

# 基于梯度估计的多智能体系统有限时间分布式优化

朱文博, 王庆领<sup>†</sup>

(东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210018)

**摘要:** 现有多智能体系统分布式优化算法大多具有渐近收敛速度, 且要求系统的网络拓扑图为无向图或有向平衡图, 在实际应用中具有一定的保守性. 本文研究了具有强连通拓扑的多智能体系统有限时间分布式优化问题. 首先, 基于非光滑分析和Lyapunov稳定性理论设计了一个有限时间分布式梯度估计器. 然后, 基于该梯度估计器提出了一种适用于强连通有向图的有限时间分布式优化算法, 实现了多智能体系统中智能体的状态在有限时间内一致收敛到全局最优状态值. 与现有的有限时间分布式优化算法相比, 新提出的有限时间优化算法适用于具有强连通拓扑的多智能体系统, 放宽了系统对网络拓扑结构的要求. 此外, 本文基于Nussbaum函数方法对上述优化算法进行了拓展解决了含有未知高频增益符号的多智能体系统分布式优化问题. 最后, 通过仿真实例对提出的分布式优化算法的有效性进行了验证.

**关键词:** 多智能体系统; 分布式优化; 有限时间; 强连通有向图; 非光滑分析; 凸优化

**引用格式:** 朱文博, 王庆领. 基于梯度估计的多智能体系统有限时间分布式优化. 控制理论与应用, 2023, 40(4): 615 – 623

DOI: 10.7641/CTA.2022.11088

## Gradient estimations based distributed finite-time optimization for multi-agent systems

ZHU Wen-bo, WANG Qing-ling<sup>†</sup>

(School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210018, China)

**Abstract:** Most of the existing distributed optimization algorithms for multi-agent systems (MASs) have asymptotic convergence, and the graphs of MASs are required to be undirected or weight balanced, which are conservative in practical application. Therefore, the distributed finite-time optimization problems for MASs which have strongly connected digraphs are investigated in this paper. First, based on the non-smooth analysis and the Lyapunov stability theory, a distributed finite-time gradient estimator is designed, then the gradient estimator based distributed finite-time optimization algorithms are proposed. With the proposed distributed optimization algorithms, the states of all agents can achieve consensus at global optimal point within finite-time. Compared with the most existing distributed finite-time optimization algorithms, the new proposed algorithms which could be deployed to the MASs with strongly connected digraphs relax the requirements of communication topologies. Moreover, the proposed algorithms are extended to solve the optimization problems in the MASs with unknown high-frequency gain signs by using the Nussbaum function based method. Finally, the simulations are conducted to verify the effectiveness of the proposed distributed optimization algorithms.

**Key words:** multi-agent systems; distributed optimization; finite-time; strongly connected digraphs; non-smooth analysis; convex optimization

**Citation:** ZHU Wenbo, WANG Qingling. Gradient estimations based distributed finite-time optimization for multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 615 – 623

## 1 引言

多智能体系统具有极其广泛和重要的应用背景, 分布式优化问题也一直是多智能体系统理论研究和实际应用的重要方向之一, 因此近年来受到越来越广

泛的关注. 例如无线传感器网络<sup>[1-2]</sup>、机器学习中的分布式训练<sup>[3]</sup>以及智能电网<sup>[4-5]</sup>等. 在多智能体系统中, 每个智能体都有一个本地可知的代价函数. 多智能体系统分布式优化问题, 即通过部署分布式优化算

收稿日期: 2021-11-09; 录用日期: 2022-04-29.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: qlwang@seu.edu.cn; Tel.: +86 15295588075.

本文责任编辑: 王东.

国家自然科学基金项目(62111530149, 61973074)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62111530149, 61973074).

法使得所有智能体的状态达到一致,同时使得系统中代价函数的加和最小。

多智能体系统的相关理论研究通常基于离散时间模型和连续时间模型.针对离散时间的多智能体系统模型,人们已经提出了很多分布式优化算法<sup>[6-7]</sup>.此外,基于连续时间多智能体系统模型<sup>[8-9]</sup>的分布式优化问题也得到了广泛的关注.尽管上述算法可以渐近的实现多智能体系统优化目标,但是在实际应用过程中可能会存在收敛速度慢等问题.因此,多智能体系统中的有限时间分布式优化算法更加适用于实际应用场景,同时也是一个新的热点研究问题。

针对有限时间分布式优化问题<sup>[10-16]</sup>,很多文献已经进行了研究.例如,文献[10-11]证实了由于代价函数的存在,故现有的有限时间一致性算法不能够直接推广到有限时间优化算法.针对无向图,文献[12]提出了一种有限时间优化算法,但是该算法对每个智能体的初始状态有要求,这在很多实际场景中是有局限性的.文献[13]对文献[12]提出的算法进行了改进,提出了一种新的基于无向图的有限时间分布式优化算法,该算法的优势是不需要对初始状态进行限制.针对二阶连续时间多智能体系统中每个智能体的代价函数是时变的这种情况,文献[14]构建了一个有限时间梯度估计器用来估计所有代价函数的平均梯度.针对基于有向图的有限时间优化问题,文献[15]提出了一种适用于有向平衡图的有限时间分布式优化算法.此外,文献[16]定义了一种新的网络拓扑结构,放松了对于无向通信拓扑图的限制,并提出了一种适用于该拓扑的有限时间分布式优化算法.综上可知,现有的有限时间优化算法对于多智能体系统中的图的结构要求较为严格,大多只适用于无向图或者有向平衡图.然而,实际场景中的多智能体系统大多不满足上述网络拓扑结构.因此,具有非平衡有向图的多智能体系统有限时间分布式优化问题仍然是个开放性的问题。

本文针对一阶连续时间多智能体系统研究了基于有向图的有限时间分布式优化问题,采用非光滑分析和Lyapunov稳定性理论,首先设计了一个有限时间分布式梯度估计器,然后基于上述梯度估计器提出了一种新的有限时间分布式优化算法.该算法可适用于具有强连通的有向网络拓扑结构,且对于智能体的初始状态没有限制.此外,本文对上述分布式优化算法进行了拓展,解决了含有未知高频增益符号的多智能体系统分布式优化问题.本文的主要创新点总结如下:

1) 本文新提出了一种基于梯度估计的有限时间分布式优化算法,且该算法相较于现有分布式优化算法具有较多优势.例如,与文献[8]相比,本文提出的分布式优化算法是有限时间收敛的,具有更快的收敛速度.与文献[12]相比,本文提出的分布式优化算法对智

能体的初始状态没有限制.与文献[13-16]相比,本文提出的分布式优化算法不要求网络通信拓扑为无向图或者有向平衡图。

2) 本文将上述有限时间分布式优化算法进行了拓展,解决了含有未知高频增益符号的多智能体系统分布式优化问题.新算法同样适用于具有强连通的有向网络拓扑结构,且对于智能体的初始状态没有限制。

本文主要安排如下:第2节介绍了一些基础知识,并对连续时间多智能体系统分布式优化问题进行了描述;第3节首先给出了一种适用于多智能体系统的有限时间分布式优化算法,然后本文将上述算法拓展到了含有未知高频增益符号的多智能体系统;在第4节中,对算法进行了数值仿真;本文的结论放在了第5节。

## 2 基础知识与问题描述

### 2.1 符号说明与图论

定义向量 $v=[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]^T$ ,  $v_i \in \mathbb{R}$ ,  $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^N |v_i|$ 表示向量 $v$ 的1范数,  $|v|$ 表示向量中每个元素取绝对值,即 $|v|=[|v_1| \ |v_2| \ \cdots \ |v_N|]^T$ .将每个元素都相同的向量 $[\bar{v} \ \bar{v} \ \cdots \ \bar{v}]^T$ 记为 $\bar{v}^N$ ,其中 $\bar{v} \in \mathbb{R}$ .对于矩阵 $B$ ,它的第 $i$ 行向量记作 $[B]^i$ ,第 $i$ 行第 $j$ 列元素表示为 $b_{ij}$ ,其中 $b_{ij} \in \mathbb{R}$ .此外, $\mathcal{L}_\infty$ 表示 $[0, \infty)$ 上的有界函数空间。

有向图 $\mathcal{G}=(V, E, A)$ 表示多智能体系统的有向通信拓扑<sup>[17-19]</sup>,其中 $V=\{1, 2, \dots, N\}$ 表示系统中所有智能体的集合, $E \subseteq \{V \times V\}$ 表示两个智能体之间的有向通信链路, $A$ 是有向图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵.邻接矩阵 $A$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列的元素记为 $a_{ij}$ ,若 $a_{ij} > 0$ ,则表示智能体 $i$ 可以接收到智能体 $j$ 传来的信息;若 $a_{ij} = 0$ ,则表示智能体 $i$ 无法接收到智能体 $j$ 传来的信息.此外,有向图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵记为 $L$ .其中,用 $l_{ij}$ 表示拉普拉斯矩阵 $L$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列的元素。

基于上述有向图 $\mathcal{G}$ ,本文定义了一种新的有向图 $\mathcal{G}_p$ ,其中 $p \in \mathbb{R}$ 是一个常数. $\mathcal{G}_p$ 的邻接矩阵 $A_p$ 满足

$$[A_p]^i = \begin{cases} [0^N]^T, & i = p, \\ [A]^i, & i \neq p. \end{cases} \quad (1)$$

邻接矩阵 $A_p$ 中第 $i$ 行第 $k$ 列的元素记为 $a_{ik}^p$ ,拉普拉斯矩阵 $L_p$ 中第 $i$ 行第 $k$ 列的元素记为 $l_{ik}^p$ .

### 2.2 基础知识

针对非光滑分析,首先介绍如下定义和引理:

**定义 1**(Clarke广义梯度<sup>[20]</sup>) 定义

$$\partial_C V(x) \triangleq \text{co}\left\{\lim_{i \rightarrow \infty} \nabla V(x_i) \mid x_i \rightarrow x, x_i \notin \Theta_V \cup M\right\}, \quad (2)$$

其中: $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部Lipschitz连续函数,co表示凸包, $\Theta_V$ 是Lebesgue测度零的集合,其中 $M$ 是测

度零的任意集合且梯度 $\nabla V(x_i)$ 不存在.

**引理 1**(链式法则<sup>[21]</sup>) 若 $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 局部 Lipschitz 连续且 $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续, 则对于每一时刻 $t$ 均存在 $w \in \partial_C V(x(t))$ 使得

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = w^T \dot{x}(t). \quad (3)$$

**引理 2**<sup>[22]</sup> 在图 $\mathcal{G} = (V, E, A)$ 中考虑如下多智能体系统:

$$\dot{x}(t) = -c \operatorname{sgn}(Lx(t)) + v(t), \quad (4)$$

其中:  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_N(t)]^T$ 是智能体的状态向量,  $v(t) = [v_1(t) \ v_2(t) \ \cdots \ v_N(t)]^T$ 是扰动向量. 若图 $\mathcal{G}$ 包含至少一条有向生成树且网络中智能体状态未达到一致, 则有

- 1) 向量 $\operatorname{sgn}(Lx(t))$ 中至少有一个元素不是0.
- 2)  $\operatorname{sgn}(Lx(t))^T L \operatorname{sgn}(Lx(t)) \geq 1$ . (5)

接下来给出有限时间稳定性分析相关引理以及 Barbalat 引理.

**引理 3**(有限时间稳定性<sup>[23]</sup>) 考虑系统 $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , 其中 $f(0) = 0$ 且 $x(0) = x_0$  ( $x(t) \in \mathbb{R}$ ). 假设存在一个正定连续函数 $V(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -a \times V^b(x(t)), \\ \text{s.t. } x(t) &\neq 0, \ a > 0, \ b \in [0, 1], \end{aligned} \quad (6)$$

则原点是该系统的全局有限时间稳定点. 即系统会在有限时间 $t_0$ 内达到稳定, 其中

$$t_0 \leq \frac{V^{1-b}(x(0))}{a(1-b)}. \quad (7)$$

**引理 4**(Barbalat 引理<sup>[24]</sup>) 假设 $\chi(t)$ 是平方可积的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\chi(\tau))^2 d\tau < \infty$ , 则若 $\dot{\chi}(t)$ 存在且有界, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = 0$ .

接下来, 给出 Nussbaum 类型函数的相关定义以及相关引理:

**定义 2**(Nussbaum 类型函数<sup>[25]</sup>) 若函数 $\Theta(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases} \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\sup(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \Theta(\tau) d\tau)) = +\infty, \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\inf(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \Theta(\tau) d\tau)) = -\infty, \end{cases} \quad (8)$$

则称 $\Theta(\cdot)$ 为 Nussbaum 类型函数.

**注 1** 若 $\Theta(\rho(t))$ 是 Nussbaum 类型函数, 则当 $\rho(t) \in \mathcal{L}_\infty$ 时, 有 $\Theta(\rho(t)) \in \mathcal{L}_\infty$ . 常见的 Nussbaum 类型函数有 $e^{\rho^2} \cos \rho$ ,  $\rho^2 \sin \rho$ 和 $\rho^2 \cos \rho$ .

**注 2** 若 $\Theta(\rho(t))$ 是 Nussbaum 类型函数,  $s(\cdot)$ 在区间 $I = [o^-, o^+]$  ( $o^-, o^+$ 为未知常数且 $0 \notin I$ )上是有界函数,  $h(\cdot)$ 是

连续函数且 $h(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$ , 则 $\bar{\Theta}(\rho(t)) = s(\cdot)\Theta(\rho(t)) + h(\cdot)$ 也是 Nussbaum 类型函数.

**引理 5**<sup>[26]</sup> 对于区间 $[0, \infty)$ 上的光滑函数 $V(t) \geq 0$ 和 $\rho(t)$ , 以及 Nussbaum 类型函数 $\Theta(\rho(t))$ , 若 $\forall t \in [0, \infty)$ 均有

$$\dot{V}(t) \leq \Theta(\rho(t))\dot{\rho}(t), \quad (9)$$

则 $V(t)$ ,  $\rho(t)$ 和 $\int_0^t (\Theta(\rho(\tau))\dot{\rho}(\tau))d\tau$ 在区间 $[0, \infty)$ 上均有界.

### 2.3 问题描述

考虑具有如下动力学的多智能体系统:

$$\dot{x}_i(t) = u_{x,i}(t), \quad (10)$$

其中:  $x_i(t) \in \mathbb{R}$ 是第 $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )个智能体的状态,  $u_{x,i}(t)$ 是第 $i$ 个智能体的控制器输入. 系统中每个智能体都有自己的代价函数 $f_i(x_i(t)) \in \mathbb{R}$ . 系统的全局优化目标是

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = x^*, \quad (11)$$

其中:  $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^N f_i(x)$ ,  $t_0$ 是 $[0, \infty)$ 上的常数.

**假设 1** 通信拓扑图 $\mathcal{G}$ 是强连通的.

**假设 2** 每个智能体的代价函数 $f_i(x_i)$ 是二阶连续可微的且满足 $\underline{\mu}_i \leq \nabla^2 f_i(x_i) \leq \bar{\mu}_i$ .

## 3 主要成果

本节给出了两种分布式优化算法, 第1种算法在具有强连通拓扑的多智能体系统中的解决了有限时间优化问题; 第2种算法在含有未知高频增益符号的多智能体系统中解决了渐近时间优化问题.

### 3.1 有限时间分布式优化算法

针对连续时间多智能体系统, 本小节给出了一种基于梯度估计器的有限时间分布式优化算法, 其中梯度估计算法基于图 $\mathcal{G}_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ), 优化算法基于图 $\mathcal{G}_r$ ,  $r$ 为 $1, 2, \dots, N$ 中任意固定的常数.

**定理 1** 在假设1-2下考虑含有 $N$ 个智能体的多智能体系统(10), 通过在系统中部署梯度估计算法(13)和控制算法(12), 可以在有限时间内解决优化问题(11):

$$\begin{cases} u_{x,i}(t) = \\ \begin{cases} -c_1 \operatorname{sgn}(\sum_{j=1}^N a_{ij}^r (x_i(t) - x_j(t))), & i \neq r, \\ -c_2 \operatorname{sgn}(\sum_{m=1}^N \varpi_m^r(t)), & i = r, \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

$$\dot{\varpi}_m^i(t) = -\varepsilon_m \operatorname{sgn}(\sum_{k=1}^N a_{ik}^m (\varpi_m^i(t) - \varpi_m^k(t))), \quad (13)$$

其中:  $\varpi_m^m(t) = \nabla f_m(x_m(t)) (m = 1, 2, \dots, N)$ ,  $r$  是 1 到  $N$  中的任意固定常数,  $a_{ij}^r$  是  $\mathcal{G}_r$  的邻接矩阵  $A_r$  的第  $i$  行第  $j$  列元素,  $a_{ik}^m$  是  $\mathcal{G}_m$  的邻接矩阵  $A_m$  的第  $i$  行第  $k$  列元素. 算法的参数需要满足  $c_1 > c_2 \times \sum_{i=1}^N a_{ir}^r$ ,  $c_2 > 0$ ,  $\varepsilon_m > \bar{\mu}_m c_{\max} \times \sum_{i=1}^N a_{im}^m$ , 其中  $c_{\max}$  表示  $\max\{c_1, c_2\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

**证** 本定理的证明分为如下3部分: 包括有限时间梯度估计器(13)收敛性的证明, 式(12)的一致性证明以及全局优化(11)的证明.

**步骤 1** 有限时间梯度估计器(13). 首先定义如下

$$e_{\varpi_m}(t) = \varpi_m(t) - 1^N \otimes \nabla f_m(x_m(t)), \quad (14)$$

其中: 梯度估计向量  $\varpi_m(t) = [\varpi_m^1(t) \ \varpi_m^2(t) \ \dots \ \varpi_m^N(t)]^T$ , 梯度估计与真实梯度  $\nabla f_m(x_m(t))$  之间的误差向量  $e_{\varpi_m}(t) = [e_{\varpi_m}^1(t) \ e_{\varpi_m}^2(t) \ \dots \ e_{\varpi_m}^N(t)]^T$ . 定义  $\delta_m(t) = [\delta_m^1(t) \ \delta_m^2(t) \ \dots \ \delta_m^N(t)]^T = L_m e_{\varpi_m}(t)$ , 则可得

$$\delta_m(t) = L_m e_{\varpi_m}(t) = L_m \varpi_m(t). \quad (15)$$

很明显, 向量  $e_{\varpi_m}(t)$  的第  $m$  个元素  $e_{\varpi_m}^m(t)$  和向量  $\delta_m(t)$  的第  $m$  个元素  $\delta_m^m(t)$  都是 0. 此外, 根据式(13)和式(15)可得

$$\dot{\delta}_m(t) = -\varepsilon_m L_m (\text{sgn}(\delta_m(t)) + \phi_m(t)), \quad (16)$$

其中  $\phi_m(t) = [\phi_m^1(t) \ \phi_m^2(t) \ \dots \ \phi_m^N(t)]^T$ , 且每个元素的取值如下:

$$\phi_m^i(t) = \begin{cases} \frac{\nabla^2 f_m(x_m(t)) \times \dot{x}_m(t)}{-\varepsilon_m}, & i = m, \\ 0, & i \neq m. \end{cases} \quad (17)$$

定义Lyapunov函数如下:

$$V(\delta_m(t)) = \sum_{i=1, i \neq m}^N |\delta_m^i(t)|, \quad (18)$$

故可得

$$\dot{V}(\delta_m(t)) = \sum_{i=1, i \neq m}^N \text{sgn}(\delta_m^i(t)) \dot{\delta}_m^i(t). \quad (19)$$

由于式(19)包含  $\text{sgn}(\delta_m^i(t))$ , 所以 0 不是  $\dot{V}(\delta_m(t))$  的平凡解. 本文定义集合  $\Omega_{\neq} = \{i \in V : \delta_m^i(t) \neq 0\}$  和  $\Omega_0 = \{i \in V : \delta_m^i(t) = 0\}$ , 并在Filippov意义下对非连续微分方程及其解进行讨论. 考虑Lyapunov函数的Clarke广义梯度可得

$$\partial_C V(\delta_m(t)) = w(t)^T, \quad (20)$$

其中  $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \ \dots \ w_N(t)]^T$ , 且每个元素满足

$$w_i(t) = \begin{cases} \text{sgn}(\delta_m^i(t)), & i \in \Omega_{\neq}, \\ \text{SGN}(\delta_m^i(t)), & i \in \Omega_0. \end{cases} \quad (21)$$

由于  $V(\delta_m(t))$  是局部Lipshitz连续的, 故根据引理1得

$$\dot{V}(\delta_m(t)) \in \sum_{i \in \Omega_{\neq}} \text{sgn}(\delta_m^i(t)) \dot{\delta}_m^i(t) + \sum_{i \in \Omega_0} \text{SGN}(\delta_m^i(t)) \dot{\delta}_m^i(t), \quad (22)$$

其中

$$\text{SGN}(\delta_m^i(t)) = \begin{cases} 1, & \delta_m^i(t) > 0, \\ [-1, 1], & \delta_m^i(t) = 0, \\ -1, & \delta_m^i(t) < 0. \end{cases} \quad (23)$$

显然, 若某一  $\delta_m^i(t) = 0$  成立, 则  $\dot{\delta}_m^i(t)$  在Filippov意义下存在且可以取 0. 因此, 式(22)中定义的点的集合均在单点上取值, 且根据引理2可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\delta_m(t)) &\in \sum_{i \in \Omega_{\neq}} \text{sgn}(\delta_m^i(t)) \dot{\delta}_m^i(t) + \sum_{i \in \Omega_0} \text{sgn}(\delta_m^i(t)) \dot{\delta}_m^i(t) = \\ &\sum_{i=1}^N \text{sgn}(\delta_m^i(t)) \dot{\delta}_m^i(t) = \\ &-\varepsilon_m \text{sgn}(\delta_m(t))^T L_m (\text{sgn}(\delta_m(t)) + \phi_m(t)) \leq \\ &-\varepsilon_m \times (1 + \text{sgn}(\delta_m(t))^T L_m \phi_m(t)). \end{aligned} \quad (24)$$

由于

$$\begin{aligned} |\text{sgn}(\delta_m(t))^T L_m \phi_m(t)| &\leq \\ |\text{sgn}(\delta_m(t))^T| \times |L_m \phi_m(t)| &\leq \\ \left( \sum_{i=1}^N a_{im}^m \right) \times \left| \frac{\nabla^2 f_m(x_m(t)) \times \dot{x}_m(t)}{-\varepsilon_m} \right| &\leq \\ \left( \sum_{i=1}^N a_{im}^m \right) \times \frac{\bar{\mu}_m \times c_{\max}}{\varepsilon_m} &< 1, \end{aligned} \quad (25)$$

故

$$\dot{V}(\delta_m(t)) \leq -(\varepsilon_m - \bar{\mu}_m c_{\max} \times \sum_{i=1}^N a_{im}^m) < 0. \quad (26)$$

显然, 当  $\delta_m(t) \neq 0^N$  时,

$$\begin{cases} V(\delta_m(t)) > 0, \\ \dot{V}(\delta_m(t)) \leq -[\varepsilon_m - \bar{\mu}_m c_{\max} \times \sum_{i=1}^N a_{im}^m] \end{cases} \quad (27)$$

成立; 当  $\delta_m(t) = 0^N$  时,

$$\begin{cases} V(\delta_m(t)) = 0, \\ \dot{V}(\delta_m(t)) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

成立. 因此, 当  $\varepsilon_m > \bar{\mu}_m c_{\max} \times \sum_{i=1}^N a_{im}^m$  时, 梯度估计向量的一致性可以在有限时间  $t_{e_{\varpi_m}}$  内实现, 即  $\varpi_m(t) = 1^N \otimes \nabla f_m(x_m(t))$  可以在有限时间  $t_{e_{\varpi_m}}$  内实现, 其中

$$t_{e_{\varpi_m}} \leq \frac{\|L_m e_{\varpi_m}(0)\|_1}{\varepsilon_m - \bar{\mu}_m c_{\max} \times \sum_{i=1}^N a_{im}^m}. \quad (29)$$

**步骤2** 式(12)的一致性. 首先定义如下的状态一致误差向量:

$$e_x(t) = x(t) - 1^N \otimes x_r(t), \quad (30)$$

其中  $e_x(t) = [e_x^1(t) \ e_x^2(t) \ \cdots \ e_x^N(t)]^T$ . 定义  $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_N(t)]^T = L_r x(t)$ , 则可得

$$y(t) = L_r e_x(t) = L_r x(t). \quad (31)$$

很明显, 向量  $e_x(t)$  的第  $r$  个元素  $e_x^r(t)$  和向量  $y(t)$  的第  $r$  个元素  $y_r(t)$  都是0. 此外, 根据式(12)和式(31)可得

$$\dot{y}(t) = -L_r(c_1 \text{sgn}(y(t)) + c_2 \text{sgn}(\varpi(t))), \quad (32)$$

其中  $\varpi(t) = [\varpi_1(t) \ \varpi_2(t) \ \cdots \ \varpi_N(t)]^T$ , 且每个元素的取值如下:

$$\varpi_i(t) = \begin{cases} \sum_{m=1}^N \varpi_m^r(t), & i = r, \\ 0, & i \neq r. \end{cases} \quad (33)$$

定义Lyapunov函数如下:

$$V(y_i(t)) = \sum_{i=1, i \neq m}^N |y_i(t)|, \quad (34)$$

故可得

$$\dot{V}(y_i(t)) = \sum_{i=1, i \neq m}^N \text{sgn}(y_i(t)) \dot{y}_i(t). \quad (35)$$

类似于步骤1, 在Filippov意义下对Lyapunov函数进行分析可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(y_i(t)) &= \\ & -\text{sgn}(y(t))^T L_r \times (c_1 \text{sgn}(y(t)) + c_2 \text{sgn}(\varpi(t))) \leq \\ & -(c_1 + c_2 \times \text{sgn}(y(t))^T L_r \text{sgn}(\varpi(t))). \end{aligned} \quad (36)$$

由于

$$\begin{aligned} |\text{sgn}(y(t))^T L_r \text{sgn}(\varpi(t))| &\leq \\ |\text{sgn}(y(t))^T| \times |L_r \text{sgn}(\varpi(t))| &\leq \sum_{i=1}^N a_{ir}^r, \end{aligned} \quad (37)$$

可知, 当  $y(t) \neq 0^N$  时,

$$\begin{cases} V(y_i(t)) > 0, \\ \dot{V}(y_i(t)) \leq -(c_1 - c_2 \times \sum_{i=1}^N a_{ir}^r) < 0 \end{cases} \quad (38)$$

成立; 当  $y(t) = 0^N$  时,

$$\begin{cases} V(y_i(t)) = 0, \\ \dot{V}(y_i(t)) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

成立. 因此, 当  $c_1 > c_2 \times \sum_{i=1}^N a_{ir}^r$  时, 状态向量的一致性可以在有限时间  $t_{ex}$  内实现, 即  $x(t) = 1^N \otimes x_r(t)$  可以在有限时间  $t_{ex}$  内实现, 其中

$$t_{ex} \leq \frac{\|L_r e_x(0)\|_1}{c_1 - c_2 \times \sum_{i=1}^N a_{ir}^r}. \quad (40)$$

**步骤3** 全局优化式(11). 当  $t \geq \max\{t_{e\varpi_m}, t_{ex}\}$  时, 可知系统的状态向量  $x(t) = 1^N \otimes x_r(t)$  且系统的梯度估计向量  $\varpi_m(t) = 1^N \otimes \nabla f_m(x_m(t))$ , 故此时智能体  $i$  的动力学方程可以写为

$$\dot{x}_i(t) = -c_2 \text{sgn}\left(\sum_{m=1}^N \nabla f_m(x_i(t))\right). \quad (41)$$

定义Lyapunov函数如下:

$$V(x(t)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^N \nabla f_m(x_i(t))\right)^2, \quad (42)$$

故可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \\ & \left(\sum_{m=1}^N \nabla f_m(x_i(t))\right) \left(\sum_{m=1}^N \nabla^2 f_m(x_i(t)) \dot{x}_i(t)\right) \leq \\ & -\left(\sum_{m=1}^N \nabla f_m(x_i(t))\right) \times \\ & \left(\sum_{m=1}^N c_2 \mu \text{sgn}\left(\sum_{k=1}^N \nabla f_k(x_i(t))\right)\right) = \\ & -c_2 \mu N \times \left|\sum_{m=1}^N \nabla f_m(x_i(t))\right| = \\ & -\sqrt{2} c_2 \mu N V^{\frac{1}{2}}(x(t)), \end{aligned} \quad (43)$$

故根据引理3可知定理1提出的算法可以在有限时间  $t \leq \max\{t_{e\varpi_m}, t_{ex}\} + t_{\nabla}$  内实现全局优化, 其中

$$t_{\nabla} \leq \frac{\sqrt{2} V^{1/2}(x(0))}{c_2 \mu N}. \quad (44)$$

证毕.

**注3** 定理1中提出了一种新的有限时间分布式优化算法, 该算法适用于强连通的有向图. 首先分布式梯度估计算法(13)会在有限时间  $t_{e\varpi_m}$  内实现对所有代价函数梯度的估计; 此外, 状态向量  $x(t)$  也会在有限时间  $t_{ex}$  内实现状态的一致性; 最后, 当  $t \geq \max\{t_{e\varpi_m}, t_{ex}\}$  时, 系统的状态值会在有限时间内达到全局最优状态  $x^*$ . 因此算法(12)(13)可以解决多智能体系统中的有限时间分布式优化问题.

### 3.2 存在未知高频增益符号的多智能体系统分布式优化算法

接下来将上述算法拓展到控制器输入存在未知高频增益符号的多智能体系统中. 考虑具有如下动力学的多智能体系统:

$$\dot{\varsigma}_i(t) = v_i u_{\varsigma_i}(t), \quad (45)$$

其中:  $\varsigma_i \in \mathbb{R}$  是每个智能体的状态,  $u_{\varsigma_i}$  是控制器输入,  $v_i \in \mathbb{R}$  是符号未知的高频增益.

**假设3** 高频增益  $v_i$  是一个未知常数, 且  $v_i \neq 0$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, N$ .

本节提出的算法可以使具有未知高频增益符号的多智能体系统渐近地实现优化目标, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varsigma_i(t) = \varsigma_i^*, \quad (46)$$

其中 $\zeta^*$ 是唯一的全局最优状态.

**定理 2** 在假设1-3下考虑含有 $N$ 个智能体且具有未知高频增益符号的多智能体系统(45), 采用算法(47)-(51)可以渐近地实现优化目标(46):

$$u_{\zeta,i}(t) = \Theta(\rho_i(t))(\bar{c}_3\psi_i(t) - \dot{z}_i(t)), \quad (47)$$

$$\dot{\rho}_i(t) = \psi_i(t)(\bar{c}_3\psi_i(t) - \dot{z}_i(t)), \quad (48)$$

$$\psi_i(t) = \zeta_i(t) - z_i(t), \quad (49)$$

$$\dot{z}_i(t) = \begin{cases} -\bar{c}_1 \operatorname{sgn}(\sum_{j=1}^N a_{ij}^r(z_i(t) - z_j(t))), & i \neq r, \\ -\bar{c}_2 \operatorname{sgn}(\sum_{m=1}^N \varpi_m^r(t)), & i = r, \end{cases} \quad (50)$$

$$\dot{\varpi}_m^i(t) = -\bar{\varepsilon}_m \operatorname{sgn}(\sum_{k=1}^N a_{ik}^m(\varpi_m^i(t) - \varpi_m^k(t))), \quad (51)$$

其中:  $\varpi_m^i(t) = \nabla f_m(x_m(t))$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ),  $r$ 是1到 $N$ 中的任意固定常数,  $a_{ij}^r$ 是 $\mathcal{G}_r$ 的邻接矩阵 $A_r$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素,  $a_{ik}^m$ 是 $\mathcal{G}_m$ 的邻接矩阵 $A_m$ 的第 $i$ 行第 $k$ 列元素. 算法的参数需要满足 $\bar{c}_1 > \bar{c}_2 \times \sum_{i=1}^N a_{ir}^r$ ,  $\bar{c}_2 > 0$ ,  $\bar{c}_3 > 0$ ,  $\bar{\varepsilon}_m > \bar{\mu}_m \bar{c}_{\max} \times \sum_{i=1}^N a_{im}^m$ , 其中 $\bar{c}_{\max}$ 表示 $\max\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

**证** 根据定理1的证明可知式(50)-(51)可以在有限时间 $t_z$ 内实现如下等式:

$$\lim_{t \rightarrow t_z} z_i(t) = z^*, \quad (52)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $z^*$ 满足式(11)是全局最优状态值. 定义Lyapunov函数如下:

$$V(\psi_i(t)) = \frac{1}{2}(\psi_i(t))^2 \geq 0, \quad (53)$$

很明显, 当且仅当 $\psi_i(t) = 0$ 时 $V(\psi_i(t)) = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(\psi_i(t)) &= \psi_i(t)\dot{\psi}_i(t) = \\ &= \psi_i(t)(\dot{\zeta}_i(t) - \dot{z}_i(t)) = \\ &= \psi_i(t)v_i\Theta(\rho_i(t))(\bar{c}_3\psi_i(t) - \dot{z}_i(t)) - \psi_i(t)\dot{z}_i(t) = \\ &= v_i\Theta(\rho_i(t))\dot{\rho}_i(t) + \dot{\rho}_i(t) - \bar{c}_3(\psi_i(t))^2 \leq \\ &= (v_i\Theta(\rho_i(t)) + 1)\dot{\rho}_i(t), \end{aligned} \quad (54)$$

根据引理5可知,  $V(\psi_i(t))$ ,  $\rho_i(t)$ 和 $\int_0^t (v_i\Theta(\rho_i(\tau)) + 1)\dot{\rho}_i(\tau)d\tau$ 都是有界的, 故可知 $\psi_i(t)$ 和 $\int_0^t (\psi_i(\tau))^2 d\tau$ 有界. 又因 $\psi_i(t)$ 有界, 故根据式(47)可知 $\dot{\zeta}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ , 进一步可得 $\dot{\psi}_i(t) = \dot{\zeta}_i(t) - \dot{z}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ . 综上可知 $\psi_i(t)$ ,  $\dot{\psi}_i(t)$ 以及 $\int_0^t (\psi_i(\tau))^2 d\tau$ 在区间 $[0, \infty)$ 上均有界, 故根据Barbalat引理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t) = 0$ . 由于 $t \geq t_z = \max\{t_{e\varpi_m}, t_{ex}\} + t_\nabla$ 时 $z_i(t) = z^*$ , 且 $t \rightarrow \infty$ 时 $\psi_i(t) = 0$ , 故可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t) = \zeta^* = z^*, \quad (55)$$

即算法(47)-(51)可以渐近地实现优化目标(46).

证毕.

**注 4** 定理2中提出的算法可以解决含有未知高频增益符号的多智能体系统分布式优化问题, 该算法同样适用于强连通的有向图. 首先算法(50)-(51)可以在有限时间内生成一个参考信号 $z^*$ , 然后设计了一个渐近时间控制算法(47)来跟踪参考信号, 使得(49)定义的系统状态值与参考信号的误差渐近收敛到0, 从而实现含有未知高频增益符号的多智能体系统的全局优化目标(46).

## 4 数值仿真

本节给出了定理1-2的仿真实例. 仿真采用的多智能体系统的网络拓扑如图1所示, 智能体的代价函数 $f_i(x_i)$ 分别为

$$f_1(x_1) = x_1^2 + 11x_1 + 3,$$

$$f_2(x_2) = 3x_2^2 + 2x_2,$$

$$f_3(x_3) = \frac{2x_3^2}{\sqrt{x_3^2 + 5}},$$

$$f_4(x_4) = x_4^2 + x_4 + 10,$$

$$f_5(x_5) = 3x_5^2 + \ln(x_5^2 + 1),$$

$$f_6(x_6) = x_6^2 + 3e^{0.5x_6},$$

$$f_7(x_7) = \ln(x_7^2 + 1) + 2x_7^2,$$

$$f_8(x_8) = 2x_8^2 - 3x_8 + 8.$$

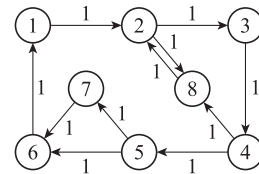


图1 多智能体系统网络拓扑图

Fig. 1 The network topology of MASs

### 4.1 定理1数值仿真

本小节对定理1中提出的分布式优化算法进行了仿真, 参数设置为 $c_1 = 2.5$ ,  $c_2 = 1$ ,  $\varepsilon_m = 15$  ( $m = 1, 2, \dots, 8$ ),  $r = 1$ , 状态向量 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_8(t)]^T$ 的初值设置为 $x(0) = [8 \ -5.9 \ -8.9 \ 2.8 \ -3.1 \ 4.5 \ -2.7 \ -10]^T$ , 梯度估计向量 $\varpi_m(t) = [\varpi_m^1(t) \ \varpi_m^2(t) \ \dots \ \varpi_m^8(t)]^T$  ( $m = 1, 2, \dots, 8$ )的初值均设置为 $\varpi_m(0) = [8.7 \ -10 \ -3.7 \ 0.7 \ -5.5 \ 6.9 \ -6.6 \ 9.8]^T$ . 在网络模型图1和上述参数设置下对定理1中的算法进行验证, 图2给出了每个智能体的状态值 $x_i(t)$ 的状态轨迹, 图3-6给出了每个代价函数梯度估计器的轨迹曲线, 每个智能体对全部代价函数梯度估计的和的曲线由图7给出, 其中 $i = 1, 2, \dots, 8$ .

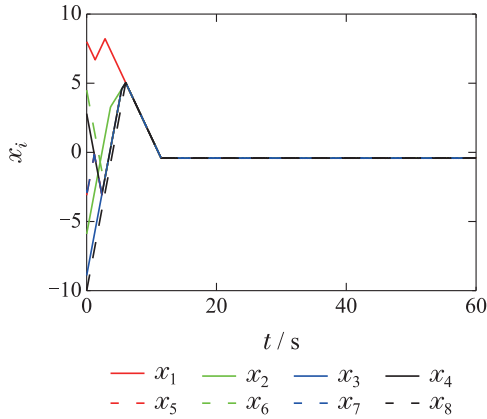


图 2 多智能体系统中每个智能体的状态  $x_i(t)$   
Fig. 2 The trajectory of state  $x_i(t)$  of each agent  $i$

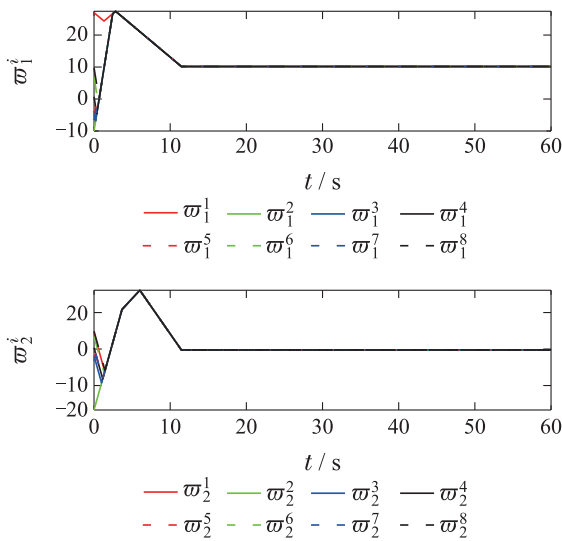


图 3 每个智能体  $i$  对代价函数  $f_1$  和  $f_2$  的梯度估计  
Fig. 3 The gradient estimations of cost function  $f_1$  and  $f_2$  for each agent  $i$

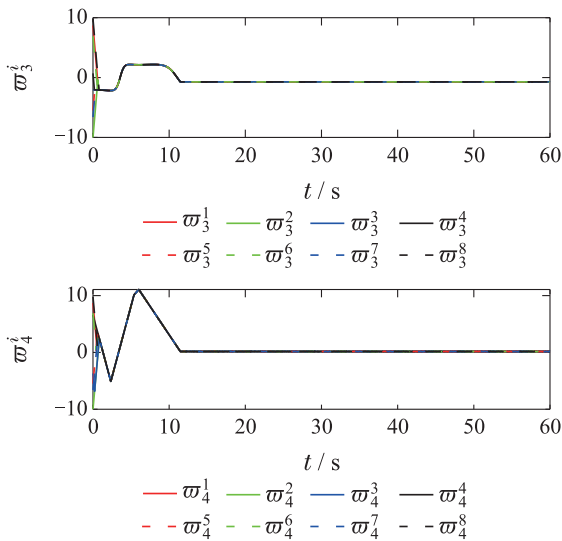


图 4 每个智能体  $i$  对代价函数  $f_3$  和  $f_4$  的梯度估计  
Fig. 4 The gradient estimations of cost function  $f_3$  and  $f_4$  for each agent  $i$

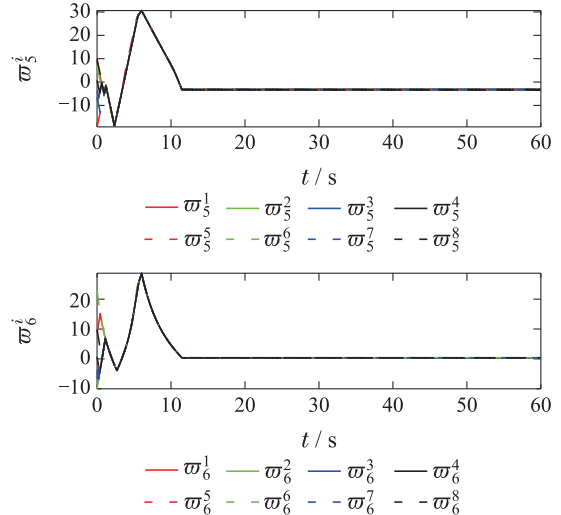


图 5 每个智能体  $i$  对代价函数  $f_5$  和  $f_6$  的梯度估计  
Fig. 5 The gradient estimations of cost function  $f_5$  and  $f_6$  for each agent  $i$

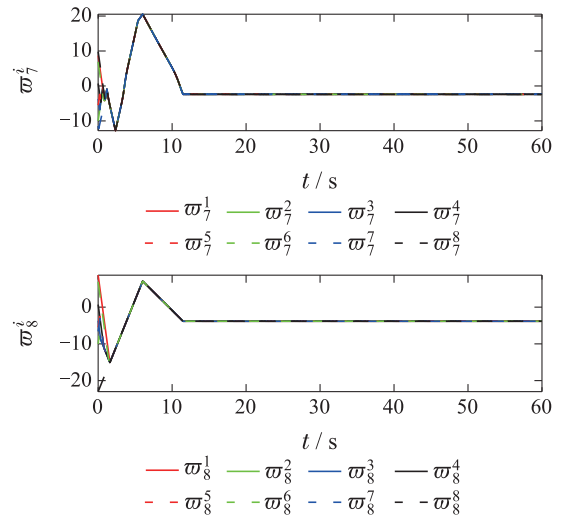


图 6 每个智能体  $i$  对代价函数  $f_7$  和  $f_8$  的梯度估计  
Fig. 6 The gradient estimations of cost function  $f_7$  and  $f_8$  for each agent  $i$

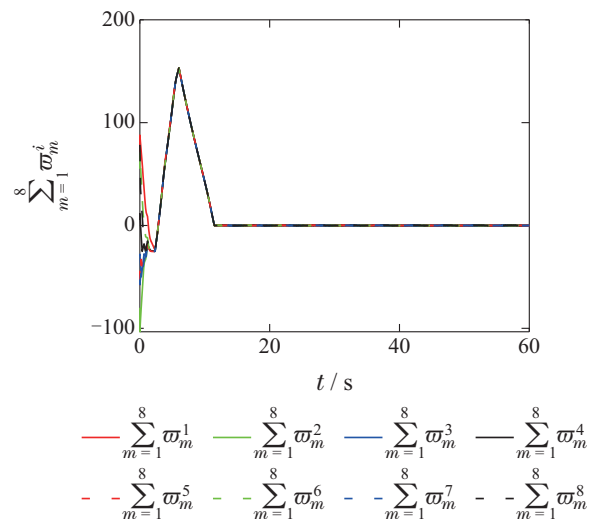


图 7 每个智能体  $i$  对所有代价函数的梯度估计和  
Fig. 7 The sum of gradient estimations of all cost functions for each agent  $i$

由仿真结果图2-6可知,所有智能体的状态 $x_i(t)$ 在最优状态值 $x^*$ 处达到了一致,每一组梯度估计向量 $\varpi_m(t)$ 也达到了一致.此外,由图7可知,每个智能体 $i$ 对全部代价函数梯度估计的和均收敛到0,该结果也印证了 $x^*$ 即为全局最优状态值.

#### 4.2 定理2数值仿真

本小节对定理2中提出的分布式优化算法进行了仿真,其中 $\bar{c}_1 = 2.3, \bar{c}_2 = 0.8, \bar{c}_3 = 0.3, \bar{\varepsilon}_m = 15$  ( $m = 1, 2, \dots, 8$ ),  $r = 1$ , 未知高频增益符号 $v = [-1 \ 1.5 \ 2.1 \ -1.7 \ -3.1 \ 3.3 \ 1.9 \ 0.6 \ 2.9]^T$ , 向量 $\zeta(t) = [\zeta_1(t) \ \zeta_2(t) \ \dots \ \zeta_8(t)]^T$ 的初值设置为 $\zeta(0) = [-7.7 \ 5.6 \ 9.9 \ -2.5 \ 3.7 \ -4.8 \ -5.6 \ -10]^T$ , 向量 $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_8(t)]^T$ 的初值设置为 $z(0) = [-7 \ 5.2 \ -3.9 \ 6.6 \ -6.3 \ 9.5 \ -9.7 \ 2]^T$ , 梯度估计向量 $\varpi_m(t) = [\varpi_m^1(0) \ \varpi_m^2(0) \ \dots \ \varpi_m^8(0)]^T$  ( $m = 1, 2, \dots, 8$ )的初值均设置为 $\varpi_m(0) = [6.3 \ -9.8 \ -5.5 \ 0.9 \ 8.9 \ -10 \ -2.5 \ 9.3]^T$ . 在网络模型图1和上述参数设置下对定理2中的算法进行验证,图8给出了每个智能体的参考状态 $z_i(t)$ 的状态轨迹,图9-10给出了Nussbaum类型函数 $\Theta(\rho_i(t)) = e^{\rho_i^2(t)} \cos(\rho_i(t))$ 及其参数 $\rho_i(t)$ 的曲线,  $\zeta_i(t)$ 和 $\psi_i(t)$ 的曲线分别由图11和图12给出,其中 $i = 1, 2, \dots, 8$ .

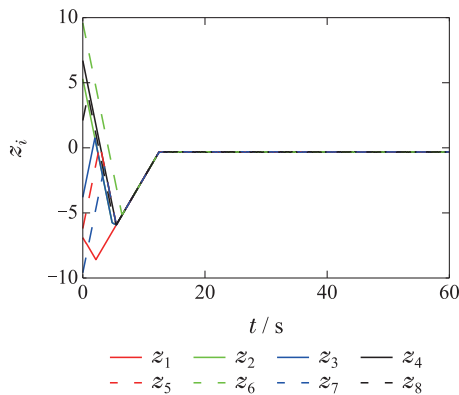


图8 多智能体系统中每个智能体的参考状态 $z_i(t)$

Fig. 8 The trajectory of reference state  $z_i(t)$  of each agent  $i$

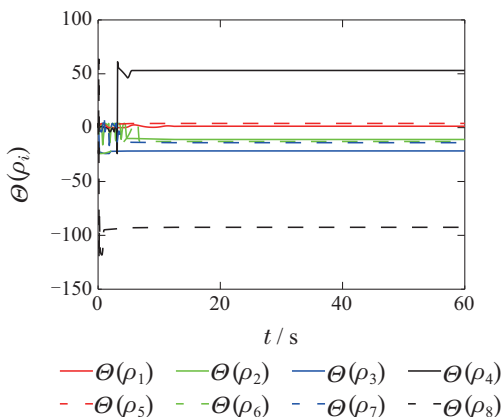


图9 每个智能体 $i$ 的Nussbaum类型函数 $\Theta(\rho_i(t))$

Fig. 9 The trajectory of Nussbaum-type function  $\Theta(\rho_i(t))$  for each agent  $i$

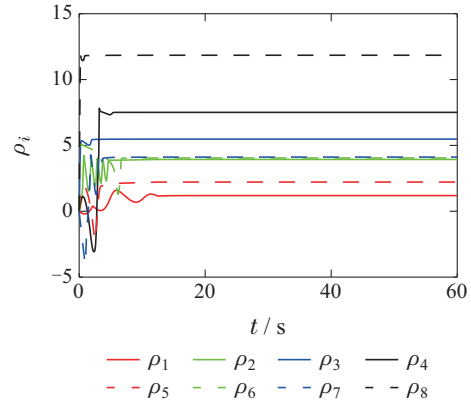


图10 每个智能体 $i$ 的Nussbaum类型函数的参数 $\rho_i(t)$

Fig. 10 The trajectory of the parameter  $\rho_i(t)$  of Nussbaum-type function  $\Theta(\rho_i(t))$  for each agent  $i$

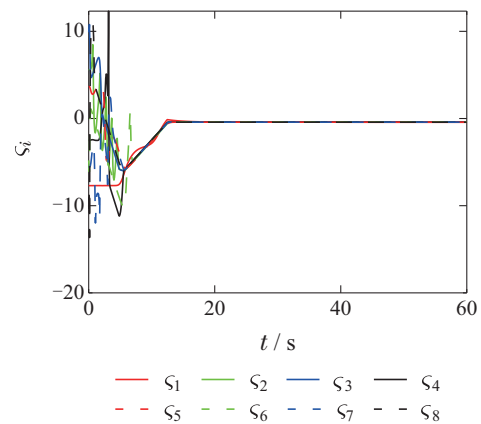


图11 多智能体系统中每个智能体的状态 $\zeta_i(t)$

Fig. 11 The trajectory of state  $\zeta_i(t)$  of each agent  $i$

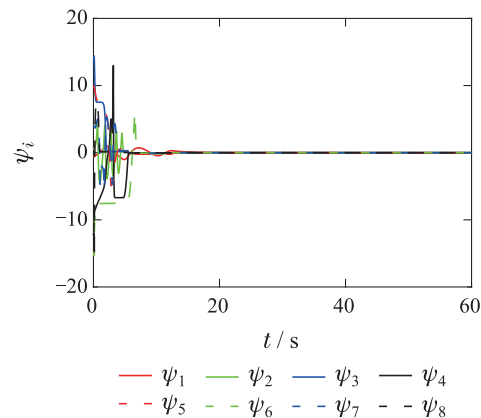


图12 多智能体系统中每个智能体的状态 $\psi_i(t)$

Fig. 12 The trajectory of state  $\psi_i(t)$  of each agent  $i$

由仿真结果图8可知,所有智能体的参考状态 $z_i(t)$ 一致收敛到了最优状态值 $z^*$ .此外,图9-12表明了每个Nussbaum类型函数 $\Theta(\rho_i(t))$ 及其参数 $\rho_i(t)$ 均收敛到了常数值,且每个智能体的状态 $\psi_i(t)$ 在0处达到一致,这意味着每个智能体的状态 $\zeta_i(t)$ 也收敛到了最优状态值 $\zeta^* = z^*$ .

## 5 结论

本文研究了一阶多智能体系统中的有限时间分布



式优化问题. 首先, 基于非光滑分析和Lyapunov稳定性理论设计了一个有限时间分布式梯度估计器, 然后, 提出了一种基于梯度估计器的有限时间分布式优化算法. 该算法可以在具有强连通拓扑的多智能体系统中实现智能体状态的全局最优化, 放宽了对系统网络拓扑的限制. 此外, 本文还解决了含有未知高频增益符号的多智能体系统分布式优化问题. 最后, 通过仿真对新提出的两种分布式优化算法进行了验证, 实验结果也证明了算法的有效性.

### 参考文献:

- [1] MOZAFFARI M, SAAD W, BENNIS M, et al. Wireless communication using unmanned aerial vehicles (UAVs): Optimal transport theory for hover time optimization. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2017, 16(12): 8052 – 8066.
- [2] WU L, CAI H. Energy-efficient adaptive sensing scheduling in wireless sensor networks using fibonacci tree optimization algorithm. *Sensors*, 2021, 21(15): 5002.
- [3] VARAGNOLO D, ZANELLA F, CENEDESE A, et al. Newton-raphson consensus for distributed convex optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(4): 994 – 1009.
- [4] GUO F, WEN C, MAO J, et al. Distributed economic dispatch for smart grids with random wind power. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2016, 7(3): 1572 – 1583.
- [5] ZHAO T, DING Z. Distributed finite-time optimal resource management for microgrids based on multi-agent framework. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(8): 6571 – 6580.
- [6] ZHANG W, TANG Y, HUANG T, et al. Sampled-data consensus of linear multi-agent systems with packet losses. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(11): 2516 – 2527.
- [7] LIU J, CHEN W. Distributed convex optimisation with event-triggered communication in networked systems. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(16): 3876 – 3887.
- [8] LI Z, DING J, SUN J, et al. Distributed adaptive convex optimization on directed graphs via continuous-time algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(5): 1434 – 1441.
- [9] ZHAO Zhongyuan, CHEN Gang. Distributed event-triggered algorithm for quadratic convex optimization problem. *Control and Decision*, 2019, 34(8): 1635 – 1644  
(赵中原, 陈刚. 基于事件驱动的二次凸优化问题分布式优化算法. *控制与决策*, 2019, 34(8): 1635 – 1644.)
- [10] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.
- [11] HENDRICKX J M, SHI G, JOHANSSON K H. Finite-time consensus using stochastic matrices with positive diagonals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(4): 1070 – 1073.
- [12] SONG Y, CHEN W. Finite-time convergent distributed consensus optimisation over networks. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(11): 1314 – 1318.
- [13] LIN P, REN W, FARRELL J A. Distributed continuous-time optimization: Nonuniform gradient gains, finite-time convergence, and convex constraint set. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(5): 2239 – 2253.
- [14] HU Z, YANG J. Distributed finite-time optimization for second-order continuous-time multiple agents systems with time-varying cost function. *Neurocomputing*, 2018, 28(7): 173 – 184.
- [15] CHERUKURI A, CORTES J. Distributed coordination of ders with storage for dynamic economic dispatch. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(3): 835 – 842.
- [16] NING B, HAN Q, ZUO Z. Distributed optimization of multiagent systems with preserved network connectivity. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(11): 3980 – 3990.
- [17] WANG Q, PSILLAKIS H E, SUN C. Adaptive cooperative control with guaranteed convergence in time-varying networks of nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(12): 5035 – 5046.
- [18] WANG Q, PSILLAKIS H E, SUN C. Cooperative control of multiple agents with unknown high-frequency gain signs under unbalanced and switching topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(6): 2495 – 2501.
- [19] WANG Q, SUN C. Adaptive consensus of multiagent systems with unknown high-frequency gain signs under directed graphs. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(6): 2181 – 2186.
- [20] CLARKE F. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: Wiley-Interscience, 1983.
- [21] PADEN B, SASTRY S. A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1987, 34(1): 73 – 82.
- [22] FRANCESCHELLI M, PISANO A, GIUA A, et al. Finite-time consensus with disturbance rejection by discontinuous local interactions in directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(4): 1133 – 1138.
- [23] HONG Y, HUANG J, XU Y. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305 – 309.
- [24] TAO G. A simple alternative to the Barbalat lemma. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(5): 698.
- [25] NUSSBAUM R. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(5): 243 – 246.
- [26] REZA S, WANG W. Distributed adaptive FBC of uncertain nonaffine multiagent systems preceded by unknown input nonlinearities with unknown gain sign. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(8): 3036 – 3046.

### 作者简介:

朱文博 博士研究生, 目前研究方向为多智能体系统分布式优化, E-mail: wb.zhu@seu.edu.cn;  
王庆领 副教授, 目前研究方向为多智能体系统自适应控制、分布式协同控制, E-mail: qlwang@seu.edu.cn.