第 40 卷第 6 期
2023 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 40 No. 6
Jun. 2023

李雅普诺夫函数优化: 正交矩阵构造方案

刘秀翀†, 王占山

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 本文研究了李雅普诺夫函数的优化问题. 提出了一种正交矩阵构造方案, 用于求解黎卡提不等式中的最优李雅普诺夫函数. 通过分析系统H_∞范数的几何特征, 本文将黎卡提不等式转换为近似等式, 进而给出了最优李雅普诺夫函数的存在条件. 基于所给最优李雅普诺夫函数存在条件, 所提正交矩阵构造方案利用旋转变换, 将非线性方程组的求解问题转换为幅值和角度的线性优化问题, 进而实现李雅普诺夫函数参数的优化. 研究结果弥补了目前的研究无法求解最优李雅普诺夫函数的不足, 对系统性能分析和非保守控制的设计具有建设性. 算例验证了所提正交矩阵构造方案的有效性.

关键词: 李雅普诺夫函数; 黎卡提不等式; 线性系统; 鲁棒稳定性; H_∞范数

引用格式: 刘秀翀, 王占山. 李雅普诺夫函数优化: 正交矩阵构造方案. 控制理论与应用, 2023, 40(6): 1097 – 1104

DOI: 10.7641/CTA.2022.11217

Lyapunov function optimization: an orthogonal matrix construction scheme

LIU Xiu-chong†, WANG Zhan-shan

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: This paper focuses on the Lyapunov function optimization problem. An orthogonal matrix construction scheme is proposed to solve the optimal Lyapunov function in the Riccati inequality. By analyzing the geometric characteristics of the system H_∞ norm, this paper transforms the Riccati inequality into an approximate equation, and gives the existence condition of the optimal Lyapunov function. Based on the given optimal Lyapunov function existence condition, the proposed orthogonal matrix construction scheme transforms the problem of solving nonlinear equations into a linear optimization problem of the amplitude and phase angle by using the rotation transformation, and realizes the Lyapunov function parameter optimization. The research result makes up for the deficiency in the current researches that the optimal Lyapunov function cannot be solved, and therefore is constructive for the system performance analysis and the non-conservative controller design. The effectiveness of the proposed orthogonal matrix construction scheme is verified by an example.

Key words: Lyapunov function; Riccati inequality; linear system; robust stability; H_∞ norm

Citation: LIU Xiuchong, WANG Zhanshan. Lyapunov function optimization: an orthogonal matrix construction scheme. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(6): 1097 – 1104

1 引言

在H_∞控制理论的研究中, 李雅普诺夫分析方法被广泛用于系统H_∞性能分析[1]. 然而, 李雅普诺夫分析方法存在一个固有的缺点, 即: 李雅普诺夫函数的选择存在一定的随意性, 进而导致保守的结果. 因此在相关研究中, 学者们一直难以回避一个长期存在的挑战性议题: 如何获得最优的李雅普诺夫函数, 以避免保守的结果.

对于扰动系统, 解决李雅普诺夫函数优化问题的难点在于: 针对黎卡提(Riccati)不等式(或李雅普诺夫方程), 尚没有获得最优李雅普诺夫函数的有效方法[2], 因此保守的结果难以避免. 这是早期研究所面临的困境.

为了摆脱难以求解最优李雅普诺夫函数的困境, 有界实引理给出了一个具有建设性的方案, 即: 将Riccati不等式中的李雅普诺夫函数选择问题转换为状

收稿日期: 2021−12−13; 录用日期: 2022−06−28.

†通信作者. E-mail: liuxiuchong@mail.neu.edu.cn; Tel.: 86 24-83689605.

本文责任编委: 刘志新.

国家自然科学基金项目(61973070)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973070).

态空间的约束优化问题[3]. 基于有界实引理, 线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)类方法被提出, 进而实现了系统H_∞范数估计和控制方案的优化[4–6]. 总的来说, LMI类方法巧妙地避开李雅普诺夫函数优化问题, 进而提供了一个较为有效的途径, 以实现低保守性控制器的设计[7–9].

LMI类方法的本质是将非线性的Riccati不等式条件转换为线性的矩阵不等式条件, 进而使约束条件具有可解性. 然而, 这种转换并未改变约束条件的性质(即基于不等式条件无法求解最优李雅普诺夫函数). 事实上, 不等式条件只是李雅普诺夫函数的存在条件. 只有将不等式约束条件转换为关于最优李雅普诺夫函数的等式条件(或近似等式条件), 才能求解最优李雅普诺夫函数. 因此, LMI类方法只能给出李雅普诺夫函数的可行解, 而不是最优解. 目前, 学者们在LMI类方法的进一步研究中不断取得进展[10–12]. 然而, 李雅普诺夫函数优化问题并未解决, 因此保守的结果仍然无法避免.

为了克服目前研究的局限性, 需解决以下难点:

1) 如何将不等式条件转换为关于最优李雅普诺夫函数的等式条件(或近似等式条件);

2) 如何基于所得非线性的等式条件(或近似等式条件), 求解最优李雅普诺夫函数.

针对上述难点, 文献[13]给出了一种基于Riccati不等式的李雅普诺夫函数直接优化方法. 这种方法充分利用了二阶方阵特征值分解的特点, 通过状态空间转换, 构造出可求解最优李雅普诺夫函数的近似等式条件. 然而, 这种方法难以推广到三阶以上系统. 原因在于: 针对三阶以上系统, 采用这种状态空间转换, 无法构造出文献[13]中最优李雅普诺夫函数求解方法所需要的矩阵结构. 因此针对高阶系统, 李雅普诺夫函数优化问题仍未解决.

本文针对李雅普诺夫函数优化问题, 提出了一种正交矩阵构造方案. 该方案以分析系统H_∞范数的几何特征为基础, 将Riccati不等式转换为关于最优李雅普诺夫函数的近似等式条件. 基于所给近似等式条件, 所提正交矩阵构造方案利用正交矩阵特征值分解的特点, 通过旋转变换, 将非线性方程组的求解问题转换为幅值和角度的线性优化问题, 进而给出最优李雅普诺夫函数的求解方法, 解决了高阶系统无法求解最优李雅普诺夫函数的难题. 本文的特点在于:

1) 所提的正交矩阵构造方案为获得最优李雅普诺夫函数提供了一种新颖的途径;

2) 与LMI类方法相比, 所提正交矩阵构造方案能给出更精确(或适合)的李雅普诺夫函数用于系统性能分析. 因此, 所提方案对于系统性能的精确分析和非保守控制器的设计具有建设性.

2 问题描述

考虑扰动系统

$$\dot{x} = Ax + Bw, \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$; A为Hurwitz矩阵; $w \in \mathbb{R}^n$为扰动输入; $\|w\| \leqslant \epsilon$, ϵ为常数, $\|w\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} w_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

令李雅普诺夫函数为

$$V = x^{\mathrm{T}} P^{-1} x, \tag{2}$$

其中P为正定矩阵, 则系统H_∞范数为

$$\gamma_{\|G\|_\infty} = \sup \frac{\|x\|}{\|w\|} < \gamma, \tag{3}$$

其中γ满足Riccati不等式

$$A^{\mathrm{T}} P^{-1} + P^{-1} A + \gamma^{-2} P^{-1} B B^{\mathrm{T}} P^{-1} + I < 0, \tag{4}$$

I为单位阵.

本文研究的问题是如何求解最优李雅普诺夫函数(即求解P矩阵), 使Riccati不等式中的γ最小化.

注 1 对于$\dot{x} = Ax + \bar{B}w$描述的系统, $\mathrm{rank}(\bar{B}) \leqslant n$. 可令$\bar{B} = \Theta_{B1} \cdot \mathrm{diag}\{b_1, \cdots, b_n\} \cdot \Theta_{B2}$, 其中$\Theta_{B1}$和$\Theta_{B2}$为酉矩阵, 并且当$\bar{B}$为实矩阵时, Θ_{B1}和Θ_{B2}为正交矩阵. 令$B = \Theta_{B1} \cdot \mathrm{diag}\{b_1 + \bar{\varepsilon}_1, \cdots, b_n + \bar{\varepsilon}_n\} \cdot \Theta_{B2}$, 其中$\bar{\varepsilon}_i$取值为: 当$b_i \neq 0$时, $\bar{\varepsilon}_i = 0$; 当$b_i = 0$时, $\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}$; $\bar{\varepsilon} \to 0$. 则系统$\dot{x} = Ax + \bar{B}w$与系统(1)的H_∞范数近似一致. 不失一般性, 对于系统(1), 可令$\mathrm{rank}(B) = n$.

3 H_∞范数分析

根据式(1)–(2), 得

$$\dot{V} = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} P^{-1} + P^{-1} A)x + w^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P^{-1} x + x^{\mathrm{T}} P^{-1} B w. \tag{5}$$

根据式(5), 图1给出系统H_∞范数的估计原理.

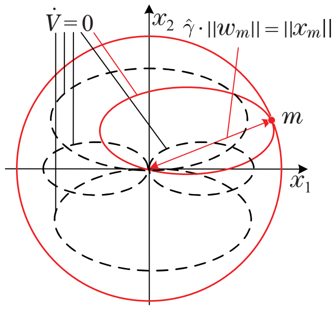

图 1 系统H_∞范数估计

Fig. 1 The system H_∞ norm estimation

对于系统(1)的H_∞范数估计, 选择一个式(2)描述的李雅普诺夫函数(或P), 则根据式(5), $\dot{V} = 0$描述的图形(即椭圆)如图1所示. 当选择某一P时, 图1展现了在$w^{\mathrm{T}} w = \epsilon^2$条件下, 不同$w$所对应的$\dot{V} = 0$的图形(图1中的各椭圆). 根据图1, 基于所选李雅普诺夫函数(或P), 得到的H_∞范数估计为$\hat{\gamma} = \|x_m\| / \|w_m\|$.

显然, 由于选择P的随意性, 这一估值会保守.

当所选P不恰当时, 状态真实上界$\sup\|x\|$小于所得m点对应的$\|x_m\|$, 则由式(3)可得, $\gamma_{\|G\|_\infty}<\hat{\gamma}$, 因此$H_\infty$范数估计存在保守性. 当所选$P$恰当时, 状态真实上界$\sup\|x\|$等于所得$m$点对应的$\|x_m\|$, 则由式(3)可得, $\gamma_{\|G\|_\infty}=\hat{\gamma}$, 因此$H_\infty$范数估计是准确的.

基于以上分析, 当所选P恰当时, 精确的H_∞范数估计满足以下条件(如图1所示):

$$\begin{cases}\dot{V}=0,\\ x_m^{\mathrm{T}}x_m=\bar{\gamma}^2w_m^{\mathrm{T}}w_m=\gamma^2_{\|G\|_\infty}w_m^{\mathrm{T}}w_m,\end{cases}\tag{6}$$

其中$\|x_m\|=\sup\|x\|$. 这是基于LMIs或Riccati不等式, 实现系统H_∞范数精确估计的基础.

根据式(5)–(6), 可得(类似于LMI的构造)

$$\begin{aligned}&\dot{V}+x_m^{\mathrm{T}}x_m-\bar{\gamma}^2w_m^{\mathrm{T}}w_m=0=\\&x_m^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P^{-1}+P^{-1}A+I+\bar{\gamma}^{-2}P^{-1}BB^{\mathrm{T}}P^{-1})x_m-\\&\bar{\gamma}^2(w_m-\bar{\gamma}^{-2}B^{\mathrm{T}}P^{-1}x_m)^{\mathrm{T}}(w_m-\bar{\gamma}^{-2}B^{\mathrm{T}}P^{-1}x_m),\end{aligned}\tag{7}$$

其中$\|x_m\|=\sup\|x\|$. 下面进一步分析式(7).

如果$w_m\neq\bar{\gamma}^{-2}B^{\mathrm{T}}P^{-1}x_m$, 则由式(7), 得

$$\begin{aligned}&x_m^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P^{-1}+P^{-1}A+I+\\&\bar{\gamma}^{-2}P^{-1}BB^{\mathrm{T}}P^{-1})x_m>0.\end{aligned}\tag{8}$$

考虑式(4)所给黎卡提不等式, 则

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^{-2}I<F=B^{-1}AA^{\mathrm{T}}B^{-\mathrm{T}}-\\B^{-1}(A+P)(A+P)^{\mathrm{T}}B^{-\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{9}$$

因此, 一定存在某一正常数$\varDelta$, 满足

$$\bar{\gamma}^{-2}=\lambda_{\min}(F)-\varDelta<\lambda_{\min}(F),\tag{10}$$

其中$\lambda_{\min}(\cdot)$为矩阵最小特征值. 根据式(10)可知: 由于存在无法确定且不趋近于0的正常数$\varDelta$, 无法利用$\lambda_{\min}(F)$得到精确的系统H_∞范数估计. 显然, 这与LMI类方法的研究结果矛盾. 对于线性系统, LMI类方法通过对H_∞范数的近似寻优, 能够给出系统H_∞范数$\gamma_{\|G\|_\infty}$的精确的估计[13]. 基于以上分析, 可知: 当所选P恰当时(即P趋近于最优或为最优时),

$$w_m-\bar{\gamma}^{-2}B^{\mathrm{T}}P^{-1}x_m\to0,\tag{11}$$

或$w_m-\bar{\gamma}^{-2}B^{\mathrm{T}}P^{-1}x_m=0$.

根据式(7)(11), 得

$$\begin{aligned}&x_m^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P^{-1}+P^{-1}A+I+\\&\bar{\gamma}^{-2}P^{-1}BB^{\mathrm{T}}P^{-1})x_m\to0.\end{aligned}\tag{12}$$

因此根据式(4)所给黎卡提不等式, 当所选P恰当时(即P趋近于最优时),

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^{-2}I\to F=B^{-1}AA^{\mathrm{T}}B^{-\mathrm{T}}-\\B^{-1}(A+P)(A+P)^{\mathrm{T}}B^{-\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{13}$$

注 2　式(13)是一种关于最优李雅普诺夫函数的近似等式. 该式以黎卡提不等式为基础, 通过深入分析系统H_∞范数, 将黎卡提不等式转换为近似等式. 所给出的近似等式为进一步求解最优李雅普诺夫函数奠定了基础.

根据式(13), 可知: 当所选P恰当时, F为特征值相等的正定矩阵. 因此精确的系统H_∞范数估计满足

$$\hat{\gamma}_{\mathrm{opt}}^{-2}=\max_P[\lambda_{\min}(F)]=\lambda(F),\tag{14}$$

其中: $\lambda(F)=\lambda_1(F)=\cdots=\lambda_n(F)$, $\lambda_i(F)$为矩阵的特征值.

4　正交矩阵构造方案

4.1　最优李雅普诺夫函数的求解条件

根据对称矩阵的特征值分解, 令

$$\varTheta_\varLambda^{\mathrm{T}}\varLambda\varLambda\varTheta_\varLambda=B^{-1}AA^{\mathrm{T}}B^{-\mathrm{T}},\tag{15}$$

其中: $\varLambda$为对角阵, $\varTheta_\varLambda$为正交矩阵. 则由式(13), 得

$$\begin{aligned}&\bar{\gamma}^{-2}I\to\bar{F}=\\&\varLambda\varLambda-\varTheta_\varLambda B^{-1}(A+P)(A+P)^{\mathrm{T}}(\varTheta_\varLambda B^{-1})^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{16}$$

显然, $\varTheta_\varLambda B^{-1}(A+P)(A+P)^{\mathrm{T}}(\varTheta_\varLambda B^{-1})^{\mathrm{T}}$为对角矩阵.

为求解最优李雅普诺夫函数, 引入一个对角矩阵K, 并对实矩阵$K^{-1}\varTheta_\varLambda B^{-1}$进行奇异值分解. 根据矩阵的奇异值分解, 令

$$\varTheta_1D\varTheta_2=K^{-1}\varTheta_\varLambda B^{-1},\tag{17}$$

其中: $\varTheta_1$和$\varTheta_2$为正交矩阵,

$$\begin{cases}K^{-1}=\mathrm{diag}\{k_1,\cdots,k_n\},\\ D=\mathrm{diag}\{d_1,\cdots,d_n\}.\end{cases}\tag{18}$$

则由式(16), 得

$$\begin{aligned}&\bar{\gamma}^{-2}I\to\bar{F}=\\&\varLambda\varLambda-K\varTheta_1D(\tilde{A}+\tilde{P})(\tilde{A}+\tilde{P})^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\varTheta_1^{\mathrm{T}}K,\end{aligned}\tag{19}$$

其中:

$$\tilde{A}=\varTheta_2A\varTheta_2^{\mathrm{T}},\ \tilde{P}=\varTheta_2P\varTheta_2^{\mathrm{T}}.\tag{20}$$

令

$$Q=D(\tilde{A}+\tilde{P}).\tag{21}$$

引理 1　对于系统(1), 其中$\bar{\gamma}=\gamma_{\|G\|_\infty}$为系统$H_\infty$范数. 如果存在$P>0$, 使$\bar{\gamma}^{-2}I\to\bar{F}$, 其中$\bar{F}$由式(19)给出. 则一定存在$K>0$, 使

$$QQ^{\mathrm{T}}\to I,\tag{22}$$

或$QQ^{\mathrm{T}}=I$有实正定对称解P.

证　由式(19)(21), 得

$$\bar{\gamma}^{-2}I\to\bar{F}=\varLambda\varLambda-K\varTheta_1QQ^{\mathrm{T}}\varTheta_1^{\mathrm{T}}K,\tag{23}$$

则

$$K^{-1}(\varLambda\varLambda-\bar{\gamma}^{-2}I)K^{-1}\to\varTheta_1QQ^{\mathrm{T}}\varTheta_1^{\mathrm{T}}.\tag{24}$$

注意到, $QQ^{\mathrm{T}} = \Theta_Q \cdot \mathrm{diag}\{q_1^2, \cdots, q_n^2\} \cdot \Theta_Q^{\mathrm{T}}$, 则

$$K^{-1}(\Lambda\Lambda - \bar{\gamma}^{-2}I)K^{-1} \to$$
$$\Theta_1\Theta_Q \cdot \mathrm{diag}\{q_1^2, \cdots, q_n^2\} \cdot \Theta_Q^{\mathrm{T}}\Theta_1^{\mathrm{T}},$$

其中Θ_Q为正交矩阵. 由于$K^{-1}(\Lambda\Lambda - \bar{\gamma}^{-2}I)K^{-1}$为对角矩阵, 则只有满足下式:

$$\mathrm{diag}\{q_1^2, \cdots, q_n^2\} \to K^{-1}(\Lambda\Lambda - \bar{\gamma}^{-2}I)K^{-1} = I,$$

式(24)才成立. 因此根据引理1条件, 可得结论.

证毕.

注 3 引理1给出了最优李雅普诺夫函数求解条件, 并为进一步求解最优李雅普诺夫函数提供了一个有效的途径.

注 4 引理1通过引入对角矩阵K, 将李雅普诺夫函数优化问题转换为正交矩阵构造问题, 进而解决了文献[13]所给出的方法难以扩展到三阶以上系统的难题.

4.2 正交矩阵构造方法

特性 1 任一n阶方阵Q可分解为对称矩阵R和反对称矩阵J之和, 即

$$Q = R + J,\ R^{\mathrm{T}} = R,\ J^{\mathrm{T}} = -J. \tag{25}$$

基于文献[14], 下面给出反对称矩阵特性.

特性 2 对于反对称矩阵J, 满足

$$\Theta_J^{\mathrm{T}} J \Theta_J = \Lambda_J = \begin{pmatrix} 0 & \upsilon_1 & & & & \\ -\upsilon_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & \upsilon_l & \\ & & & -\upsilon_l & 0 & \\ & & & & & 0_{m\times m} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

其中: Θ_J为正交矩阵, $\upsilon_1, \cdots, \upsilon_l > 0$, $2l + m = n$.

基于特性1和特性2, 下面给出正交矩阵特性.

特性 3 Q为正交矩阵的等价条件是: 存在正交矩阵$\bar{\Theta}$和

$$\bar{\Lambda}_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \upsilon_1 & & & & \\ -\upsilon_1 & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_l & \upsilon_l & \\ & & & -\upsilon_l & \lambda_l & \\ & & & & & I_{m\times m} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

式中: $\lambda_i = \cos\varphi_i$, $\upsilon_i = \sin\varphi_i$, 满足

$$Q = \bar{\Theta}\bar{\Lambda}_Q\bar{\Theta}^{\mathrm{T}}. \tag{28}$$

下面讨论引理1中正交矩阵Q的构造方法.

定理 1 对于引理1中的矩阵Q. 如果存在正交矩阵Θ_R, Θ_J, $\bar{\Theta}$, 以及$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$和$\upsilon_1, \cdots, \upsilon_l$, 使$Q$所分解的对称矩阵$R$和反对称矩阵$J$满足以下条件:

$$\Theta_R^{\mathrm{T}} R \Theta_R = \bar{\Lambda}_R =$$
$$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda_l, 1, \cdots, 1\}, \tag{29}$$
$$\Theta_R = \Theta_J = \bar{\Theta}, \tag{30}$$
$$\lambda_1^2 + \upsilon_1^2 = \cdots = \lambda_l^2 + \upsilon_l^2 = 1, \tag{31}$$

其中$\upsilon_1, \cdots, \upsilon_l$和$\Theta_J$满足式(26), 则$Q$为正交矩阵.

证 根据式(29)–(31), 以及特性1和特性2, 得$Q = \bar{\Theta}\bar{\Lambda}_Q\bar{\Theta}^{\mathrm{T}}$, 其中$\bar{\Lambda}_Q$满足式(27). 因此根据特性3, Q为正交矩阵. 证毕.

注 5 基于对称矩阵和反对称矩阵的特性, 定理1给出了一种正交矩阵构造方案. 注意到, 引理1给出的方法是基于式(22)所得非线性方程组, 求解李雅普诺夫函数参数. 因此定理1本质上是利用旋转变换, 将非线性方程组的求解问题转换为关于空间角度和幅值的线性构造问题.

注 6 根据特性3, 定理1的条件为构造正交矩阵Q的充要条件.

4.3 李雅普诺夫函数参数求解

令

$$\Lambda\Lambda = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}. \tag{32}$$

在给定$\bar{\gamma}$的条件下, 根据式(18)(22)–(23), k_i由下式获得:

$$k_i^{-2} = \sigma_i - \bar{\gamma}^{-2}, \tag{33}$$

其中$i = 1, \cdots, n$. 因此由式(15)(17), 可得D.

根据特性1, 令

$$\tilde{A} = \tilde{A}_R + \tilde{A}_J, \tag{34}$$

其中: $\tilde{A}_R$为对称矩阵, $\tilde{A}_J$为反对称矩阵. 令

$$\bar{P} = [\bar{p}_{ij}] = \tilde{A}_R + \tilde{P}, \tag{35}$$
$$D\tilde{A}_J = E_R + E_J,\ D\bar{P} = \bar{P}_R + \bar{P}_J, \tag{36}$$

其中: E_R和$\bar{P}_R$为对称矩阵, E_J和$\bar{P}_J$为反对称矩阵. 根据式(21)(25)(34)–(36), 得R和J的表达式

$$R = E_R + \bar{P}_R,\ J = E_J + \bar{P}_J, \tag{37}$$

其中: E_R和E_J为常数矩阵, $\bar{P}_R$和$\bar{P}_J$为参数矩阵.

下面讨论如何根据$\bar{\gamma}$, 求解李雅普诺夫函数参数$\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$.

4.3.1 参数初值

根据式(29), 令

$$R = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda_l, 1, \cdots, 1\}, \tag{38}$$

其中$\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$. 则根据式(37)所给$R$中各元素的参数表达式, 得$\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$.

根据式(29)和特性2, 下面给出求解Θ_R, Θ_J, $\bar{\Lambda}_R$和Λ_J(即υ_i)的步骤:

步骤 1 根据得到的$\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$, 应用式(37), 得R

和J;

步骤 2 根据得到的R和式(29), 得Θ_R和$\bar{\Lambda}_R$;

步骤 3 根据得到的J和特性2, 得Θ_J和Λ_J(即υ_i).

根据式(31), 令

$$\hat{\lambda}_i = \begin{cases} 0, & \upsilon_i \geqslant 1, \\ \sqrt{1-\upsilon_i^2}, & \upsilon_i < 1, \end{cases} \quad (1 \leqslant i \leqslant l), \tag{39}$$

并令$\hat{\Theta}_R = \Theta_J$和

$$\hat{\Lambda}_R = \mathrm{diag}\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_l, \hat{\lambda}_l, 1, \cdots, 1\}, \tag{40}$$

则根据式(29), 得

$$\hat{R} = \hat{\Theta}_R \hat{\Lambda}_R \hat{\Theta}_R^{\mathrm{T}}. \tag{41}$$

令$R = \hat{R}$, 则根据式(37)所给R中各元素的参数表达式, 得李雅普诺夫函数参数初值$\bar{P}_{(0)} = [\bar{p}_{(0)ij}]$.

注 7 参数初值求解的目的是给出一个满足式(29)的李雅普诺夫函数参数解, 为进一步得到满足定理1条件的李雅普诺夫函数参数奠定基础.

4.3.2 参数调节策略

根据所得到的李雅普诺夫函数参数$\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$, 应用第4.3.1小节(即参数初值小节)所给出的3个求解步骤, 得到新的Θ_R, Θ_J, $\bar{\Lambda}_R$和Λ_J(即υ_i).

注意到, $QQ^{\mathrm{T}} \to I$(或$QQ^{\mathrm{T}} = I$)有实正定对称解P. 因此采用搜索方式寻找P的数值解. 具体方法为: 通过搜索Θ_R和$\bar{\Lambda}_R$, 调节李雅普诺夫函数参数, 进而满足定理1的条件. 李雅普诺夫函数参数的调节策略为

1) 空间角度调节, 即调节Θ_R, 将Θ_R和Θ_J所描述的空间角度之间的偏差不断缩小, 直到满足式(30);

2) 幅值调节, 即通过配置λ_i, 调节$\bar{\Lambda}_R$, 进而将$\lambda_i^2 + \upsilon_i^2$和1的差值缩小, 直到满足式(31).

空间角度调节是基于Θ_R和Θ_J所描述的空间角度之间的偏差, 调节李雅普诺夫函数参数. 这本质上是一种空间角度搜索方式. 只要空间角度偏差不断缩小, 这种搜索方式就具有收敛性.

幅值调节是基于式(31), 对λ_i进行配置. 注意到, 式(23)给出的$\bar{\gamma}$是非保守的. 因此, 正交矩阵Q的构造不仅应满足式(31), 而且应进一步满足

$$\lambda_1^2 + \upsilon_1^2 = \cdots = \lambda_l^2 + \upsilon_l^2 = \max(\upsilon_1^2, \cdots, \upsilon_l^2) = 1, \tag{42}$$

则对应于$\upsilon_{\max}^2 = \max(\upsilon_1^2, \cdots, \upsilon_l^2)$的$\lambda_i$的期望值为0. 在空间角度调节的基础上, 基于这一原则, 对λ_i进行配置的幅值调节具有收敛性, 原因分析如下.

当式(30)成立时, 如果$\lambda_i^2 + \upsilon_i^2 > 1$, 则$QQ^{\mathrm{T}}$的特征值大于等于1, 因此根据引理1中的式(22)–(24), $\bar{\gamma}^{-2}I - \bar{F}$为半正定矩阵. 这与黎卡提不等式矛盾, 因此这种基于λ_i配置的幅值调节具有缩小$\lambda_i^2 + \upsilon_i^2$和1的差值的能力.

4.3.3 参数调节方案

令$\bar{P}^{k-1} = [\bar{p}_{ij}^{k-1}]$为上一次迭代结果. 应用第4.3.1小节(即参数初值小节)所给出的3个求解步骤, 得到新的Θ_R, Θ_J, $\bar{\Lambda}_R$和Λ_J(即υ_i).

下面分析空间角度调节方法. 注意到,

$$\Theta_R = \Theta_J(\Theta_J^{-1}\Theta_R) = \Theta_J\Theta_{RJ}, \tag{43}$$

其中Θ_{RJ}反映出Θ_R和Θ_J所描述的空间角度之间的偏差. 根据特性3, 有

$$\Theta_{RJ} = \bar{\Theta}_\Lambda \Lambda_\Theta \bar{\Theta}_\Lambda^{\mathrm{T}}, \tag{44}$$

其中: $\bar{\Theta}_\Lambda$为正交矩阵,

$$\Lambda_\Theta = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & & & & \\ -s_1 & c_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & c_{l'} & s_{l'} & \\ & & & -s_{l'} & c_{l'} & \\ & & & & & I_{m' \times m'} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

式中: $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$. 显然, $\theta_1, \cdots, \theta_{l'}$描述了$\Theta_R$和$\Theta_J$的空间角度偏差. 当$\theta_i = 0$时, 式(30)成立.

为了减小Θ_R和Θ_J的空间角度偏差, 令

$$\hat{c}_i = \cos\hat{\theta}_i,\ \hat{s}_i = \sin\hat{\theta}_i,\ \hat{\theta}_i = \alpha_i\theta_i, \tag{46}$$

则根据式(43)–(45), 得空间角度矩阵

$$\hat{\Theta}_R = \Theta_J\hat{\Theta}_{RJ} = \Theta_J(\bar{\Theta}_\Lambda \hat{\Lambda}_\Theta \bar{\Theta}_\Lambda^{\mathrm{T}}). \tag{47}$$

下面分析幅值调节方法. 根据式(42), 将对应于$\upsilon_{\max}^2 = \max(\upsilon_1^2, \cdots, \upsilon_l^2)$的$\lambda_i$配置为0. 基于这一配置原则, 令

$$\hat{\upsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{\rho_J}} \cdot \upsilon_i, \tag{48}$$

其中$\rho_J = \upsilon_{\max}^2 = \max(\upsilon_1^2, \cdots, \upsilon_l^2)$.

根据式(42), 为了减小$\lambda_i^2 + \upsilon_i^2$和1的差值, 令

$$\hat{\lambda}_1^2 + \hat{\upsilon}_1^2 = \cdots = \hat{\lambda}_l^2 + \hat{\upsilon}_l^2 = 1, \tag{49}$$

则可得$\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_l$. 因此根据式(29), 得

$$\hat{\Lambda}_R = \mathrm{diag}\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_l, \hat{\lambda}_l, 1, \cdots, 1\}. \tag{50}$$

根据空间角度调节和幅值调节所得$\hat{\Theta}_R$和$\hat{\Lambda}_R$, 应用式(41), 得$\hat{R}$. 令$R = \hat{R}$, 则根据式(37)所给R中各元素的参数表达式, 得李雅普诺夫函数参数调节结果$\bar{P}^k = [\bar{p}_{ij}^k]$.

给定空间角度偏差上界$\bar{\varepsilon}_\theta$, 并令$\bar{p}_{ij} = \bar{p}_{(0)ij}$. 算法1给出了李雅谱诺夫函数参数求解方法.

算法 1 李雅普诺夫函数参数求解.

步骤 1　将$\bar{p}_{ij}$代入式(37), 得R和J;

步骤 2　由式(29)和特性2, 得$\Theta_R, \Theta_J, \bar{\Lambda}_R, \Lambda_J$和$\upsilon_i$;

步骤 3　根据Θ_R和Θ_J, 由式(43)–(45), 得$\bar{\Theta}_\Lambda$和θ_i;

步骤 4　令$\varepsilon_\theta = \max|\theta_i|$. 若$\varepsilon_\theta < \bar{\varepsilon}_\theta$, 转入步骤10, 否则进入下一步;

步骤 5　给定适当α_i, 则根据式(45)–(47), 得$\hat{\Theta}_R$;

步骤 6　根据所得υ_i, 由式(48)–(50), 得$\hat{\Lambda}_R$;

步骤 7　根据所得$\hat{\Theta}_R$和$\hat{\Lambda}_R$, 应用式(41), 得$\hat{R}$;

步骤 8　根据所得$\hat{R}$, 应用式(37), 得新的参数$\bar{p}_{ij}$;

步骤 9　返回步骤1;

步骤 10　令$\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$, 由式(15)(17)(20)(34)–(35), 得P.

注 8　算法1基于电气工程领域广泛采用的矢量控制思想, 采用第4.3.2小节所给参数调节策略, 利用旋转变换, 实现空间角度和幅值的线性调节, 以保证算法1的收敛性.

注 9　在算法1中, 通过合理选择式(46)中的角度调节系数α_i, 调节空间角度偏差的收敛速度, 进而确保算法的收敛性和快速性. 在算法1的迭代过程中, 如果所选角度调节系数α_i偏小, 空间角度偏差会发生一定程度的振荡; 如果所选角度调节系数α_i偏大, 空间角度偏差的收敛速度将变慢.

5　算例

考虑系统

$$\dot{x} = Ax + Bw = -\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 4 \\ 0 & -1 & 1.5 \end{bmatrix} + w. \tag{51}$$

系统H_∞范数为$\bar{\gamma} = \gamma_{\|G\|_\infty} = 0.87731481$.

根据式(15)(17)(32)(51), 得

$$\Theta_1 = I,\ \Theta_2 = \Theta_\Lambda,\ D = K^{-1}, \tag{52}$$

$$\Lambda\Lambda = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \mathrm{diag}\{19.8842976, 4.4567436, 1.6589588\}. \tag{53}$$

根据式(33)(52)–(53), 由$\bar{\gamma} = 0.87731481$, 得

$$D = \mathrm{diag}\{0.23196264, 0.562766207, 1.66731589\}. \tag{54}$$

因此根据式(15)(20)(34)–(37)(51)–(52), 得

$$R = \begin{bmatrix} \kappa_{11}\bar{p}_{11} & \kappa_{12}\bar{p}_{12} & \kappa_{13}\bar{p}_{13} \\ \kappa_{12}\bar{p}_{12} & \kappa_{22}\bar{p}_{22} & \kappa_{23}\bar{p}_{23} \\ \kappa_{13}\bar{p}_{13} & \kappa_{23}\bar{p}_{23} & \kappa_{33}\bar{p}_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.148144 & -1.665577 \\ 0.148144 & 0 & -0.137209 \\ -1.665577 & -0.137209 & 0 \end{bmatrix}, \tag{55}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\kappa}_{12}\bar{p}_{12} & -\bar{\kappa}_{13}\bar{p}_{13} \\ \bar{\kappa}_{12}\bar{p}_{12} & 0 & -\bar{\kappa}_{23}\bar{p}_{23} \\ \bar{\kappa}_{13}\bar{p}_{13} & \bar{\kappa}_{23}\bar{p}_{23} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.355903 & 2.203914 \\ 0.355903 & 0 & 0.277024 \\ -2.203914 & -0.277024 & 0 \end{bmatrix}, \tag{56}$$

式中:

$$\kappa_{11} = 0.231963,\ \kappa_{22} = 0.562766,\ \kappa_{33} = 1.667316,$$
$$\kappa_{12} = 0.397364,\ \kappa_{13} = 0.949639,\ \kappa_{23} = 1.115041,$$
$$\bar{\kappa}_{12} = 0.165402,\ \bar{\kappa}_{13} = 0.717677,\ \bar{\kappa}_{23} = 0.552275.$$

5.1　参数求解

针对系统(51), 根据第4.3.1小节所给出的参数初值求解方法, 得李雅普诺夫函数参数初值, 即

$$\begin{cases} \bar{p}_{(0)12} = -0.858616,\ \bar{p}_{(0)13} = 1.690625, \\ \bar{p}_{(0)23} = 0.366706,\ \bar{p}_{(0)11} = 0.184072, \\ \bar{p}_{(0)22} = 1.550778,\ \bar{p}_{(0)33} = 0.050726. \end{cases} \tag{57}$$

给定角度误差设定值$\bar{\varepsilon}_\theta = 0.003^{\mathrm{o}}$, 并令角度调节系数为$\alpha_i = \alpha = 0.5$和$\bar{p}_{ij} = \bar{p}_{(0)ij}$. 应用算法1, 李雅普诺夫函数参数的求解过程如下:

步骤 1　根据$\bar{p}_{ij}$, 由式(55)–(56), 得

$$R = \begin{bmatrix} 0.042698 & -0.193039 & -0.060094 \\ -0.193039 & 0.872725 & 0.271683 \\ -0.060094 & 0.271683 & 0.084576 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -0.213886 & 0.990591 \\ 0.213886 & 0 & 0.074501 \\ -0.990591 & -0.074501 & 0 \end{bmatrix}.$$

步骤 2　根据式(29)和特性2, 得

$$\Theta_R = \begin{bmatrix} 0.978418 & 0 & -0.206636 \\ 0.197297 & -0.297235 & 0.934198 \\ 0.061420 & 0.954804 & 0.290820 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_J = \begin{bmatrix} 0.997309 & 0 & -0.073317 \\ 0.071665 & -0.211054 & 0.974844 \\ 0.015474 & 0.977474 & 0.210486 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} 0 & 1.016154 & 0 \\ -1.016154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即$\upsilon_1 = 1.016154$.

步骤 3　根据所得的Θ_R和Θ_J, 由式(43)–(44), 得

$$\bar{\Theta}_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0.837256 & -0.546811 \\ -0.092543 & -0.544465 & -0.833663 \\ -0.995709 & 0.050604 & 0.077482 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{\Theta}=\begin{bmatrix}0.98698 & -0.16083 & 0\\ 0.16083 & 0.98698 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

则由式(45), 得$\theta_1=\arcsin(-0.16083)=-9.2551^{\mathrm{o}}$.

步骤 4　由于$\varepsilon_\theta=\max|\theta_1|=9.2551^{\mathrm{o}}>\bar{\varepsilon}_\theta$, 则进一步调整李雅普诺夫函数参数.

步骤 5　由于$\alpha_1=0.5$, 则$\hat{\theta}_1=\alpha_1\theta_1=-4.6276^{\mathrm{o}}$. 因此根据式(45)–(47)和所得$\bar{\Theta}_\Lambda$, 得

$$\hat{\Theta}_R=\begin{bmatrix}0.990109 & -0.001502 & -0.140295\\ 0.135301 & -0.254397 & 0.957588\\ 0.037129 & 0.967099 & 0.251678\end{bmatrix}.$$

步骤 6　根据式(48)–(50), 得$\hat{\Lambda}_R=\mathrm{diag}\{0,0,1\}$.

步骤 7　根据所得的$\hat{\Theta}_R$和$\hat{\Lambda}_R$, 应用式(41), 得

$$\hat{R}=\begin{bmatrix}0.019683 & -0.134345 & -0.035309\\ -0.134345 & 0.916975 & 0.241004\\ -0.035309 & 0.241004 & 0.063342\end{bmatrix}.$$

步骤 8　应用式(55), 得到李雅普诺夫函数参数为

$$\bar{p}_{12}=-0.710907,\ \bar{p}_{13}=1.716724,\ \bar{p}_{23}=0.339192,$$
$$\bar{p}_{11}=0.084854,\ \bar{p}_{22}=1.629407,\ \bar{p}_{33}=0.037990.$$

步骤 9　返回步骤1, 并通过迭代, 不断调节李雅普诺夫函数参数, 直到满足精度要求$\bar{\varepsilon}_\theta<\varepsilon_\theta=0.003^{\mathrm{o}}$.

步骤 10　通过21次调节, 得

$$\bar{P}=\begin{bmatrix}0.031289 & -0.579028 & 1.730574\\ -0.579028 & 1.643854 & 0.347388\\ 1.730574 & 0.347388 & 0.040566\end{bmatrix}. \tag{58}$$

表1展现了算法1中参数迭代过程的细节. 对应的李雅普诺夫函数参数矩阵为

$$P=\Theta_\Lambda^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2.373073 & -0.536772 & 0.374320\\ -0.536772 & 3.574095 & 0.544680\\ 0.374320 & 0.544680 & 0.768541\end{bmatrix}\Theta_\Lambda, \tag{59}$$

其中Θ_Λ由式(15)得到.

注 10　根据表1所给的每一步迭代结果, 可知: 在参数迭代过程中, 对应的角度差ε_θ和幅值差ε_ρ不断减小. 在误差设定值满足$\varepsilon_\theta\to 0$和计算精度足够高的条件下, ε_θ和ε_ρ将趋于0. 这表明该算法具有收敛性.

5.2　李雅普诺夫函数分析

为了比较不同方法所得李雅普诺夫函数的精确程度, 将所得李雅普诺夫函数参数代入

$$\hat{\gamma}^{-2}=\lambda_{\min}(\bar{F})|_P, \tag{60}$$

其中$\bar{F}=\Lambda\Lambda-K(R+J)(R+J)^{\mathrm{T}}K$. 所得$\hat{\gamma}$为基于李雅普诺夫函数的$\mathrm{H}_\infty$范数估计.

针对系统(51), 应用LMI方法, 得李雅普诺夫函数参数的可行解

$$P=\Theta_\Lambda^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1.715706 & 0.338245 & 0.493773\\ 0.338245 & 1.0334902 & 0.051232\\ 0.493773 & 0.051232 & 0.579295\end{bmatrix}\Theta_\Lambda. \tag{61}$$

根据式(59)和(61)所给李雅普诺夫函数参数, 应用式(60), 可得不同方法对应的系统H_∞范数估计结果. 表2给出了LMI方法和本文方法所得结果的对比, 其中$\hat{\gamma}_{\mathrm{LMI}}=0.921876$对应于LMI方法, 采用本文所提方法得$\hat{\gamma}_{\mathrm{MC}}=0.878734$. 根据表2, 当采用LMI方法得到的李雅普诺夫函数分析系统H_∞性能时, 存在较大误差. 与之相比, 本文所提方法给出了更准确(和恰当)的李雅普诺夫函数用于系统H_∞性能分析.

表 1　迭代过程中的结果

Table 1　The results in the iterative process

步骤	ε_θ	ε_ρ	李雅普诺夫函数参数$\bar{p}_{12}, \bar{p}_{13}, \bar{p}_{23}$
1	9.2551°	0.016154	−0.858616, 1.690625, 0.366706
2	3.0961°	0.004667	−0.710907, 1.716724, 0.339192
3	1.3099°	0.002040	−0.651040, 1.724335, 0.334221
4	0.7798°	0.001192	−0.623947, 1.727065, 0.335792
5	0.5392°	0.000815	−0.609252, 1.728309, 0.338458
6	0.3845°	0.000601	−0.600105, 1.729012, 0.340814
7	0.2756°	0.000460	−0.593939, 1.729468, 0.342632
8	0.1977°	0.000360	−0.589633, 1.729784, 0.343976
9	0.1421°	0.000288	−0.586578, 1.730009, 0.344950
10	0.1020°	0.000237	−0.584401, 1.730170, 0.345649
11	0.0733°	0.000200	−0.582841, 1.730287, 0.346153
12	0.0527°	0.000173	−0.581729, 1.730370, 0.346514
13	0.0378°	0.000153	−0.580928, 1.730430, 0.346772
14	0.0269°	0.000140	−0.580352, 1.730473, 0.346959
15	0.0195°	0.000129	−0.579937, 1.730505, 0.347094
16	0.0138°	0.000123	−0.579642, 1.730527, 0.347189
17	0.0097°	0.000116	−0.579426, 1.730544, 0.347259
18	0.0069°	0.000113	−0.579272, 1.730556, 0.347309
19	0.0052°	0.000110	−0.579162, 1.730564, 0.347345
20	0.0034°	0.000108	−0.579086, 1.730569, 0.347369
21	0.0026°	0.000107	−0.579028, 1.730574, 0.347388

注: ε_θ为角度误差, $\varepsilon_\rho=|v_1-1|$为幅值误差.

表 2　系统H_∞范数估计

Table 2　The system H_∞ norm estimation

	$\gamma_{\|G\|_\infty}$	$\hat{\gamma}_{\mathrm{LMI}}$	$\hat{\gamma}_{\mathrm{MC}}$
结果	0.877315	0.921876	0.878734
相对误差	—	5.08%	0.16%

6　结论

本文针对Riccati不等式中李雅普诺夫函数的优化问题, 提出了一种正交矩阵构造方案. 该方案以构建

关于最优李雅普诺夫函数的近似等式条件为基础, 利用旋转变换, 将非线性方程组的求解问题转换为幅值和角度的线性优化问题, 进而实现李雅普诺夫函数的优化. 本文的研究解决了高阶系统无法求解最优李雅普诺夫函数的难题. 所提方案对系统性能分析和非保守控制的设计具有建设性. 研究结果弥补了在目前的研究中无法求解最优李雅普诺夫函数的不足, 同时也为构建新的系统H_∞性能分析体系打下基础.

参考文献:

[1] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* (3rd ed). New Jersey: Prentice Hall, 2002: 275 – 282.

[2] POLAŃSKI A. On infinity norms as Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(7): 1270 – 1274.

[3] IWASAKI T, SKELTON R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307 – 1317.

[4] DONG H L, WANG Z D, DING S X, et al. On H_∞ estimation of randomly occurring faults for a class of nonlinear time-varying systems with fading channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(2): 479 – 484.

[5] LIU Xiuhua, HAN Jian, WEI Xinjiang. Intermediate observer based distributed fault estimation for multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(1): 142 – 152.
(刘秀华, 韩建, 魏新江. 基于中间观测器的多智能体系统分布式故障估计. 自动化学报, 2020, 46(1): 142 – 152.)

[6] GUO Tianjiao, TU Lilan. Adaptive H_∞ heterogeneous synchronization for interdependent networks with noise. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(6): 1229 – 1239.
(郭天姣, 涂俐兰. 噪声下相互依存网络的自适应H_∞异质同步. 自动化学报, 2020, 46(6): 1229 – 1239.)

[7] GEROMEL J C, COLANERI P, BOLZERN P. Differential linear matrix inequality in optimal sampled-data control. *Automatica*, 2019, 100: 289 – 298.

[8] ARGHA A, SU S W, CELLER B G. Control allocation-based fault tolerant control. *Automatica*, 2019, 103: 408 – 417.

[9] OBAIAH M C, SUBUDHI B. A delay-dependent anti-windup compensator for wide-area power systems with time-varying delays and actuator saturation. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2020, 7(1): 106 – 117.

[10] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M, et al. On the finite-time boundedness of linear systems. *Automatica*, 2019, 107: 454 – 466.

[11] TIAN E G, WANG Z D, ZOU L, et al. Chance-constrained H_∞ control for a class of time-varying systems with stochastic nonlinearities: The finite-horizon case. *Automatica*, 2019, 107: 296 – 305.

[12] HOSOE Y, HAGIWARA T. Equivalent stability notions, Lyapunov inequality, and its application in discrete-time linear systems with stochastic dynamics determined by an i.i.d. process. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4764 – 4771.

[13] LIU Xiuchong, WANG Zhanshan. Calculation of the system H_∞ norm: A Lyapunov function optimization method. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(8): 1606 – 1610.
(刘秀翀, 王占山. 系统H_∞范数计算: Lyapunov函数的直接优化方法. 自动化学报, 2019, 45(8): 1606 – 1610.)

[14] GUO Hui, LIN Yixing. On orthogonal sub-diagonalization for matrices. *Mathematics in Practice and Theory*, 2004, 34(1): 150 – 156.
(郭辉, 林怡杏. 矩阵的正交次对角化. 数学的实践与认识, 2004, 34(1): 150 – 156.)

作者简介:

刘秀翀 博士, 讲师, 目前研究方向为鲁棒控制、最优化理论与方法、电力电子与电力传动, E-mail: liuxiuchong@mail.neu.edu.cn;

王占山 博士, 教授, 目前研究方向为为神经网络的稳定性分析、故障诊断、容错控制, E-mail: wangzhanshan@ise.neu.edu.cn.