_l(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ 对所有 $l \in \mathcal{L}'$ 都成立. 由引理2知, 此时矢量 \mathbf{v} 需满足

$$\mathbf{v} \in \bigcap_{l \in \mathcal{L}'} \bigcap_{p=1}^{p_l} \text{Ker}(\nabla \psi_{l,p}(\bar{\mathbf{f}}^*)^T) = \bigcap_{i=1}^m \text{Ker}(\nabla \psi_i(\bar{\mathbf{f}}^*)^T).$$

上式等价于

$$\mathbf{v} \in \bigcap_{i=1}^m \text{Ker}(\mathbf{z}_i^T).$$

上式表明 $z_i^T \mathbf{v} = 0$ 对 $i = 1, 2, \dots, m$ 都成立, 即

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} z_1^T \mathbf{v} \\ \vdots \\ z_m^T \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (44)$$

因为 $\text{rank}(\mathbf{Z}^T) = \text{rank}(\mathbf{Z}) = P$, 所以 \mathbf{Z}^T 列满秩, 所以 $\text{Ker}(\mathbf{Z}^T) = \{\mathbf{0}\}$. 而式(44)表明非零向量 $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\mathbf{Z}^T)$. 显然, 存在矛盾. 所以假设不成立, 不存在非零向量 \mathbf{v} 满足 $\|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. 因此, 对任意非零向量 \mathbf{v} 有

$$\|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\| < \|\mathbf{v}\|.$$

因此根据矩阵诱导范数的定义, 有

$$\|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\| = \sup_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} < 1.$$

证毕.

定理 2 若 $\text{rank}(\mathbf{Z}) = P$, 则存在以 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 为中心, δ 为半径的球域 $\mathcal{B}_\delta(\bar{\mathbf{f}}^*)$ 和常数 $0 < \beta < 1$, 使得对任意初始流场估计值 $\bar{\mathbf{f}}^0 \in \mathcal{B}_\delta(\bar{\mathbf{f}}^*)$, 由算法1产生的序列 $\{\bar{\mathbf{f}}^k\}$ 满足

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{f}}^k - \bar{\mathbf{f}}^*\| &< \beta^k \|\bar{\mathbf{f}}^0 - \bar{\mathbf{f}}^*\|, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{f}}^k &= \bar{\mathbf{f}}^*, \end{aligned}$$

其中 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 为非线性方程组(33)的一个解, 在这里即为待求的真实流场.

证 基于引理1和引理2, 文章已经在定理1中得到 $\|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\| < 1$. 基于此, 定理2的证明是较直观的, 与文献[15]中定理4.1的证明相似.

将 $\Phi(\bar{\mathbf{f}})$ 在 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 处按一阶泰勒级数展开

$$\Phi(\bar{\mathbf{f}}) = \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*) + \nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*) + o(\|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\|).$$

这里, $\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)$ 表示 $\Phi(\cdot)$ 在 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 处的 Jacobian 矩阵, $o(\cdot)$ 表示高阶无穷小量. 对上述泰勒级数展开进行变换, 有

$$\lim_{\bar{\mathbf{f}} \rightarrow \bar{\mathbf{f}}^*} \frac{\|\Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*) - \nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*)\|}{\|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\|} = 0.$$

根据函数极限的 (ϵ, δ) 条件, 存在一个以 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 为中心, δ 为半径的邻域 $\mathcal{B}_\delta(\bar{\mathbf{f}}^*) = \{\bar{\mathbf{f}} \mid \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\| < \delta\}$, 使得对于任意向量 $\bar{\mathbf{f}} \in \mathcal{B}_\delta(\bar{\mathbf{f}}^*)$, 满足

$$\frac{\|\Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*) - \nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*)\|}{\|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\|} < \epsilon,$$

这里 $\epsilon > 0$ 并且可以任意小, 而邻域的半径 δ 依赖于 ϵ 的取值. 易知 $\bar{\mathbf{f}}^*$ 是 $\Phi(\cdot)$ 的一个不动点, 即 $\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*) = \bar{\mathbf{f}}^*$, 所以有

$$\begin{aligned} \|\Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \bar{\mathbf{f}}^*\| &= \\ \|\Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\| &= \\ \|\Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*) - \nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*)\| \leq \\ &\|\Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \Phi(\bar{\mathbf{f}}^*) - \nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*)\| + \\ &\|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*)\| < \\ &\epsilon \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\| + \|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\| \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\| = \\ &(\epsilon + \|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\|) \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\| = \\ &\beta \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\|. \end{aligned}$$

因为 $\epsilon > 0$ 可以任意小, 同时 $\|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\| < 1$ 严格成立, 所以有

$$\beta = \epsilon + \|\nabla\Phi(\bar{\mathbf{f}}^*)\| < 1.$$

若 $\bar{\mathbf{f}}^k \in \mathcal{B}_\delta(\bar{\mathbf{f}}^*)$, 则根据上述推导结果, 有

$$\|\bar{\mathbf{f}}^{k+1} - \bar{\mathbf{f}}^*\| = \|\Phi(\bar{\mathbf{f}}^k) - \bar{\mathbf{f}}^*\| < \beta \|\bar{\mathbf{f}}^k - \bar{\mathbf{f}}^*\|.$$

因此迭代是收缩的, 且 $\bar{\mathbf{f}}^{k+1} \in \mathcal{B}_\delta(\bar{\mathbf{f}}^*)$. 通过归纳法, 若初始流场估计值 $\bar{\mathbf{f}}^0 \in \mathcal{B}_\delta(\bar{\mathbf{f}}^*)$, 则有

$$\|\bar{\mathbf{f}}^k - \bar{\mathbf{f}}^*\| < \beta^k \|\bar{\mathbf{f}}^0 - \bar{\mathbf{f}}^*\|.$$

证毕.

5 仿真结果

本节通过仿真, 使用所提出的分布式算法进行流场估计, 以验证算法的有效性. 同时, 与文献[10-11, 16]的流场估计方法进行了对比实验.

将 $1200 \times 1200 \text{ m}^2$ 的区域分割成 $P = 9 \times 9$ 个单元格, 并在该区域模拟真实涡旋流场 $\bar{\mathbf{f}}^*$. 流速的最大值为 0.1 m/s (图5(a)). 放置 $N = 18$ 个航行器在流场中以对水速度 $v_i^c = 0.45 \text{ m/s}$ 航行, 并使其轨迹覆盖整个区域(图5(b)). 给定目标位置 ω_i , 航行器 v_i 计算出它相对目标位置的朝向角 θ_i , 然后保持该朝向角向目标航行. 航行器的真实轨迹和预测轨迹可通过将式(1)(3)按时间步长 $\Delta t = 1 \text{ s}$ 离散化后计算得到. 这里, 预测流场 $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$. 当 $\|\omega_i - \tilde{\mathbf{r}}_i\| < 1 \text{ m}$, 航行器 v_i 停止航行, 并计算自己的绝对运动积分误差 d_i . 当所有航行器都完成航行后, 按第3.1节的方法获得低通信成本的树型网络. 但在仿真里, 可以人为指定一个树型网络来运行分布式流场估计算法, 这并不影响验证算法的有效性.

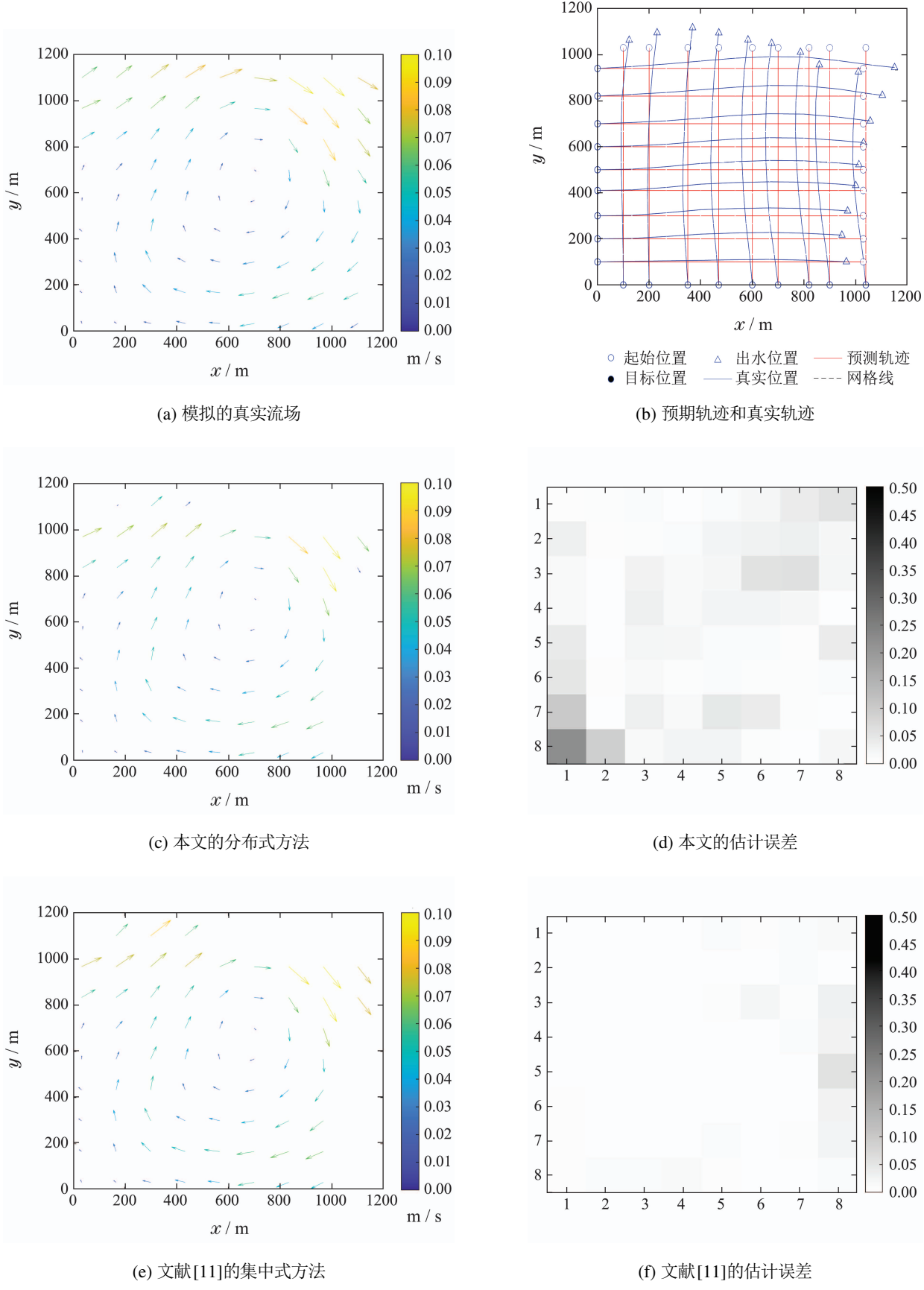
令算法1中的松弛参数 $\lambda_i = 1$, 初始流场估计值 $\bar{\mathbf{f}}^0 = \mathbf{0}$, 算法终止条件 $\epsilon_e = 0.1$, $\epsilon_\eta = 0.1$, 最大迭代次数 $k_{\max} = 300$. 图5(c)为算法最终得到的估计流场. 对于没有航行器经过的区域, 流场估计的准确度不可避免会地会变差. 实际中可以通过插值的方法获得未经区域的流场估计. 为了更好地说明所提出的流场估计方法的准确度, 在计算估计误差时, 不考虑没有航行器经过的单元格. 定义算法的相对估计误差为

$$\text{err} = \frac{\|\bar{\mathbf{f}}^k - \bar{\mathbf{f}}^*\|}{\|\bar{\mathbf{f}}^*\|} \times 100\%,$$

其中: $\bar{\mathbf{f}}^k = [\bar{f}_x^k \ \bar{f}_y^k]^T$, $\bar{\mathbf{f}}^* = [\bar{f}_x^* \ \bar{f}_y^*]^T$. 计算得到上述仿真的相对估计误差为 $\text{err} = 2.62\%$. 更具体地, 每个网格内的流速的相对估计误差如图5(d)所示.

图5(e)-(j)是在相同设置下,使用文献[10-11,16]的方法得到的估计流场和网格误差图,最终的相对误差分别为1.58%, 30.01%, 35.7%。其中:文献[16]的分

布式方法采用全连通的网络。可见,本文所提出的分布式方法可以达到与文献[11]的集中式方法相当的准确度,并且优于文献[10,16]。



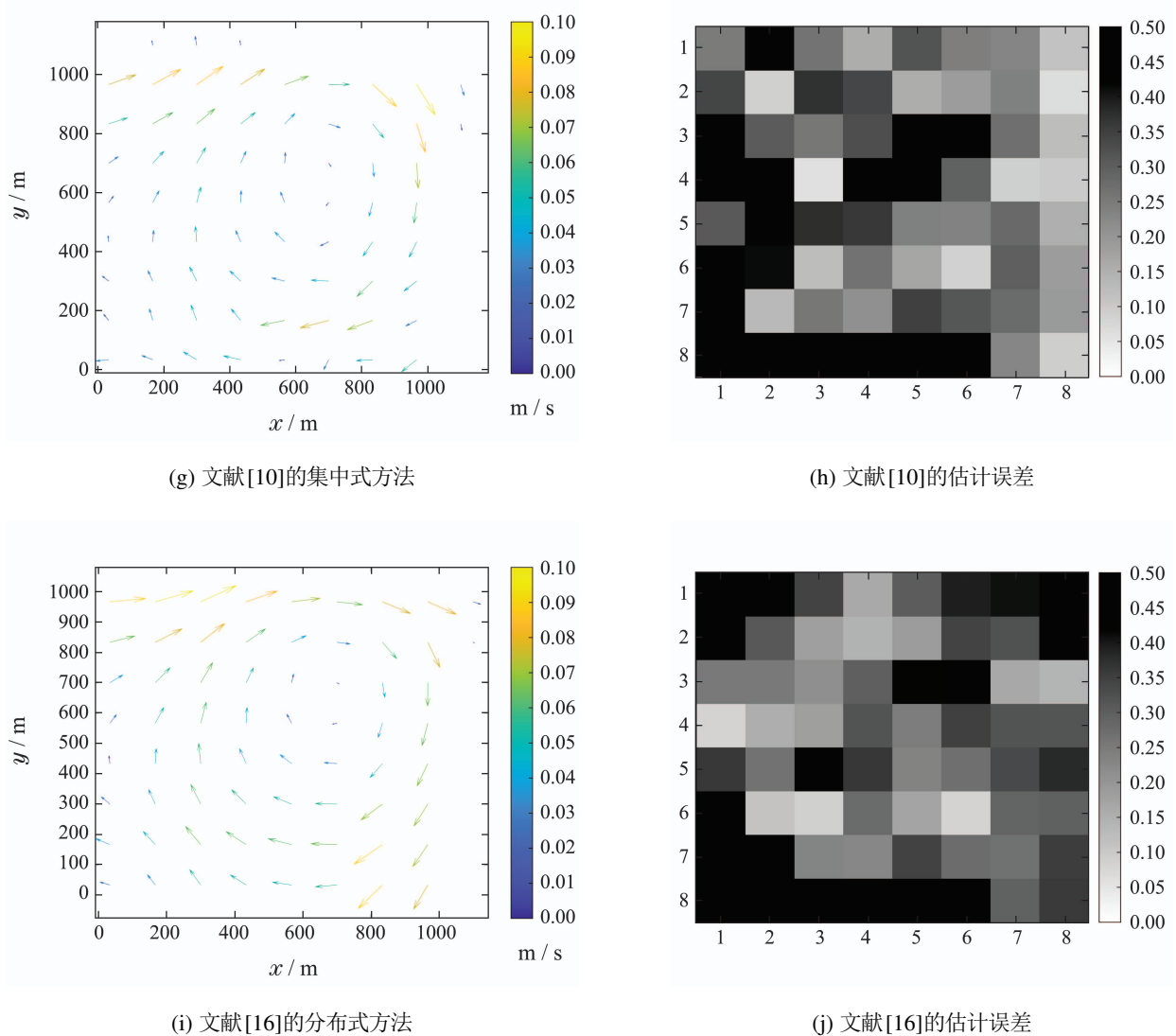


图 5 不同方法估计出的流场的对比图

Fig. 5 A comparison of flow estimated by different methods

6 总结与展望

本文使用多AUV系统实现分布式协同流场估计, 并提出了基于树型网络的分布式算法来求解与流场估计相关的非线性方程组. 本文证明了该算法的收敛性, 并通过仿真验证了算法的有效性. 相比于先前工作^[11]中提出的集中式协同流场估计方法, 本文给出的分布式流场估计方法能达到相当的准确度. 而相比于Chang等的工作^[10, 16], 本文所提出的流场估计方法考虑了相对位置测量, 因而获得了更高的流场估计准确度. 未来的工作包括: 最优树型网络的建立方法、连续流场模型参数估计.

参考文献:

- [1] BAYAT B, CRASTA N, CRESPI A, et al. Environmental monitoring using autonomous vehicles: A survey of recent searching techniques. *Current Opinion in Biotechnology*, 2017, 45: 76 – 84.
- [2] PAULL L, SAEEDI S, SETO M, et al. AUV navigation and localization: A review. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2013, 39(1): 131 – 149.
- [3] SONG Z, MOHSENI K. Long-term inertial navigation aided by dynamics of flow field features. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2017, 43(4): 940 – 954.
- [4] DEVRIES L, LAGOR F D, LEI H, et al. Distributed flow estimation and closed-loop control of an underwater vehicle with a multi-modal artificial lateral line. *Bioinspiration & Biomimetics*, 2015, 10(2): 025002.
- [5] DANG F, ZHANG F. Identification of hydrodynamic coefficients of a robotic fish using improved extended Kalman filter. *Dynamic Systems and Control Conference*. Tysons, Virginia: ASME, 2017: V001T30A012.
- [6] HACKBARTH A, KREUZER E, SCHRÖDER T. CFD in the loop: Ensemble Kalman filtering with underwater mobile sensor networks. *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. San Francisco, CA: ASME, 2014: UNSP V002T08A063.
- [7] GAO A, TRIANTAFYLLOU M. Bio-inspired pressure sensing for active yaw control of underwater vehicles. *The 65th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*. VA, USA: OES, 2012: 7.

- [8] LIU Ruixuan. *Research on coordination control of multiple underwater vehicles*. Zhenjiang: Jiangsu University of Science and Technology, 2018.
(刘瑞轩. 多水下机器人协调控制研究. 镇江: 江苏科技大学, 2018.)
- [9] KAK A C, SLANEY M, WANG G. Principles of computerized tomographic imaging. *Medical Physics*, 2002, 29(1): 10.
- [10] CHANG D, WU W, ZHANG F, et al. Motion tomography: Mapping flow fields using autonomous underwater vehicles. *The International Journal of Robotics Research*, 2017, 36(3): 320 – 336.
- [11] SHI L, ZHENG R, LIU M, et al. Cooperative flow field estimation using multiple AUVs. *The 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Jeju, South Korea: IEEE, 2020: 5243 – 5248.
- [12] HEGDE C, KEINERT F, WEBER E S. A Kaczmarz algorithm for solving tree based distributed systems of equations. *arXiv Preprint: ArXiv*, 2019: 1904.05732.
- [13] BORGARD R, HARDING S N, DUBA H, et al. Accelerating the distributed Kaczmarz algorithm by strong over-relaxation. *Linear Algebra and Its Applications*, 2021, 611: 334 – 355.
- [14] MEYN K H. Solution of underdetermined nonlinear equations by stationary iteration methods. *Numerische Mathematik*, 1983, 42(2): 161 – 172.
- [15] ZENG W J, YE J. Successive projection for solving systems of nonlinear equations/inequalities. *arXiv Preprint:ArXiv*, 2020: 2012.07555.
- [16] CHANG D, ZHANG F, SUN J. Distributed motion tomography for reconstruction of flow fields. *International Conference on Robotics and Automation*. Montreal: IEEE, 2019: 8048 – 8054.
- [17] GALLAGER R G, HUMBLET P A, SPIRA P M. A distributed algorithm for minimum-weight spanning trees. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 1983, 5(1): 66 – 77.
- [18] DUNFORD N, SCHWARTZ J T. *Linear Operators, Part I: General Theory*. New York: Wiley-Interscience, 1958.

作者简介:

何 翌 硕士生, 目前研究方向为多机器人系统协同控制与优化,

E-mail: 22110100@zju.edu.cn;

郑荣濂 博士, 副教授, 目前研究方向为多机器人系统协同控制与优化, E-mail: rzheng@zju.edu.cn;

张森林 博士, 教授, 目前研究方向为水下信息感知与处理, E-mail: slzhang@zju.edu.cn;

刘妹琴 博士, 教授, 目前研究方向为人工智能理论与应用、水下信息感知与处理、多传感器信息融合, E-mail: liumeiqin@zju.edu.cn.