第 40 卷第 4 期
2023 年 4 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 40 No. 4
Apr. 2023

复混沌系统的稳态控制

张芳芳[1], 张帅虎[1], 马凤英[1†], 纪　鹏[1], 寇　磊[2], 李春彪[3], 雷腾飞[4]

(1. 齐鲁工业大学(山东省科学院) 信息与自动化学院, 山东 济南 250353;

2. 齐鲁工业大学(山东省科学院) 山东省科学院海洋仪器仪表研究所, 山东 青岛 266100;

3. 南京信息工程大学 电子与信息工程学院, 江苏 南京 210044; 4. 齐鲁理工学院 机电工程学院, 山东 济南 273100)

摘要: 混沌系统的多稳态具有复杂性和非预期性, 引起了人们的极大关注, 如何针对混沌系统进行稳态控制还没有有效的方法. 混沌吸引子是复混沌系统典型的动态特性. 本文的主要目标是选择合适的控制方法使复混沌系统在预定的位置范围获得期望的稳态吸引子. 本文即针对复混沌稳态吸引子的控制问题, 提出了分段函数控制器和比例正弦函数控制器, 分别用于实现稳态吸引子的位置控制和形状控制, 其中混沌吸引子的位置由分段函数的间隔控制, 混沌吸引子的形状由系统参数或正弦函数控制. 这两种控制器简单可行, 易于实现. 最后, 通过复Lorenz混沌系统和一个物理实例Duffing振子仿真实验验证了所提出控制器的有效性.

关键词: 复混沌系统; 吸引子; 位置控制; 形状控制; 稳态控制

引用格式: 张芳芳, 张帅虎, 马凤英, 等. 复混沌系统的稳态控制. 控制理论与应用, 2023, 40(4): 744 – 752

DOI: 10.7641/CTA.2022.11257

Steady state control of complex chaotic systems

ZHANG Fang-fang[1], ZHANG Shuai-hu[1], MA Feng-ying[1†], JI Peng[1], KOU Lei[2], LI Chun-biao[3], LEI Teng-fei[4]

(1. School of Information and Automation Engineering, Qilu University of Technology (Shandong Academy of Sciences), Jinan Shandong 250353, China; 2. Institute of Oceanographic Instrumentation Shandong Academy of Sciences, Qilu University of Technology(Shandong Academy of Sciences), Qingdao Shandong 266100, China; 3. School of Electronic & Information Engineering, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China; 4. College of Mechanical and Electrical Engineering, Qilu Institute of Technology, Jinan Shandong 273100, China)

Abstract: The multistability of chaotic systems is complex and unexpected, which has attracted great attention. There is no effective method to control the steady-state of chaotic system. Chaotic attractor is a typical dynamic characteristic of complex chaotic system. The main goal of this paper is to select an appropriate control method to make the complex chaotic system obtain the desired steady-state attractor in the predetermined position range. This paper aims at the steady-state control of complex chaotic systems, piecewise function controller and proportional sinusoidal function controller are proposed to realize the position control and shape control of steady-state attractor, respectively. The position of the chaotic attractor is controlled by the interval of the piecewise function, and the shape of the chaotic attractor is controlled by system parameters or sinusoidal function. The two controllers are simple, feasible and easy to implement. Finally, the effectiveness of the proposed controller is verified by simulation experiments of the complex Lorenz chaotic system and a physical example of the Duffing oscillator.

Key words: complex chaotic system; attractor; position control; shape control; steady state control

Citation: ZHANG Fangfang, ZHANG Shuaihu, MA Fengying, et al. Steady state control of complex chaotic systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 744 – 752

收稿日期: 2021−12−22; 录用日期: 2022−04−21.

[†]通信作者. E-mail: mafengy@163.com; Tel.: +86 13370562931.

本文责任编委: 孙长银.

齐鲁工业大学国际合作研究项目(QLUTGJHZ2018020), 国家自然科学基金项目(61903207), 山东省重大科技创新项目(2019JZZY010731, 2020CXGC010901)资助.

Supported by the International Collaborative Research Project of Qilu University of Technology (QLUTGJHZ2018020), the National Nature Science Foundation of China (61903207) and the Major Scientic and Technological Innovation Projects of Shandong Province (2019JZZY010731, 2020CXGC010901).

1 引言

混沌系统因其独有的特性和吸引子结构, 在物理学、信息科学等许多领域具有广泛的应用[1–3]. 不同的混沌系统稳定到不同的吸引子状态. 根据吸引子的个数, 出现了双稳态[4–5]、三稳态[6]及无穷多稳态[7–9]混沌系统. 混沌系统的多稳态来自不同的原因, 有些是由对称性的破坏引起的[10–11], 有些是由时间滞后或延迟引起的[12–13], 有些是由参数或由初始条件变化引起的[14–15]. 例如, 有的混沌系统根据初始点的不同稳定到不同的吸引子, 称为共存吸引子[16–17]; 有的混沌系统因为参数的不同稳定到不同的吸引子, 称为参数吸引子[18].

对于具有多稳态吸引子的系统, 无法决定混沌系统最终稳定到哪种状态, 其动态行为难以控制. 有些混沌行为是有益的, 如混沌保密通信和化学过程中的搅拌过程[19]; 有些混沌行为是有害的, 如电机里产生的混沌现象. 如何设计控制器使混沌系统产生稳定的期望行为, 即对混沌系统的稳态控制, 具有重要的研究意义和应用价值[1–3].

混沌吸引子是混沌系统运动状态的反映, 是研究混沌系统稳态控制的重要方法. 位置和形状是混沌吸引子两个重要特征, 可以通过控制吸引子的位置和形状对混沌系统的稳态进行控制.

对于混沌吸引子位置控制, Leonov等[20]提出了混沌系统中存在自激吸引子和隐藏吸引子; Jafari等[21]构造了由无限多个非孤立平衡状态组成混沌系统; Li等[15] 研究和分析了许多具有平衡点的混沌系统, 得到了无穷多个共存吸引子; Yang等[7–8]证明了一些混沌系统具有无穷多吸引子; Zhang等[22]提出了一种构造具有无限多个混沌吸引子的混沌系统的方法; Lei等[23]提出了一种对实混沌系统吸引子位置进行控制的方法.

对于混沌吸引子形状控制, Jafari等[24]提出了一种改变了混沌吸引子形状极性的方法; G. M. Mahmoud等[25]在混沌系统里加入正弦函数, Lei等[26]在混沌系统里加入正切函数, 他们提出在混沌系统添加三角函数可以使混沌吸引子形状改变. 但是, 以上文献没有讨论对吸引子形状的控制.

上述文献仅针对于实混沌系统进行研究. 自从1982年Fowler等[27]提出了复Lorenz方程, 复混沌系统被用来描述失谐激光和液体的热对流现象等, 并在物理学的众多分支领域发挥重要作用. 从此, 复混沌系统的控制引起人们的极大关注, 而针对复混沌吸引子进行稳态控制的文献很少. 另外, 实混沌系统是复混沌系统中虚部为零的特殊情况. 因此, 本文提出两种简单可行的控制器, 实现了复混沌吸引子的位置控制和形状控制. 通过选择不同的控制器, 系统是否可以被控制到任何期望的状态, 这在未来需要进一步研究.

本文首先详细介绍了位置控制器的设计方法和数学证明, 并针对复Lorenz混沌系统进行仿真实验; 然后详细论述形状控制器的设计方法, 并针对复Lorenz混沌系统进行仿真实验. 最后, 通过一个物理实例Duffing振子对提出的位置控制器和形状控制器进行仿真实验. 仿真验证了所提出控制器的有效性, 实现对复混沌系统稳态控制.

2 复混沌吸引子的位置控制

由于吸引子位于一定大小的有限相空间中, 对某些变量位移不会改变系统的稳态性能, 而是将吸引子移动到不同的位置. 但是, 对具有多个稳态吸引子的复混沌系统, 吸引子的位置控制还是个难题, 本节提出分段函数控制器实现了吸引子位置控制.

2.1 位置控制器

定理 1 考虑n维复混沌系统

$$\begin{cases}\dot{z}_1=f_1\left(z_1,z_2,\cdots,z_{l-1},z_l,z_{l+1},\cdots,z_n\right),\\ \dot{z}_2=f_2\left(z_1,z_2,\cdots,z_{l-1},z_l,z_{l+1},\cdots,z_n\right),\\ \quad\vdots\\ \dot{z}_n=f_n\left(z_1,z_2,\cdots,z_{l-1},z_l,z_{l+1},\cdots,z_n\right),\end{cases}\tag{1}$$

其中: 复变量$z_l=x_l^r+jx_l^i(l=1,\ 2,\ \cdots,n)$, x_l^r表示实部, x_l^i表示虚部. 假设系统(1)具有吸引子O_i, 吸引子O_i具有吸引域$\emptyset_i$, 并假设对于任意点$(\dot{z}_1\ \dot{z}_2\cdots\dot{z}_n)^{\mathrm{T}}\in\emptyset_i$, $|z_l|\leqslant d$, 提出如下的分段函数$h(z_l)$代替系统中z_l项:

$$h\left(z_l\right)=\begin{cases}z_l, & -d\leqslant|z_l|\leqslant d,\\ z_l-2d, & d\leqslant|z_l|\leqslant 3d,\\ \vdots & \\ z_l-2\left(i-1\right)d, & \\ & \left(2i-3\right)d\leqslant|z_l|\leqslant\left(2i-1\right)d,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{2}$$

当z_l满足$(2i-3)\,d\leqslant|z_l|<(2i-1)\,d\ (i=1,2,\cdots,p)$时, 可实现系统(1)稳态吸引子的位置控制.

证 假设系统分量z_l满足$(2i-3)\,d\leqslant|z_l|<(2i-1)d\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$, 并在系统(1)中可进行如下变量替换:

$$\begin{cases}y_1=z_1,\\ \vdots\\ y_{l-1}=z_{l-1},\\ y_l=z_l-2\left(i-1\right)d,\\ y_{l+1}=z_{l+1},\\ \vdots\\ y_n=z_n,\end{cases}\tag{3}$$

可得

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = f_1\left(y_1, y_2, \cdots, y_{l-1}, y_l, y_{l+1}, \cdots, y_n\right), \\ \dot{y}_2 = f_2\left(y_1, y_2, \cdots, y_{l-1}, y_l, y_{l+1}, \cdots, y_n\right), \\ \quad\vdots \\ \dot{y}_n = f_n\left(y_1, y_2, \cdots, y_{l-1}, y_l, y_{l+1}, \cdots, y_n\right).\end{cases} \tag{4}$$

1) 当$i = 1, -d \leqslant |z_l| < d, y_l = z_l$, 系统(4)与系统(1)相同.

2) 当$i = 2, d \leqslant |z_l| < 3d, y_l = z_l - 2d$, 系统(4)为

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = f_1\left(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l - 2d, z_{l+1}, \cdots, z_n\right), \\ \dot{z}_2 = f_2\left(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l - 2d, z_{l+1}, \cdots, z_n\right), \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_n = f_n\left(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l - 2d, z_{l+1}, \cdots, z_n\right),\end{cases} \tag{5}$$

与系统(1)相同.

3) 依次类推, 当$i = 3, \cdots, p, (2i-3)\,d \leqslant |z_l| < (2i-1)\,d, y_l = z_l - 2(i-1)d$, 系统(4)为

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l - 2(i-1)d, \\ \qquad z_{l+1}, \cdots, z_n), \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l - 2(i-1)d, \\ \qquad z_{l+1}, \cdots, z_n), \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_n = f_n(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l - 2(i-1)d, \\ \qquad z_{l+1}, \cdots, z_n),\end{cases} \tag{6}$$

与系统(1)相同.

所以$|y_l| \leqslant d$时, 系统(4)与系统(1)结构相同, 具有相同的解. 系统(4)在$(2i-3)d \leqslant |z_l| < (2i-1)d(i = 1, 2, \cdots, p)$区间内具有相同的吸引子$O_i$. 以此类推, 系统(1)在不同区间具有$p$个相同的稳态吸引子. 式(2)中的参数$d$可以用来改变吸引子的位置.　证毕.

2.2　位置控制仿真实验

复Lorenz系统方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_1\left(x_2 - x_1\right), \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 - x_1 x_3 - a_3 x_2, \\ \dot{x}_3 = -a_4 x_3 + \dfrac{1}{2}\left(\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2\right),\end{cases} \tag{7}$$

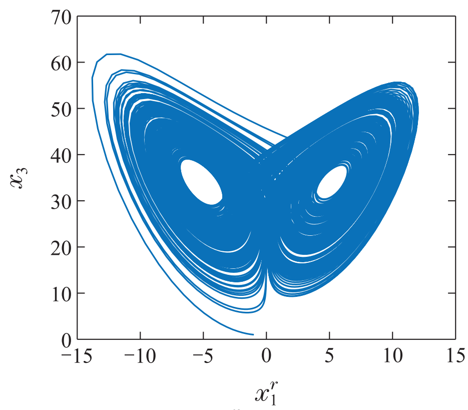
其中: $x_1 = x_1^r + jx_1^i$, $x_2 = x_2^r + jx_2^i$复变量, x_3是实变量. 参数a_1和a_4是实数, a_2和a_3是复数, 上划线$\bar{x}_1(\bar{x}_2)$表示$x_1(x_2)$的共轭变量.

分离系统(7)各个变量的实部和虚部, 可得

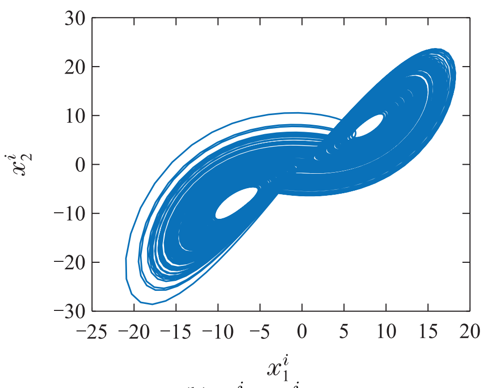
$$\begin{cases}\dot{x}_1^r = a_1\left(x_2^r - x_1^r\right), \\ \dot{x}_1^i = a_1\left(x_2^i - x_1^i\right), \\ \dot{x}_2^r = a_2 x_1^r - x_1^r x_3 - a_3 x_2^r, \\ \dot{x}_2^i = a_2 x_1^i - x_1^i x_3 - a_3 x_2^i, \\ \dot{x}_3 = -a_4 x_3 + \left(x_1^r x_2^r + x_1^i x_2^i\right).\end{cases} \tag{8}$$

选择复Lorenz系统(7)为仿真对象. 当a_1=14, a_2=35, a_3=1, a_4=8/3, 初始值为$x(0)$=$(-1, -2, -3, -4, 1)^{\mathrm{T}}$时, 可得系统的Lyapunov指数为LE1 = 1.1225, LE2 = 0.0693, LE3 = −0.01168 ≈ 0, LE4 = −0.6605, LE5 = −2.0059. 由于计算机的截断误差, 取5个数中绝对值最小的数约为零, 则系统(8)的Lyapunov指数为$(+, +, 0, -, -)$, 故系统(8)是混沌的.

根据MATLAB编程仿真, 其不同投影面和投影空间的混沌吸引子如图1所示. 其变量x_1^r和x_1^i的时域图如图2所示.



(a) $x_1^r - x_3$



(b) $x_1^i - x_2^i$

图 1　不同投影面和投影空间的混沌吸引子图

Fig. 1　Chaotic attractor diagram with different projection planes and projection spaces

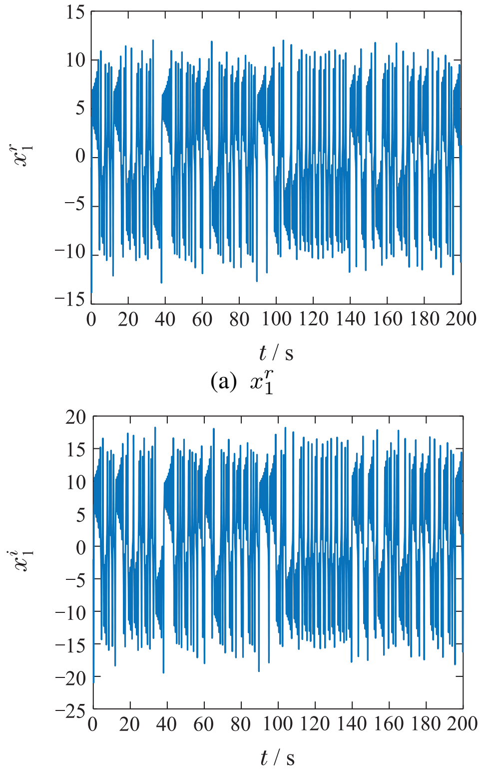
设计控制器为如下的分段线性函数:

$$h\left(z_l\right) = \begin{cases}x, & 0 \leqslant x_l \leqslant 2d, \\ x - 2d, & 2d \leqslant x_l \leqslant 4d, \\ x - 4d, & 4d \leqslant x_l \leqslant 6d, \\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{9}$$

其中: $x = x_1^r + jx_1^i$, x_l^r表示实部, x_l^i表示虚部.

两个选定吸引子之间的距离取决于d的值, 并且距离应该大于x维度中吸引子的范围, 以免两个吸引子出现交叉, 影响位置控制效果. 本文选择$d = 30$, 系统(9)混沌吸引子的位置得到控制, 相平面中出现了3个完全一样的混沌吸引子, 每个吸引子之间的距

离是$2d$, 如图3所示. 系统x的变化时域图如图4所示, 也说明吸引子位置发生了变化.

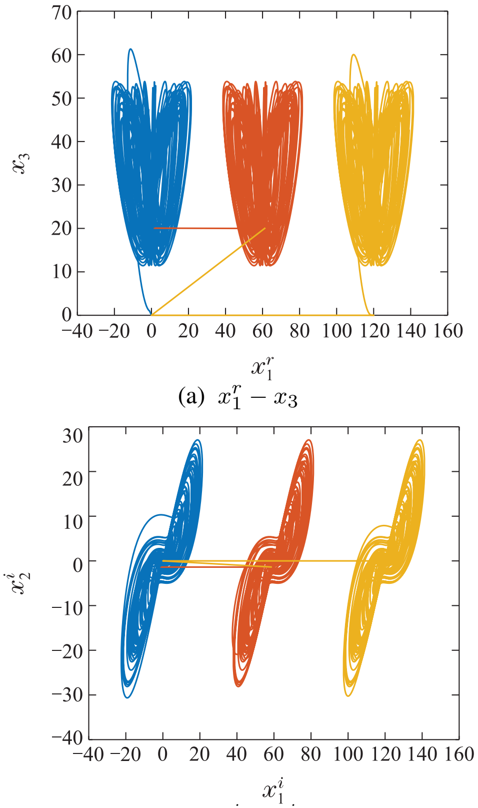


(a) x_1^r

(b) x_1^i

图 2　变量x_1^r和x_1^i的时域图

Fig. 2 Time domain diagram of variables x_1^r and x_1^i

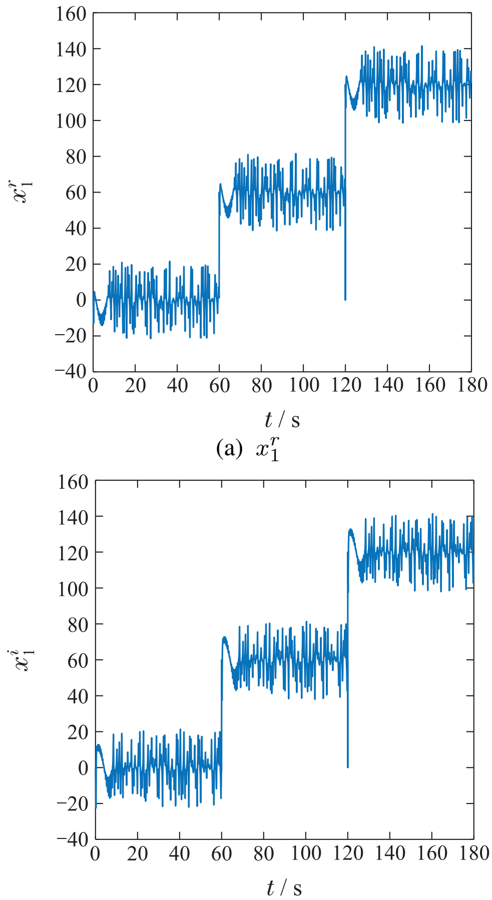


(a) $x_1^r - x_3$

(b) $x_1^i - x_2^i$

图 3　混沌吸引子位置变化图

Fig. 3 Position variation diagram of chaotic attractor



(a) x_1^r

(b) x_1^i

图 4　变量x_1^r和x_1^i的位置变化图

Fig. 4 Position variation diagram of variables x_1^r and x_1^i

从图3–4可以看出, 复Lorenz系统的吸引子实现了稳态控制, 其中控制器中分段函数的数量决定了混沌吸引子的数量, 参数d的值决定了混沌吸引子位移的值. 因此, 从数学理论和仿真实验两方面验证了所提出的分段函数控制器是有效的.

3　复混沌吸引子的形状控制

复混沌系统可以使用参数变化或正弦函数的某些组合实现对吸引子的形状控制, 从而改变系统的动态性能.

混沌吸引子的形状与系统参数有紧密的关系, 随着参数的变化, 系统可能出现发散、周期或混沌等不同的状态, 所以改变系统参数可以控制混沌吸引子的形状.

对于正弦函数形状控制器, 考虑复混沌系统(1), 在第m个状态分量上增加正弦函数控制器, 可得

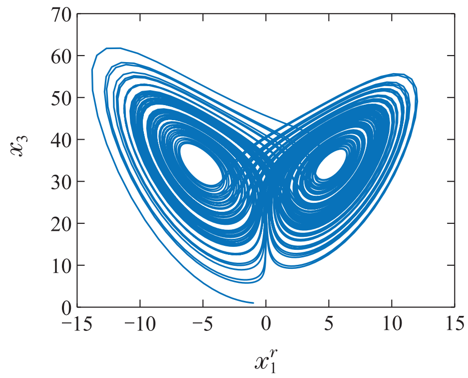
$$\begin{cases}\dot{z}_1 = f_1\left(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l, z_{l+1}, \cdots, z_n\right), \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_m = f_m\left(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l, z_{l+1}, \cdots, z_n\right) + \\ \qquad k\left(1+i\right)\sin\left(\omega t\right), \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_n = f_n\left(z_1, z_2, \cdots, z_{l-1}, z_l, z_{l+1}, \cdots, z_n\right),\end{cases} \tag{10}$$

其中k,ω是正常数. 由于正弦函数复杂的周期作用力, 相当于施加一种正弦参数激励来对复混沌系统进行稳态控制. 其中k,ω是待定的参数, 选择合适的参数即可控制混沌吸引子的形状. 另外, 还可以通过调节正弦函数的参数使混沌系统处于周期状态或平衡点.

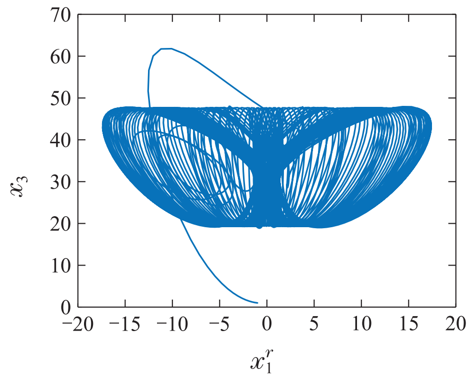
3.1 复Lorenz系统形状控制仿真实验

3.1.1 参数变化

利用上节的复Lorenz系统进行仿真实验, 改变参数a_2的值, 分别取$a_2=35, 35+i$时, 混沌吸引子的形状发生明显改变, 称之为参数吸引子. 随着a_2虚部的增加, 其混沌吸引子的形状变化如图5所示.



(a) $a_2=35$



(b) $a_2=35+i$

图 5 参数a_2变化时稳态吸引子图

Fig. 5 Steady state attractor diagram with parameter a_2 changes

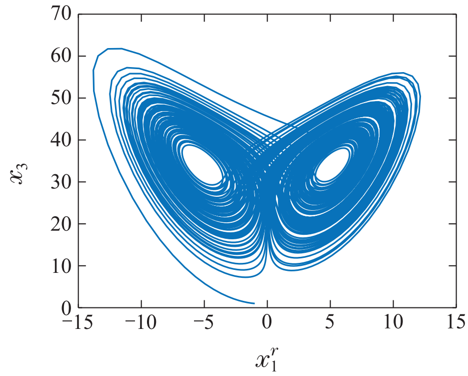
从仿真结果可知, 参数变化能改变吸引子的形状.

3.1.2 正弦函数控制器

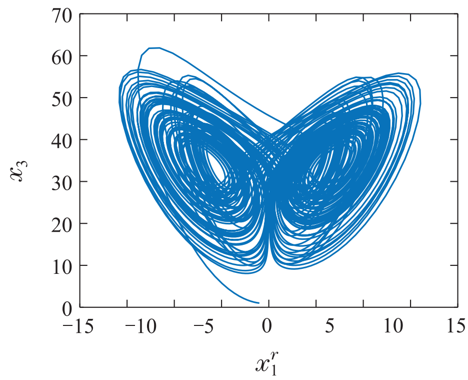
在复Lorenz混沌系统第2个方程中添加复周期$k(1+i)\sin(\omega t)$函数控制器, 可得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_1\left(x_2-x_1\right),\\ \dot{x}_2=a_2x_1-x_1x_3-a_3x_2+k\left(1+i\right)\sin\left(\omega t\right),\\ \dot{x}_3=-a_4x_3+\dfrac{1}{2}\left(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2\right).\end{cases} \tag{11}$$

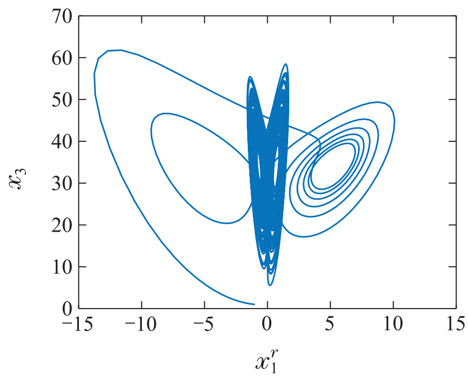
通过适当选择k和ω的值, 可以实现对复Lorenz系统吸引子形状稳态控制. 当k和ω分别取(a) $k=0$; (b) $k=1,\omega=410$; (c) $k=20,\omega=410$; (d) $k=50$, $\omega=410$时, 其混沌吸引子的形状变化如图6所示. 系统x_1^r的变化时域图如图7所示, 也说明吸引子形状发生了变化.



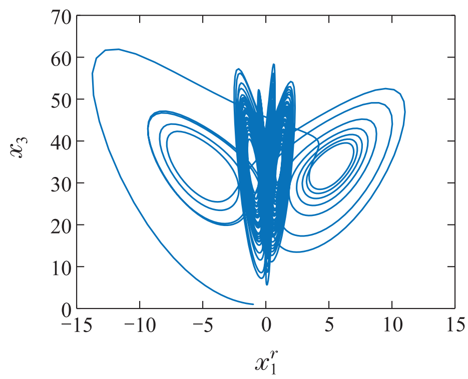
(a) $k=0$



(b) $k=1,\ \omega=410$



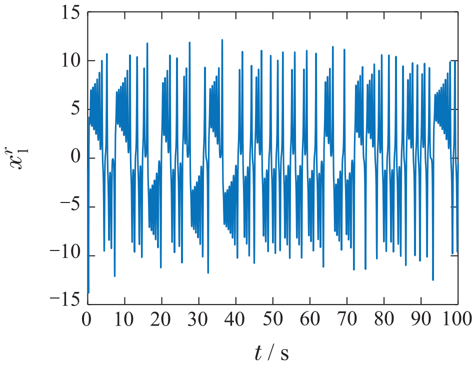
(c) $k=20,\ \omega=410$



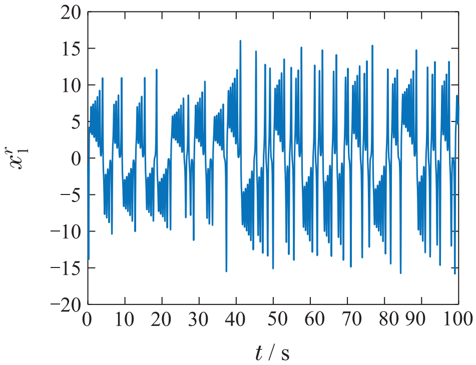
(d) $k=50,\ \omega=410$

图 6 正弦函数参数变化时稳态吸引子图

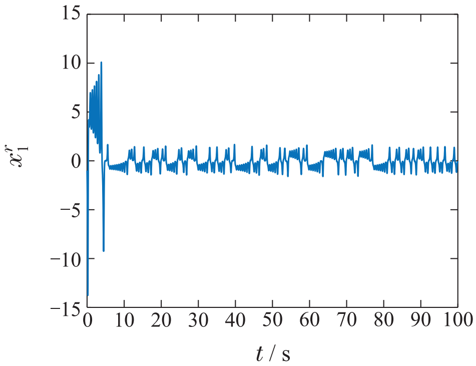
Fig. 6 Steady state attractor diagram with sinusoidal function parameters changing



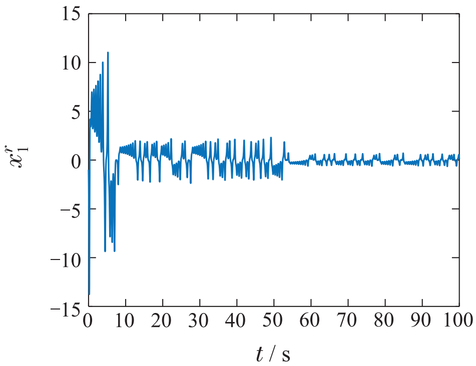
(a) $k=0$



(b) $k=1,\ \omega=410$



(c) $k=20,\ \omega=410$



(d) $k=50,\ \omega=410$

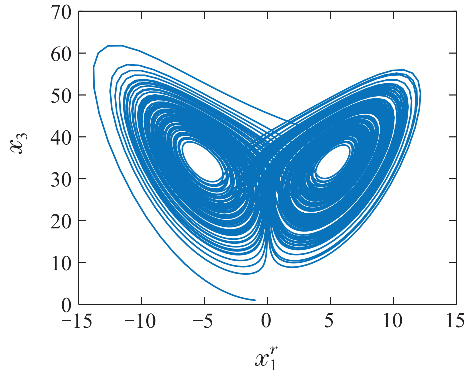
图 7　正弦函数参数变化时时域图

Fig. 7 Time domain diagram of sinusoidal function with parameter change

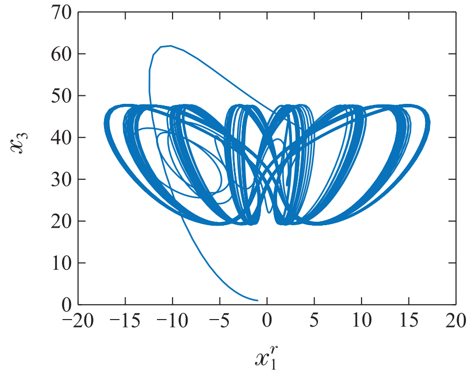
从仿真结果比较混沌吸引子相图和时域图, 说明复Lorenz系统的吸引子形状得到控制.

3.1.3　参数变化与正弦函数控制器组合

利用系统(11)进行仿真实验, 改变参数a_2和k和ω的值, 分别取(a) $a_2=35+i$, $k=0$; (b) $a_2=35+i$, $k=50$, $\omega=420$时, 其混沌吸引子的形状变化如图8所示. 系统x_1^r的变化时域图如图9所示, 也说明吸引子形状发生了变化.



(a) $a_2=35+i,\ k=0$



(b) $a_2=35+i,\ k=50,\ \omega=420$

图 8　参数a_2与正弦函数参数同时变化时稳态吸引子图

Fig. 8 Steady state attractor diagram with parameter a_2 changes and sinusoidal function parameters changing

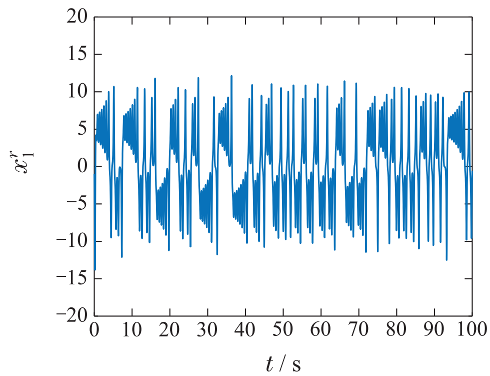
从仿真结果可知, 参数变化与正弦函数控制器组合能够改变吸引子的形状.

比较第3.1节中混沌吸引子的相图和时域图, 可得

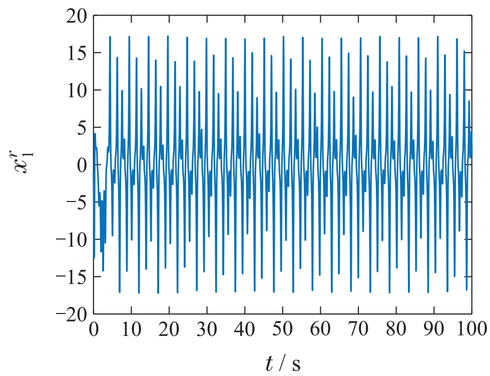
注 1　系统参数变化可以改变混沌吸引子的形状.

注 2　控制器中正弦函数的参数k和ω的值决定了混沌吸引子的形状, 说明提出的吸引子形状控制器是有效的.

注 3　系统中参数变化与正弦函数控制器组合可以控制混沌吸引子的形状.



(a) $a_2=35+i,\ k=0$



(b) $a_2 = 35 + i,\ k = 50,\ \omega = 420$

图 9 参数a_2与正弦函数参数同时变化时时域图

Fig. 9 Time domain diagram with parameter a_2 changes and sinusoidal function parameters changing

由仿真结果可知, 参数变化或正弦函数控制器都能改变混沌吸引子的形状. 参数变化虽然原理简单, 但是在实际工程中不易实现. 正弦控制器易于工程实现, 具有实用价值.

4 Duffing振子的位置控制和形状控制

G.Duffing提出Duffing动力学方程用于描述许多机械问题中的硬弹簧效应. Duffing振子模型是混沌系统, 具有丰富的动力学特性. 本节分别对Duffing振子吸引子的位置和形状进行控制. Duffing振子方程为式(12)

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - x + x^3 = \gamma\cos(wt). \tag{12}$$

将其转化为状态方程为式(13)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -0.5y + x - x^3 + \gamma\cos(wt). \end{cases} \tag{13}$$

4.1 Duffing振子的位置控制

设计位置控制器为如下的分段线性函数:

$$h(y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant 2d, \\ y - 2d, & 2d \leqslant y \leqslant 4d, \\ y - 4d, & 4d \leqslant y \leqslant 6d, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{14}$$

本文选择$d = 1.5$, 当$\gamma = 0.7$, 初始值为$(1\ \ 1)^{\mathrm{T}}$时, Duffing振子的混沌吸引子的位置得到控制, 两个吸引子之间的距离取决于d的值. 相平面中出现了3个完全一样的混沌吸引子, 每个吸引子之间的距离是$2d$, 如图10所示. 系统状态y的变化时域图如图11所示, 也说明吸引子位置发生了变化.

从图10和图11可以看出, Duffing振子的吸引子实现了稳态控制, 其中控制器中分段函数的数量决定了混沌吸引子的数量, 参数d的值决定了混沌吸引子位移的值. 因此, 验证了所提出的分段函数控制器是有效的.

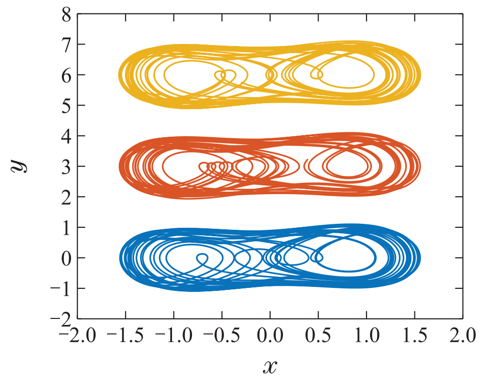


图 10 Duffing振子混沌吸引子位置变化图

Fig. 10 Position variation diagram of Duffing oscillator chaotic attractor

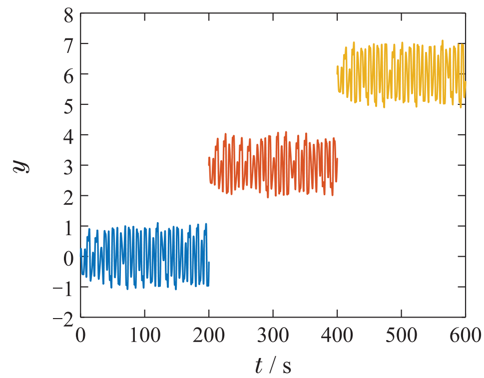


图 11 变量y的时域图

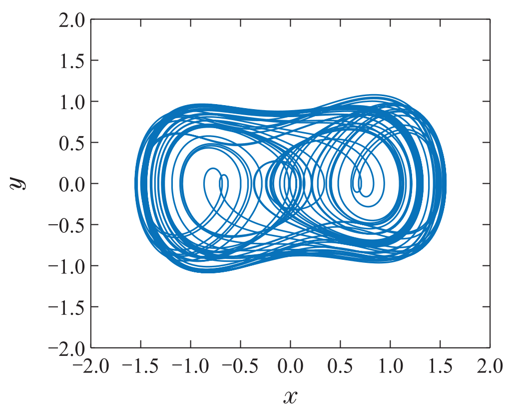
Fig. 11 Time domain diagram of variables y

4.2 Duffing振子的形状控制

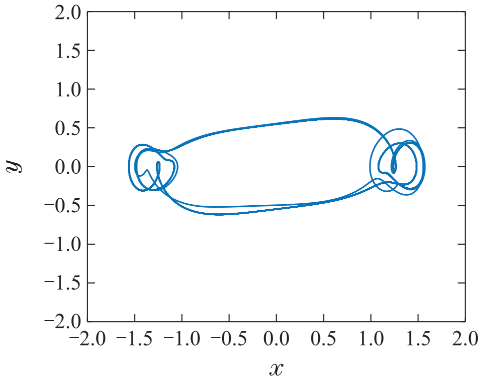
在Duffing振子方程中添加周期$\rho\sin(\omega t)$函数控制器, 可得式(15), 即

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -0.5y + x - x^3 + \gamma\cos(wt) + \rho\sin(wt). \end{cases} \tag{15}$$

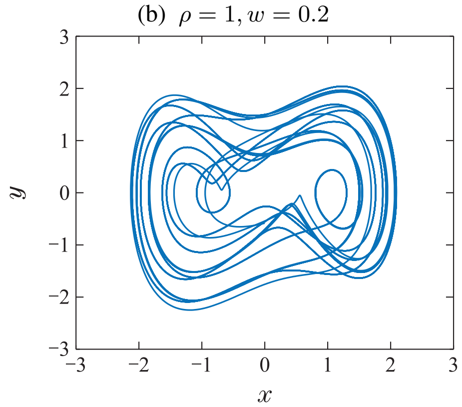
通过适当选择ρ和ω的值, 可以实现对Duffing振子吸引子形状稳态控制. 当 ρ 和 ω 分别取(a) $\rho = 0$; (b) $\rho = 1,\ w = 0.2$; (c) $\rho = 1,\ w = 0.7$; (d) $\rho = 0.5,\ w = 0.2$时, 其混沌吸引子的形状变化如图12所示. 系统状态y的变化时域图如图13所示,也说明吸引子形状发生了变化.



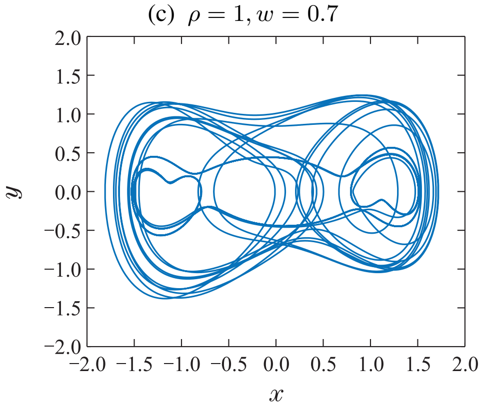
(a) $\rho = 0$



(b) $\rho=1, w=0.2$



(c) $\rho=1, w=0.7$

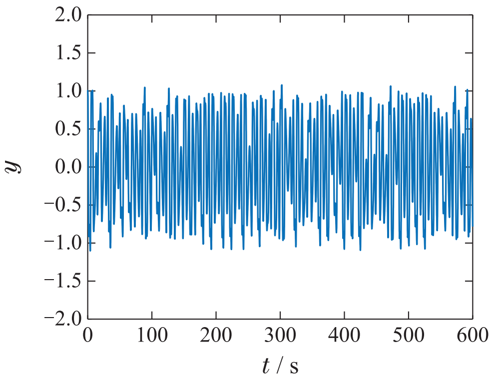


(d) $\rho=0.5, w=0.2$

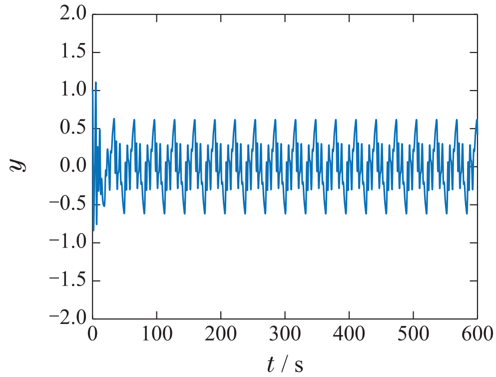
图 12 正弦函数参数变化时Duffing振子稳态吸引子图

Fig. 12 Steady state attractor of diagram Duffing oscillator with sinusoidal function parameters changing

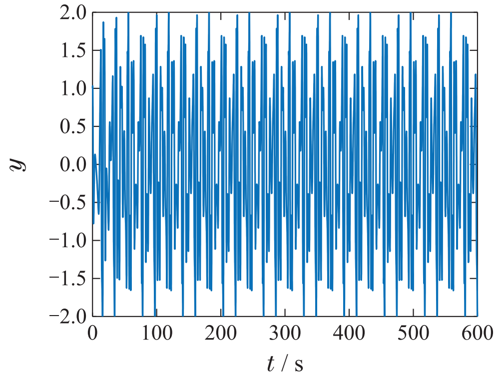
从仿真结果比较混沌吸引子相图和时域图, 随着正弦函数控制器参数变化, Duffing振子的吸引子形状得到控制, 验证了正弦函数控制器的有效性.



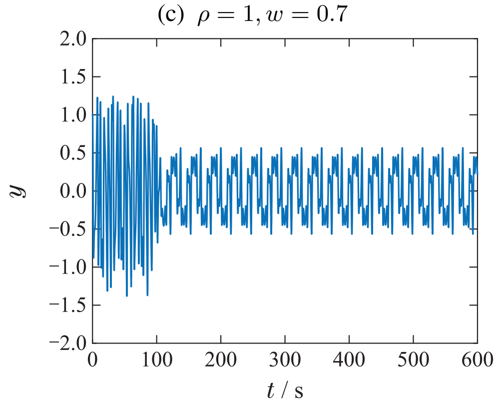
(a) $\rho=0$



(b) $\rho=1, w=0.2$



(c) $\rho=1, w=0.7$



(d) $\rho=0.5, w=0.2$

图 13 正弦函数参数变化时Duffing振子时域图

Fig. 13 Time domain diagram of Duffing oscillator with sinusoidal function parameter change

因此, Duffing振子吸引子的位置和形状得到控制, 通过实际物理系统验证了所提出的分段函数控制器和正弦函数控制器的有效性.

5 结论

本文分别提出两种控制器, 对复混沌的稳态吸引子进行位置控制和形状控制, 实现复混沌系统的稳态控制. 针对复混沌吸引子的位置控制, 本文采用分段线性函数控制器, 其中改变分段函数的间隔d能够控制两个混沌吸引子的距离, 分段函数的分支数量决定混沌吸引子的数量. 针对复混沌吸引子的形状控制, 本文采用参数变化或正弦函数作为控制器, 能够改变复混沌吸引子的形状. 仿真验证了上述控制器的有效性.

这些控制器原理简单, 易于工程实现, 具有一定的应用价值. 人们可以通过控制器的设计得到期望的混沌动力学特性.

参考文献:

[1] KONG S, LI C, HE S, et al. A memristive map with coexisting chaos and hyperchaos. *Chinese Physics B*, 2021, 30(11): 161 – 171.

[2] YANG Q, QIAO X. Constructing a new 3D chaotic system with any number of equilibria. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29(5): 1950060.

[3] CAO Rui, SHEN Haidong, LIU Yanbin, et al. Robust optimization of commands based on polynomial chaos and application in flight control. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(12): 2482 – 2492.
(曹瑞, 沈海东, 刘燕斌, 等. 基于混沌多项式的指令鲁棒优化及在飞行控制中的应用. 控制理论与应用, 2020, 37(12): 2482 – 2492.)

[4] BAO B C, LI Q D, WANG N, et al. Multistability in Chua's circuit with two stable node-foci. *Chaos*, 2016, 26(4): 043111.

[5] LI C, SPROTT J C, XING H. Hypogenetic chaotic jerk flows. *Physics Letters A*, 2016, 380(11/12): 1172 – 1177.

[6] LI C, SPROTT J C. Coexisting hidden attractors in a 4-D simplified lorenz system. *International Journal of Bifurcation & Chaos in Applied Sciences & Engineering*, 2014, 24(3): 1450034.

[7] YANG T, YANG Q. A 3D Autonomous system with infinitely many chaotic attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29(12): 1950166.

[8] LU K, YANG Q, CHEN G. Singular cycles and chaos in a new class of 3D three-zone piecewise affine systems. *Chaos*, 2019, 29(4): 043124.

[9] SOSA R I, ZANETTE D H. Multistability of globally coupled duffing oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2021, 31(4): 2150056.

[10] LI C, SPROTT J C, XING H. Constructing chaotic systems with conditional symmetry. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(2): 1351 – 1358.

[11] YUE X, LÜ G, ZHANG Y. Rare and hidden attractors in a periodically forced Duffing system with absolute nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 150(6): 111108.

[12] LI C, SPROTT J C, THIO W. Linearization of the Lorenz system. *Physics Letters A*, 2015, 379(10/11): 888 – 893.

[13] YAO W, WANG C, CAO J, et al. Hybrid multisynchronization of coupled multistable memristive neural networks with time delays. *Neurocomputing*, 2019, 363: 281 – 294.

[14] ZHAO X, LIU J, MOU J, et al. Characteristics of a laser system in complex field and its complex self-synchronization. *The European Physical Journal Plus*, 2020, 135(6): 507.

[15] LI C, SPROTT J C, HU W, et al. Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2017, 27(10): 1750160.

[16] XIAN Yongju, XIA Cheng, ZHONG De, et al. Chaotic system with coexisting attractors and the stabilization of its fractional order system. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 100 – 108.
(鲜永菊, 夏诚, 钟德, 等. 具有共存吸引子的混沌系统及其分数阶系统的镇定. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 100 – 108.)

[17] ZHANG W, MIN F, CHEN J, et al. Discontinuous dynamic analysis of a modified duffing-rayleigh system with a piecewise quadratic function. *IEEE Access*, 2020, 8: 32312 – 32320.

[18] LIU J, CHEN G, ZHAO X. Generalized synchronization and parameters identification of different-dimensional chaotic systems in the complex field. *Fractals*, 2021, 29(4): 2150081.

[19] XIE Yinghui, SUN Zengqi. Exponential synchronization for delayed Chen chaotic systems and applications to secure communications. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(2): 133 – 137.
(谢英慧, 孙增圻. 时滞Chen混沌系统的指数同步及在保密通信中的应用. 控制理论与应用, 2010, 27(2): 133 – 137.)

[20] LEONOV G A, KUZNETSOV N V, MOKAEV T N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion. *European Physical Journal Special Topics*, 2015, 224(8): 1421 – 1458.

[21] JAFARI S, SPROTT J C. Simple chaotic flows with a line equilibrium. *Chaos Solitons & Fractals*, 2013, 57: 79 – 84.

[22] ZHANG X, CHEN G. Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors. *Chaos*, 2017, 27(7): 529 – 539.

[23] LI C, LEI T, WANG X, et al. Dynamics editing based on offset boosting. *Chaos*, 2020, 30(6): 063124.

[24] JAFARI S, AHMADI A, KHALAF A, et al. A new hidden chaotic attractor with extreme multi-stability. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2018, 89: 131 – 135.

[25] MAHMOUD G M, MAHMOUD E E, AHMED M E. On the hyperchaotic complex Lü system. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 58(4): 725 – 738.

[26] HUANG L, WANG Y, LEI T, et al. A novel memristor chaotic system with a hidden attractor and multistability and its implementation in a circuit. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 2021(10): 7457220.

[27] RICHTER H. Controlling the lorenz system: Combining global and local schemes. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, 12(13): 2375 – 2380.

作者简介:

张芳芳 副教授, 目前研究方向为混沌控制与混沌保密通信、非线性控制、混沌神经网络等, E-mail: zhff4u@163.com;

张帅虎 硕士研究生, 目前研究方向为混沌控制, E-mail: zhangshuaihu123@163.com;

马凤英 教授, 目前研究方向为工业系统检测与控制、工业系统电磁兼容性研究、嵌入式系统等, E-mail: mafengy@163.com;

纪 鹏 副教授, 目前研究方向为人–机器人交互技术、机器人轨迹跟踪控制、识别与跟踪等, E-mail: jipeng@qlu.edu.cn;

寇 磊 博士, 目前研究方向为故障诊断、人工智能、机器学习、混沌加密等, E-mail: koulei1991@hotmail.com;

李春彪 教授, 目前研究方向为非线性动力学、忆阻器、微弱信号检测等, E-mail: chunbiaolee@nuist.edu.cn;

雷腾飞 副教授, 目前研究方向为忆阻计算及应用、分数阶非线性系统的分析与控制、航空开关电源技术等, E-mail: leitengfei2017@qlit.edu.cn.