

一种快速有限时间收敛的轨迹跟踪引导律

黄宴委, 林涛, 黄文超[†], 陈少斌

(福州大学 电气工程与自动化学院, 福建 福州 350116)

摘要: 针对参考轨迹曲率变化大导致前视距离(LAD)调整不及时, 使得无人船(USV)轨迹跟踪误差收敛慢的问题, 本文利用轨迹跟踪几何关系, 建立位置跟踪误差动态系统, 引入曲率参数设计一种新型的时变前视距离(NTLAD), 提出一种快速有限时间收敛的轨迹跟踪引导律(FFTC-GL), 包括期望艏向引导律和期望巡航速度引导律研究, 以快速准确跟踪大范围曲率的轨迹. 首先, 构造NTLAD的稳定约束条件, 结合图解法求解NTLAD函数, 实现法向误差快速有限时间收敛, 并且引入曲率参数, 快速准确地跟踪不同曲率的轨迹. 其次, 基于切向误差的有限时间技术, 设计快速有限时间速度引导律, 实现切向误差动态系统的有限时间稳定. 最后, 通过对比有限时间上确界, 表明引导律对位置跟踪误差收敛的快速性. 轨迹跟踪仿真表明FFTC-GL能够在有限时间内跟踪参考轨迹, 保证曲线拐点位置跟踪误差快速收敛.

关键词: 无人船; 轨迹跟踪; 引导律; 快速有限时间收敛; 时变前视距离

引用格式: 黄宴委, 林涛, 黄文超, 等. 一种快速有限时间收敛的轨迹跟踪引导律. 控制理论与应用, 2023, 40(6): 965–976

DOI: 10.7641/CTA.2022.20002

Guidance law with fast finite time convergence for trajectory tracking

HUANG Yan-wei, LIN Tao, HUANG Wen-chao[†], CHEN Shao-bin

(College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou Fujian 350116, China)

Abstract: Due to look-ahead distance (LAD) is not adjusted in time to track the reference trajectory with a large range of curvature, and unmanned surface vehicle (USV) tracks the trajectory with a slow convergence. The position tracking error of dynamic systems is established by the geometric relationship of trajectory tracking, guidance law with fast finite time convergence (FFTC-GL) is proposed with a novel time-varying LAD (NTLAD) with curvature parameters to speed trajectory tracking. FFTC-GL includes the desired heading guidance law and the desired cruise speed guidance law. Firstly, NTLAD function is solved by graphical method based on the stability constraints of NTLAD to realize fast finite time convergence of cross-error, and the curvature parameter is introduced to track the curve trajectory in a large range of curvature. Secondly, the fast finite time speed guidance law is designed by the finite time term of along-error to realize the finite time stability of along-error dynamic system. Moreover, the upper bound of the convergence time is deduced for FFTC-GL. Finally, simulations of the trajectory tracking for USV indicate that, FFTC-GL can track the reference trajectory quickly and accurately, both for straight lines and curve with a large range of curvature.

Key words: unmanned surface vehicle; trajectory tracking; guidance law; fast finite time convergence; time-varying look-ahead distance

Citation: HUANG Yanwei, LIN Tao, HUANG Wenchao, et al. Guidance law with fast finite time convergence for trajectory tracking. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(6): 965–976

1 引言

引导律(guidance law, GL)设计是实现无人船(unmanned surface vehicles, USV)轨迹跟踪的基础, 包括艏向引导律和速度引导律(speed guidance law, SGL)^[1]. 目前已经有许多艏向引导律, 包括视线(line-of-sight, LOS)引导法、纯跟踪法^[2]、矢量场引导法^[3]

等. 由于对高频噪声的敏感性低、计算量小, LOS引导法在轨迹跟踪中得到了广泛应用^[4–5]. 传统几何法(geometric method, GM)设计LOS(GM-LOS)包括侧滑角、前视距离(look-ahead distance, LAD)和法向误差3个关键参量^[6], 但GM-LOS是一种理想化方法, 跟踪参考轨迹存在较大的误差. 于是, 基于GM-LOS提

收稿日期: 2022–01–02; 录用日期: 2022–10–28.

[†]通信作者. E-mail: ehwenc@fzu.edu.cn; Tel.: +86 591-22866596.

本文责任编辑: 张友民.

国家自然科学基金项目(51977040), 福建省工业科技引导项目(2019H0007)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (51977040) and the Fujian Industrial Science and Technology Guidance Project (2019 H0007).

由于USV的前后不对称特性使得偏航力矩 τ_r 同时影响横荡运动 \dot{v} 和艏摇运动 \dot{r} , 给控制器的设计和系统稳定性分析带来困难. 为了消除 τ_r 对 \dot{v} 的影响, 重新定义横向速度 $\bar{v} = v + (m_{23}/m_{22})r$ [21], 将USV的重心 $O_c(x, y)$ 移动到摆动中心 $O_b(\bar{x}, \bar{y})$, 前后不对称USV的运动学模型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = u \cos \psi - \bar{v} \sin \psi, \\ \dot{\bar{y}} = u \sin \psi + \bar{v} \cos \psi, \\ \dot{\psi} = r. \end{cases} \quad (1)$$

前后不对称USV的动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}\bar{v}r + a_{12}r^2 + a_{13}u + a_{14}(\tau_u + \tau_{uw}), \\ \dot{\bar{v}} = a_{21}ur + a_{22}\bar{v} + a_{23}r + a_{24}\tau_{vw}, \\ \dot{r} = (a_{31}\bar{v} + a_{32}r)u + a_{33}\bar{v} + a_{34}r + \\ a_{35}\tau_{vw} + a_{36}(\tau_r + \tau_{rw}), \end{cases} \quad (2)$$

式中: $a_{11} = m_{22}/m_{11}$, $a_{12} = (m_{32} - m_{23})/2m_{11}$, $a_{13} = -d_{11}/m_{11}$, $a_{14} = 1/m_{11}$, $a_{21} = -m_{11}/m_{22}$, $a_{22} = -d_{22}/m_{22}$, $a_{23} = (d_{22}m_{23} - d_{23}m_{22})/m_{22}^2$, $a_{24} = 1/m_{22}$.

设 $\Gamma = m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}$, 则 $a_{31} = m_{22}(m_{11} - m_{22})/\Gamma$, $a_{32} = 0.5(m_{23} - m_{32})(m_{22} - 2m_{11})/\Gamma$, $a_{33} = (d_{22}m_{32} - d_{32}m_{22})/\Gamma$, $a_{34} = (m_{22}m_{32}d_{23} - m_{22}m_{22}d_{33} + m_{22}m_{23}d_{32} - m_{23}m_{32}d_{22})/(m_{22}\Gamma)$, $a_{35} = -m_{32}/\Gamma$, $a_{36} = m_{22}/\Gamma$. τ_r 为偏航力矩, τ_u 为纵向推力, τ_{uw} , τ_{vw} , τ_{rw} 分别为作用在纵荡运动 \dot{u} , 横荡运动 $\dot{\bar{v}}$ 和艏摇运动 \dot{r} 上的扰动. 其中 m_{11} , m_{22} , m_{33} , m_{23} , m_{32} 是惯性系数; d_{11} , d_{22} , d_{33} , d_{23} , d_{32} 是阻尼系数.

2.2 位置跟踪误差动态系统

由图1几何关系, 切向误差 \bar{x}_e 和法向误差 \bar{y}_e 为

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_e \\ \bar{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_p(t) & \sin \psi_p(t) \\ -\sin \psi_p(t) & \cos \psi_p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} - x_d(t) \\ \bar{y} - y_d(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中 $\psi_p(t)$ 为

$$\psi_p(t) = \arctan \frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)}. \quad (4)$$

式(3)对时间 t 求导, 则位置跟踪误差动态系统为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_e &= -u_p + r_p \bar{y}_e + u \cos(\psi - \psi_p) - \bar{v} \sin(\psi - \psi_p) = \\ & -u_p + r_p \bar{y}_e + \bar{U} \cos(\psi - \psi_p + \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}}_e &= -r_p \bar{x}_e + u \sin(\psi - \psi_p) + \bar{v} \cos(\psi - \psi_p) = \\ & -r_p \bar{x}_e + \bar{U} \sin(\psi - \psi_p + \beta), \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $u_p = \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2} > 0$ 为期望轨迹点航速, $r_p = \dot{\psi}_p(t)$ 为期望艏摇角速度.

轨迹跟踪引导律包括艏向引导律和速度引导律. 针对LOS引导律难以快速准确地跟踪大范围曲率的轨迹, 本文引入曲率参量设计一种新型的时变前视距

离, 提出FFTC-LOS和FTC-SGL, 实现轨迹跟踪误差动态系统(5)–(6)在有限时间内渐近稳定且能够保证跟踪大范围曲率的轨迹位置误差快速收敛.

3 FFTC-LOS艏向引导律

LOS包括法向误差、前视距离、侧滑角等3个因素, 主要有几何法[6]、积分法[7]等设计方法. 几何法在大曲率轨迹跟踪易因前视距离调节不及时, 增大了 \bar{y}_e , 更适用于直线跟踪; 积分法假设侧滑角很小, 适用于跟踪曲率缓变的曲线或直线轨迹. 针对USV路径跟踪, 在假设侧滑角很小的情况下, 构造法向误差的有限时间收敛函数和模糊前视距离, 提出了一种FTC-LOS引导律[11],

$$\psi_d = \psi_p - \arctan \frac{\text{sig}^\rho \bar{y}_e}{\Delta_f} - \beta, \quad (7)$$

式中: 有限时间项 $\text{sig}^\rho \bar{y}_e = |\bar{y}_e|^\rho \text{sgn} \bar{y}_e$, $0 < \rho < 1$, Δ_f 为模糊前视距离, 采用法向误差和其导数制定模糊规则, 取得了很好的控制效果. 但未考虑到轨迹曲率变化. 本文针对大范围曲率变化的轨迹, 设计一种NT-LAD来改进FTC-LOS, 实现FFTC-LOS,

$$\psi_d = \psi_p - \arctan \frac{k \text{sig}^\rho \bar{y}_e}{\Delta_d} - \beta, \quad (8)$$

式中: Δ_d 为NTLAD, $k > 1$ 为常数. FFTC-LOS可实现快速调节前视距离以适应大范围曲率的轨迹跟踪, 更能满足轨迹跟踪技术对时间快速性的要求.

3.1 Δ_d 的稳定约束条件

Δ_d 需满足FFTC-LOS稳定性条件, 定义关于位置误差的Lyapunov函数

$$V = V_1 + V_2, \quad (9)$$

式中 $V_1 = \frac{1}{2}\bar{y}_e^2$ 和 $V_2 = \frac{1}{2}\bar{x}_e^2$ 分别表示关于 \bar{y}_e 和 \bar{x}_e 的Lyapunov函数.

V_1 对时间求导, 并结合式(6)(8)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -r_p \bar{x}_e \bar{y}_e + \bar{U} \cdot \\ & \sin(\psi - \psi_d - \arctan \frac{k \text{sig}^\rho \bar{y}_e}{\Delta_d}) \bar{y}_e = \\ & -r_p \bar{x}_e \bar{y}_e - \bar{U} \frac{\cos(-\psi_e) k |\bar{y}_e|^{1+\rho}}{\sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}} \cdot \\ & [1 - \frac{\Delta_d \tan(-\psi_e)}{k \text{sig}^\rho \bar{y}_e}], \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\psi_e = \psi_d - \psi$ 为艏向跟踪误差.

引理1 设计的有限时间控制律能够让 ψ_e 渐近稳定, 即 $|\psi_e| < \varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 之间任意小的正数[8].

V_2 对时间求导, 并结合式(5)可得

$$\dot{V}_2 = r_p \bar{y}_e \bar{x}_e + (\bar{U} \cos(\psi - \psi_p + \beta) - u_p) \bar{x}_e. \quad (11)$$

由式(10)–(11)可知 $r_p \bar{y}_e \bar{x}_e$ 项可以相互抵消, 要使

得 $\dot{V} < 0$, 令 \dot{V}_1 中 $1 - \Delta_d \tan(-\psi_e)/k \text{sig}^\rho \bar{y}_e > 1$, 有

$$\frac{1}{\Delta_d} > \frac{\tan(-\psi_e)}{k \text{sig}^\rho \bar{y}_e}. \quad (12)$$

Δ_d 满足式(12)成立可保证FFTC-LOS的渐近稳定.

3.2 Δ_d 设计

Δ_d 设计是艏向引导律设计中的关键一环, 主要有常数型^[14]、复合型^[18, 22]等. 常数型前视距离不能自适应变化, 灵活性低; 复合型前视距离设计中增加轨迹曲率, 巡航速度和位置误差等因素, 以直观方式分析轨迹跟踪误差与曲率和速度的关系. 这些前视距离缺乏理论分析基础, 也未分析位置跟踪误差的有限时间收敛性.

为了实现大范围曲率的轨迹跟踪, Δ_d 设计为

$$\Delta_d = \Delta_1 f(|\bar{y}_e|) + \Delta_2, \quad (13)$$

式中: $f(|\bar{y}_e|)$ 是时变前视距离函数, 且 $f(|\bar{y}_e|) \in [0, 1]$, Δ_1 和 Δ_2 为曲率变参量.

3.2.1 图解法设计 $f(|\bar{y}_e|)$

根据几何关系, 理想的艏向角 ψ 为^[8]

$$\psi = \psi_p - \arctan \frac{\bar{y}_e}{\Delta} - \beta, \quad (14)$$

式中: Δ 为前视距离参量, 且 $\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_{\max}$, 其中 $\Delta_{\min} > 0$, $\Delta_{\max} > 0$ 为正整数. 采用理想艏向角代替实际反馈艏向角是为了令 Δ_d 和理想几何法中的 Δ 相关联, 获得一个可参考对象, 使得 Δ_d 自适应变化, 以便满足引导子系统的有限时间稳定性.

令 $0 < \Delta_d \leq \Delta$, 式(8)减式(14)可得

$$-\psi_e = \arctan \frac{k \text{sig}^\rho \bar{y}_e}{\Delta_d} - \arctan \frac{\bar{y}_e}{\Delta}. \quad (15)$$

选择合适的 k 和 ρ , 令 $|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| > |\bar{y}_e|$, 则理想艏向角与FFTC-LOS的艏向差值不等式满足

$$\arctan \frac{|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|}{\Delta_d} - \arctan \frac{|\bar{y}_e|}{\Delta} \geq |-\psi_e|. \quad (16)$$

对式(16)两边取tan可得

$$\frac{|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| \Delta - |\bar{y}_e| \Delta_d}{\Delta \Delta_d + |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| |\bar{y}_e|} \geq \tan |-\psi_e|. \quad (17)$$

由式(12)可知, 一定存在 $0 < \gamma < 1/\Delta_d$ 满足

$$\tan |-\psi_e| = \gamma |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|. \quad (18)$$

式(18)代入式(17)可得

$$\begin{aligned} & |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| \Delta - |\bar{y}_e| \Delta_d \geq \\ & \gamma |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| \Delta \Delta_d + \gamma |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|^2 |\bar{y}_e|. \end{aligned} \quad (19)$$

化简式(19)可得

$$\Delta \geq \frac{\Delta_d}{(1 - \gamma \Delta_d)} \frac{|\bar{y}_e|}{|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|} +$$

$$\frac{\gamma}{(1 - \gamma \Delta_d)} |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| |\bar{y}_e|. \quad (20)$$

对式(20)分类讨论, 若 $\frac{\Delta_d}{(1 - \gamma \Delta_d)} > \frac{\gamma}{(1 - \gamma \Delta_d)}$, 则

$$\begin{aligned} \Delta & \geq \frac{\gamma}{(1 - \gamma \Delta_d)} \left(\frac{|\bar{y}_e|}{|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|} + |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| |\bar{y}_e| \right) \geq \\ & 2 \frac{\gamma}{(1 - \gamma \Delta_d)} |\bar{y}_e|. \end{aligned} \quad (21)$$

设 $\gamma = 1/(n \Delta_d)$, 且 $n > 1$, 结合式(21)可得

$$f(|\bar{y}_e|) \geq \frac{2}{(n-1) \Delta \Delta_1} |\bar{y}_e| - \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (22)$$

若 $\frac{\Delta_d}{(1 - \gamma \Delta_d)} < \frac{\gamma}{(1 - \gamma \Delta_d)}$, 则

$$\begin{aligned} \Delta & \geq \frac{\Delta_d}{(1 - \gamma \Delta_d)} \left(\frac{|\bar{y}_e|}{|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|} + |k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| |\bar{y}_e| \right) \geq \\ & 2 \frac{\Delta_d}{(1 - \gamma \Delta_d)} |\bar{y}_e|. \end{aligned} \quad (23)$$

由式(23)可得

$$f(|\bar{y}_e|) \leq \frac{(n-1) \Delta}{2n \Delta_1} \frac{1}{|\bar{y}_e|} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (24)$$

根据式(22)(24), 利用图解法选择合适的 $f(|\bar{y}_e|)$.

如图2, 定义曲线为 $f_1(|\bar{y}_e|) = \frac{(n-1) \Delta}{2n \Delta_1} \frac{1}{|\bar{y}_e|} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, 曲线 $f_1(|\bar{y}_e|)$ 与横轴的交点为 $(a_2, 0) = ((n-1) \Delta / 2n \Delta_2, 0)$, 设直线为 $g(|\bar{y}_e|) = 2 / (n-1) \Delta \Delta_1 |\bar{y}_e| - \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, 直线 $g(|\bar{y}_e|)$ 与横轴的交点为 $((n-1) \Delta \Delta_2 / 2, 0)$, 若 $(n-1) \Delta / 2n \Delta_2 < (n-1) \Delta \Delta_2 / 2$, 则 $\Delta_2 > \sqrt{1/n}$, 故选择 $g(|\bar{y}_e|) = f_3(|\bar{y}_e|)$, 交点为 $(a_3, 0)$; 若 $(n-1) \Delta / 2n \Delta_2 > (n-1) \Delta \Delta_2 / 2$, 则 $\Delta_2 < \sqrt{1/n}$, 则选择 $g(|\bar{y}_e|) = f_2(|\bar{y}_e|)$, 交点为 $(a_1, 0)$.

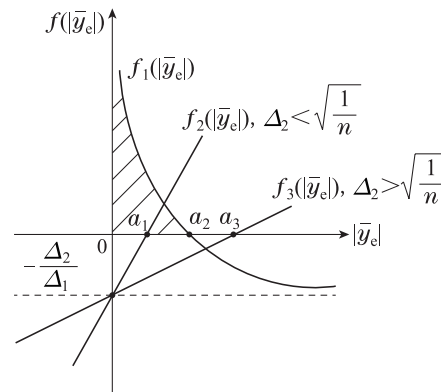


图2 图解法求解 $f(|\bar{y}_e|)$

Fig. 2 Graphical method to solve $f(|\bar{y}_e|)$

通常 $\Delta_2 > \sqrt{1/n}$, 且 $f(|\bar{y}_e|) > 0$, 故可选择 $f(|\bar{y}_e|)$ 为图2中的阴影部分, 即

$$f(|\bar{y}_e|) = k_2 e^{-\frac{\ln(c_1 k_2)}{a_2} |\bar{y}_e|}, \quad (25)$$

式中: $0 < k_2 < 1$; $c_1 > 0$ 为充分大的正常数.

与式(7)的模糊 Δ_f , 式(14)的常值 Δ 不同的是, $f(|\bar{y}_e|)$ 的设计能够调整 \bar{y}_e 补偿 ψ_e . 由式(18)(25)可知补偿方式为: 当 $\bar{y}_e \neq 0$, 且 $|\bar{y}_e| \geq a_2$, 则 $f(|\bar{y}_e|)$ 趋于 0, $\Delta_d \approx \Delta_2$, 较小的 Δ_d 使 \bar{y}_e 快速收敛. 当 $\bar{y}_e \approx 0$, 由式(18)可知 $\tan |-\psi_e| \approx 0$, 及时修正 ψ_e . 因此, 若 \bar{y}_e 能有限时间收敛, 则 ψ_e 也能够有限时间收敛.

3.2.2 Δ_1 和 Δ_2 的变化律

为实现 Δ_d 适应时变轨迹曲率, 将 Δ_1 和 Δ_2 设计为

$$\Delta_1 = \Delta_{\max} \left(1 - k_3 \frac{c(t)}{\eta}\right), \quad (26)$$

$$\Delta_2 = \Delta_{\min} \left(1 - k_3 \frac{c(t)}{\eta}\right), \quad (27)$$

式中: $0 < k_3 < 1$; η 为轨迹曲率最大值; $c(t)$ 为轨迹曲率, $c(t)$ 表达式为

$$c(t) = \frac{|x'_d y''_d - x''_d y'_d|}{(x'^2_d + y'^2_d)^{\frac{3}{2}}}. \quad (28)$$

结合式(25)–(27), 将 Δ_d 表示为

$$\Delta_d = \Delta_{\max} \left(1 - k_3 \frac{c(t)}{\eta}\right) k_2 e^{-\frac{\ln(c_1 k_2)}{a_2} |\bar{y}_e|} + \Delta_{\min} \left(1 - k_3 \frac{c(t)}{\eta}\right). \quad (29)$$

由式(29)可知, NTLAD 的整体调节方式为: 当 \bar{y}_e 较大时, $\Delta_d = \Delta_2$, 不论 $c(t)$ 如何变化, 均以较小的 Δ_d 使 \bar{y}_e 快速收敛. 当 \bar{y}_e 较小时, $\Delta_d = \Delta_1 k_2 + \Delta_2$, 此时, 需要应对 $c(t)$ 的变化. 如式(26)–(27), 当 $c(t)$ 增大至 η 时, 则 $\Delta_1 k_2 + \Delta_2$ 减小, 采取较小的 Δ_d 跟踪大曲率拐点, 当 $c(t)$ 减小至 0 时, 则 $\Delta_1 k_2 + \Delta_2$ 增大, 采取较大的 Δ_d 跟踪平缓曲线.

然而, FFTC-LOS 仅保证法向误差快速有限时间收敛. 要满足切向误差收敛, 巡航速度的设计是关键.

4 FTC-SGL 设计

目前巡航速度的设计方法有自适应法^[19], PD 控制^[1]等. 自适应法根据曲率调整期望巡航速度, 但缺少对位置跟踪误差系统的稳定性分析. PD 法对速度项采用 PD 控制策略, 改善了系统的动态性能, 但轨迹跟踪控制要求有时间约束, 这些方法仅满足 \bar{x}_e 渐近收敛, 难以保证有限时间收敛. 因此, 引入 \bar{x}_e 的有限时间项, 设计 FTC-SGL 保证 \bar{x}_e 有限时间收敛.

假设 Δ_d 及时补偿 ψ_e , 即 Δ_d 作用下 ψ_e 很小, 则 $\sin(-\psi_e) \approx 0$, $\cos(-\psi_e) \approx 1$. 因此, 式(5)可重写为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_e &= -u_p + r_p \bar{y}_e + \bar{U} \cos(\psi - \psi_p + \beta) = \\ &= -u_p + r_p \bar{y}_e + \bar{U} \frac{\Delta_d}{\sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

引入 \bar{x}_e 的有限时间项 $k_1 \text{sig}^\rho \bar{x}_e$, $0 < k_1 < 0.5$, 设计 FTC-SGL 为

$$\bar{U}_d = \frac{(u_p - k_1 \text{sig}^\rho \bar{x}_e) \sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}}{\Delta_d}. \quad (31)$$

由式(31), 期望纵向速度 u_d 为

$$u_d = \sqrt{\bar{U}_d^2 - \bar{v}^2}. \quad (32)$$

纵向速度指令可以通过纵向速度控制器进行良好跟踪, 令 $\bar{U} = \bar{U}_d$, 将式(31)代入式(30), $\bar{x}_e \dot{\bar{x}}_e$ 可表示为

$$\begin{aligned} \bar{x}_e \dot{\bar{x}}_e &= (r_p \bar{y}_e - k_1 \text{sig}^\rho \bar{x}_e) \bar{x}_e = \\ &= (r_p \bar{y}_e - k_1 |\bar{x}_e|^\rho) \bar{x}_e = r_p \bar{y}_e \bar{x}_e - k_1 |\bar{x}_e|^{1+\rho}. \end{aligned} \quad (33)$$

由式(10)可知 $\bar{y}_e \dot{\bar{y}}_e$ 为

$$\bar{y}_e \dot{\bar{y}}_e = -r_p \bar{x}_e \bar{y}_e - \frac{\mu k \varphi |\bar{y}_e|^{1+\rho}}{\sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}}, \quad (34)$$

式中: $\varphi = 1 - \Delta_d \tan(-\psi_e) / k \text{sig}^\rho \bar{y}_e > 0$, $\mu = \bar{U} \cos(-\psi_e) > 0$.

位置误差的 Lyapunov 函数(9)的时间导数为

$$\dot{V} = \bar{x}_e \dot{\bar{x}}_e + \bar{y}_e \dot{\bar{y}}_e. \quad (35)$$

由式(33)–(34)可得

$$\dot{V} = -\frac{\mu k \varphi |\bar{y}_e|^{1+\rho}}{\sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}} - k_1 |\bar{x}_e|^{1+\rho}. \quad (36)$$

令 $\mu_1 = \min\{\mu k \varphi / \sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}, k_1\}$, 则式(36)满足

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu_1 ((\bar{x}_e^2)^{\frac{1+\rho}{2}} + (\bar{y}_e^2)^{\frac{1+\rho}{2}}) \leq \\ &= -\mu_1 (\bar{x}_e^2 + \bar{y}_e^2)^{\frac{1+\rho}{2}} = -2^{\frac{1+\rho}{2}} \mu_1 V^{\frac{1+\rho}{2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

式(37)表明系统渐近稳定.

5 收敛有限时间分析

引理 2^[11] 如果存在 $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, 且假设 $f(x)$ 连续. 若存在 $V_0(x) \geq 0$ 且满足

$$V_0(0) = 0, \dot{V}_0(x) \leq -\alpha V_0^\varepsilon(x), \quad (38)$$

式中: $\alpha > 0$, 且 $0 < \varepsilon < 1$, 那么系统有限时间稳定. 所有误差信号可以在 T_s 内收敛到 0, 满足

$$T_s(x_0) \leq \frac{V_0(x_0)^{1-\varepsilon}}{\alpha(1-\varepsilon)}. \quad (39)$$

由式(37)可知 FFTC-GL 的有限时间 T_s 为

$$T_s \leq \frac{V_0(0)^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{\mu_1(1-\rho)}. \quad (40)$$

5.1 FFTC-GL 有限时间上确界

若 $k_1 < \mu k \varphi / \sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}$, 则 $\mu_1 = k_1$, 可得 T_s 的上确界为

$$T_s \leq \frac{[\frac{1}{2}\bar{x}_e^2(0) + \frac{1}{2}\bar{y}_e^2(0)]^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{k_1(1-\rho)}. \quad (41)$$

若 $k_1 > \mu k \varphi / \sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}$, 则

$$\mu_1 = \mu k \varphi / \sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2},$$

当 $\bar{x}_e \rightarrow 0$ 且 $\bar{y}_e \rightarrow 0$, 可得

$$\lim_{\substack{\bar{x}_e \rightarrow 0 \\ \bar{y}_e \rightarrow 0}} \frac{\mu k \varphi}{\sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}} = \frac{u_p k}{\Delta_1 k_2 + \Delta_2}. \quad (42)$$

由式(42)可知, T_s 的上确界为

$$T_s \leq \frac{[\frac{1}{2}\bar{x}_e^2(0) + \frac{1}{2}\bar{y}_e^2(0)]^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{\Omega(1-\rho)}, \quad (43)$$

式中: $\Omega = u_p k / (\Delta_1 k_2 + \Delta_2)$. 当曲率 $c(t)$ 增大, 由式(26)–(27)可知 Δ_1 和 Δ_2 减小, 使得 Ω 增大. 由式(43)可知 Ω 增大, 则FFTC-GL的有限时间上确界 T_s 减小, 以保证跟踪大曲率点时收敛更快速.

5.2 FTC-LOS有限时间上确界

为对比FFTC-GL的有限时间, 计算文献[11]提出的FTC-LOS的有限时间上确界 T_{ss} . 根据文献[11], 首先需要选取 μ_2 满足

$$\mu_2 = \min\left\{\frac{u_d}{\cos \beta \sqrt{\Delta_f^2 + (\bar{y}_e + \alpha_f)^2}}, k_4\right\}, \quad (44)$$

式中: $\alpha_f = \text{sig}^\rho(|\bar{y}_e|) - \bar{y}_e$, $0 < k_4 < 1$, $0.9 < \cos \beta < 1$. 当 $\bar{x}_e \rightarrow 0$ 且 $\bar{y}_e \rightarrow 0$ 时, 假设 $u_d = \bar{U}_d$, 则

$$\mu_2 = \lim_{\substack{\bar{x}_e \rightarrow 0 \\ \bar{y}_e \rightarrow 0}} \frac{u_d}{\cos \beta \sqrt{\Delta_f^2 + (\bar{y}_e + \alpha_f)^2}} = \frac{u_p}{\cos \beta \Delta_f}, \quad (45)$$

式中: $\Delta_f = \Delta_{\min} + \Pi(\bar{y}_e, \dot{\bar{y}}_e)(\Delta_{\max} - \Delta_{\min})$, $\Pi(\bar{y}_e, \dot{\bar{y}}_e)$ 为模糊函数, 当 $\bar{y}_e = 0$, $\dot{\bar{y}}_e = 0$ 时, 应取较大的 Δ_f , 故取 $\Pi(0, 0) = 1$.

一般有 $\mu_2 < k_4$, 则FTC-LOS有限时间上确界为

$$T_{ss} \leq \frac{[\frac{1}{2}\bar{x}_e^2(0) + \frac{1}{2}\bar{y}_e^2(0)]^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{(1-\rho)u_p/\Delta_{\max}}. \quad (46)$$

式(46)中, Δ_{\max} 始终是个常值, 对于曲率快速变化的参考轨迹, FTC-LOS的有限时间上确界 T_{ss} 不作改变, 导致跟踪误差收敛慢. 但FFTC-LOS的上确界式(43)受轨迹曲率的影响能够调整收敛时间, 跟踪大范围曲率点时起到快速收敛的作用.

5.3 有限时间上确界对比

若 $k_1 > \mu k \varphi / \sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}$, 则对比式(43)和式(46)的上确界, 由式(26)–(27)可知, $\Delta_1 k_2 + \Delta_2 =$

$\Delta_{\max}(1 - k_3 \frac{c(t)}{\eta})k_2 + \Delta_{\min}(1 - k_3 \frac{c(t)}{\eta})$, 若 $c(t) = 0$, 则 $\Delta_1 k_2 + \Delta_2 = \Delta_{\max}k_2 + \Delta_{\min}$, 由于 k, k_2 满足 $k > 1$, $0 < k_2 \leq 0.5$, 则 $\Delta_{\max}k_2 + \Delta_{\min} < \Delta_{\max}$, 满足

$$\frac{k}{\Delta_1 k_2 + \Delta_2} > \frac{1}{\Delta_{\max}}. \quad (47)$$

式(47)成立, 故FFTC-GL的有限时间上确界小, 体现了收敛快速性. 若 $0 < c(t) < \eta$, 随着曲率的增加, $\Delta_{\max}k_2 + \Delta_{\min}$ 减小, $\Delta_{\max}k_2 + \Delta_{\min} < \Delta_{\max}$ 仍成立, 则式(47)依然能够满足.

若 $k_1 < \mu k \varphi / \sqrt{[k \text{sig}^\rho \bar{y}_e]^2 + \Delta_d^2}$, 则对比式(41)和式(46)的上确界, 通常 $u_p \leq 2 \text{ m/s}$, $\Delta_{\max} \geq 6^{[9]}$, 选择合适的 k_1 , 满足 $k_1 > u_p / \Delta_{\max}$, 则

$$k_1 > \frac{1}{\Delta_{\max}} u_p. \quad (48)$$

式(48)成立, 即FFTC-GL的上确界小于FTC-LOS, 满足收敛快速性. 通过有限时间上确界的分析对比式(47)和式(48), 意味着FFTC-GL的有限时间上确界更小, 可保证位置误差动态系统(5)–(6)有限时间快速收敛. FFTC-GL作为引导子系统提供轨迹跟踪的期望艏向和期望速度, 要设计控制子系统使得USV跟踪引导信号, 以实现级联系统的稳定性.

6 有限时间控制律设计

本节计算控制输入 τ_r 和 τ_u . 由式(2)可知速度误差和艏摇角速度状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_e \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_u(\cdot) + \delta_{fu} + \tilde{\tau}_u \\ g_r(\cdot) + \delta_{fr} + a_{36}\tau_r \end{bmatrix}, \quad (49)$$

式中: $g_u = -a_{11}\bar{v}r - a_{12}r^2 + a_{13}u_e$, $\delta_{fu} = a_{14}\tau_{uw}$, $\tilde{\tau}_u = -a_{13}u_d - a_{14}\tau_u$, $g_r = (a_{31}\bar{v} + a_{32}r)u + a_{33}\bar{v} + a_{34}r$, $\delta_{fr} = a_{35}\tau_{vw} + a_{36}\tau_{rw}$.

6.1 偏航力矩 τ_r 设计

选择滑模面为

$$s_1 = b_0\psi_e + b_1\dot{\psi}_e, \quad (50)$$

式中: b_0 和 b_1 是正常数. 假设在一个采样周期内 $\dot{\psi}_d = 0$, 则 s_1 的导数满足

$$\dot{s}_1 = -b_1[g_r(\cdot) + \delta_{fr} + a_{36}\tau_r] - b_0r. \quad (51)$$

选择Lyapunov函数 $V_3 = \frac{1}{2}s_1^2$, V_3 的导数为

$$\dot{V}_3 = s_1[-b_1(g_r(\cdot) + \delta_{fr} + a_{36}\tau_r) - b_0r]. \quad (52)$$

设计偏航力矩 τ_r 为

$$\tau_r = \frac{1}{a_{36}}[-\frac{b_0}{b_1}r - g_r(\cdot) - \delta_{fr} + k_5 \text{sig}^{\rho_1} s_1], \quad (53)$$

式中: $k_5 > 0$ 为正常数. 将式(53)代入式(52), 可得 $\dot{V}_3 = -b_1 k_5 \text{sig}^{\rho_1} s_1 \cdot s_1 = -b_1 k_5 |s_1|^{\rho_1+1} < 0$, 则艏向跟踪误差 ψ_e 在控制律(53)作用下能够渐近稳定, 说明 ψ_e 是

有界的, 满足艏向引导律设计第3.1节中的引理1.

6.2 纵向推力 τ_u 设计

选择滑模面为

$$s_2 = b_2 u_e + b_3 \int_0^t u_e d\tau, \quad (54)$$

式中 b_2 和 b_3 是正常数. 假设在一个采样周期内 $\dot{u}_d = 0$, 则 s_2 的导数满足

$$\dot{s}_2 = b_2 [g_u(\cdot) + \delta_{fu} + \tilde{\tau}_u] + b_3 u_e. \quad (55)$$

选择Lyapunov函数 $V_4 = \frac{1}{2} s_2^2$, V_4 的导数为

$$\dot{V}_4 = s_2 [b_2 (g_u(\cdot) + \delta_{fu} + \tilde{\tau}_u) + b_3 u_e]. \quad (56)$$

设计 $\tilde{\tau}_u$ 为

$$\tilde{\tau}_u = -\frac{b_3}{b_2} u_e - g_u(\cdot) - \delta_{fu} - k_6 \text{sig}^{\rho_1} s_2, \quad (57)$$

式中: $k_6 > 0$ 为正常数. 将式(57)代入式(56), 可得 $\dot{V}_4 = -b_2 k_6 \text{sig}^{\rho_1}(s_2) s_2 = -b_2 k_6 |s_2|^{\rho_1+1} < 0$, 则纵向速度跟踪误差 u_e 在控制律(57)作用下能够渐近稳定, 说明 u_e 有界.

6.3 控制系统有限时间分析

令 $\mu_3 = \min\{b_1 k_5, b_2 k_6\}$, $V_5 = V_3 + V_4$, 则 V_5 导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &= -b_1 k_5 |s_1|^{\rho_1+1} - b_2 k_6 |s_2|^{\rho_1+1} \leq \\ &- \mu_3 (s_1^2 + s_2^2)^{\frac{\rho_1+1}{2}} = -2^{\frac{\rho_1+1}{2}} \mu_3 V_5^{\frac{\rho_1+2}{2}}. \end{aligned} \quad (58)$$

根据引理2可知控制子系统的有限时间 T_c 为

$$T_c \leq \frac{V_5(0)^{\frac{1-\rho_1}{2}} 2^{\frac{1-\rho_1}{2}}}{\mu_3(1-\rho_1)}. \quad (59)$$

由式(59)可得控制系统在有限时间内稳定. 因此, 在控制律(53)(57)作用下, 艏向和速度状态能够在有限时间内跟踪FFTC-GL提供的引导期望值 u_d 和 ψ_d , 说明艏向跟踪误差 ψ_e 和纵向速度跟踪误差 u_e 在有限时间内是有界的.

7 级联系统稳定

设 $x_1 = [\bar{x}_e \ \bar{y}_e]^T$, $x_2 = [u_e \ \psi_e]^T$, 由式(33)–(34)以及式(49)可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} r_p \bar{y}_e - k_1 |\bar{x}_e|^\rho \\ -r_p \bar{x}_e - \frac{\mu k |\bar{y}_e|^\rho}{\sqrt{(k \text{sig}^\rho \bar{y}_e)^2 + \Delta_d^2}} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu k \frac{\Delta_d \tan(-\psi_e)}{k \text{sig}^\rho \bar{y}_e} |\bar{y}_e|^\rho}{\sqrt{(k \text{sig}^\rho \bar{y}_e)^2 + \Delta_d^2}} \end{bmatrix} = \\ f_1(t, x_1) + g(t, x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} \dot{u}_e \\ \dot{\psi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_u(\cdot) + \delta_{fu} + \tilde{\tau}_u \\ -r \end{bmatrix} = f_2(t, x_2). \end{cases} \quad (60)$$

通过FFTC-GL引导子系统和控制子系统的稳定性分析易知 $f_1(t, x_1)$, $f_2(t, x_2)$ 满足有限时间收敛, 故满足附件引理3的条件1)–2).

令 $V_6(t, x_1) = \frac{1}{2} \bar{x}_e^2 + \frac{1}{2} \bar{y}_e^2$, 由 $f_1(t, x_1)$ 子系统得

$$\dot{V}_6|_{\dot{x}_1=f_1(t,x_1)}(t, x_1) = -k_7 |\bar{x}_e|^{1+\rho} - k_8 |\bar{y}_e|^{1+\rho}, \quad (61)$$

式中: $k_8 = \frac{\mu k}{\sqrt{(k \text{sig}^\rho \bar{y}_e)^2 + \Delta_d^2}}$, 且 $\mu_4 = \min\{k_7, k_8\}$.

V_6 对 x_1 求导可得

$$\frac{\partial V_6(t, x_1)}{\partial x_1} = \|x_1\|. \quad (62)$$

存在函数 $\pi_1(s) = \frac{1}{4} s^2$, $\pi_2(s) = s^2$, $\pi_3(s) = 3s$,

及

$$P(s) = \begin{cases} \mu_4 \sqrt{s}, & s \geq 1, \\ \mu_4 s^2, & s < 1 \end{cases} \quad (63)$$

满足

$$\begin{cases} \pi_1(\|x_1\|) \leq V_6(t, x_1) \leq \pi_2(\|x_2\|), \\ \dot{V}_6|_{\dot{x}_1=f_1(t,x_1)}(t, x_1) \leq -P(\|x_1\|), \\ \left\| \frac{\partial V_6(t, x_1)}{\partial x_1} \right\| \leq \pi_3(\|x_1\|). \end{cases} \quad (64)$$

因此, 由式(64)可知满足了附录引理3的条件3).

由式(60)可知

$$\begin{aligned} \|g(t, x_1, x_2)\| &= \left| \frac{\mu k \frac{\Delta_d \tan(-\psi_e)}{k \text{sig}^\rho \bar{y}_e} |\bar{y}_e|^\rho}{\sqrt{(k \text{sig}^\rho \bar{y}_e)^2 + \Delta_d^2}} \right| \leq \\ &|\bar{U} \cos(-\psi_e) \tan(-\psi_e)| \leq \\ &\bar{U}_{\max} |\psi_e| \leq \bar{U}_{\max} \|x_2\| = \\ &\gamma(\|x_2\|) \pi_4(\|x_1\|). \end{aligned} \quad (65)$$

因此, 存在非负定连续函数 $\gamma(\|x_2\|) = \bar{U}_{\max} \|x_2\|$ 和 $\pi_4(\|x_1\|) = 1$, 且可以得到 $\pi_3(\pi_1^{-1}(s)) = 6\sqrt{s}$, $\pi_4(\pi_1^{-1}(s)) = 1$. 取 $\pi_5(s) = 7\sqrt{s}$ 使得 $\pi_5(s) \geq \pi_3(\pi_1^{-1}(s))$, $\pi_4(\pi_1^{-1}(s))$, 且满足

$$\int_\alpha^\infty \frac{1}{\pi_5(s)} ds = \infty. \quad (66)$$

因此满足了附录引理3的条件4). 基于以上分析, 引理3的4个条件全部被满足, 引导部分和控制部分组成的级联系统满足全局有限时间稳定.

8 仿真实验

在MATLAB软件中验证基于FFTC-GL的轨迹跟踪仿真实验, 包括直线轨迹跟踪和不同曲率的正弦曲线轨迹跟踪. 定义USV的模型参数为^[23]: $m_{11} = 25.8$, $m_{22} = 33.8$, $m_{33} = 2.76$, $m_{23} = m_{32} = 6.2$, $d_{11} = 27$, $d_{22} = 17$, $d_{33} = 0.5$, $d_{23} = 0.2$, $d_{32} = 0.5$. 设置执行器输入饱和上下界, $0 < \tau_u < 600 \text{ N}$, $|\tau_r| < 600 \text{ N} \cdot \text{m}$.

为了模拟真实的海洋环境,定义时变扰动为^[24]

$$\begin{aligned} \tau_{uw} &= -0.2 \cos t \cos(1.5t), \tau_{vw} = 0.01 \sin(0.1t), \\ \tau_{rw} &= -0.3 \sin(2t) \cos(2.3t). \end{aligned}$$

轨迹跟踪控制系统离不开控制器调节艏向和速度,通过设计滑模面计算出有限时间控制律.控制律(53)的参数为 $b_0 = 50, b_1 = 2, k_5 = 100, \rho_1 = 0.8$,控制律(57)的参数为 $b_2 = 1, b_3 = 1, k_6 = 12, \rho_1 = 0.8$.FFTC-GL的参数设置步骤为:

步骤1 设置式(8)中的参数为 $k = 2, \rho = 0.8$.选择合适的 k 和 ρ ,以保证 $|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| > |\bar{y}_e|$.

步骤2 设置式(25)中的参数为 $k_2 = 0.5, c_1 = 100, n = 8$.其中,为了 $f(|\bar{y}_e|)$ 接近交点 $(a_2, 0)$,需要 c_1 取较大值,可取 $c_1 = 10^q, q \geq 2$; k_2 是当 $\bar{y}_e = 0$ 时, $f(|\bar{y}_e|)$ 与纵轴的交点,保证式(25)包含于图2中阴影部分;通常 $\Delta_2 > \sqrt{1/n}$,只需取合适的 n .

步骤3 设置式(26)–(27)中的参数为 $\Delta_{\max} = 8, \Delta_{\min} = 2, k_3 = 0.8$.其中, Δ_{\min} 和 Δ_{\max} 通常选取 $n_1 L$ ($n_1 \in [2, 4]$), L 表示船长;为响应曲率的变化, k_3 取值接近1.

步骤4 设置式(31)中的参数为 $k_1 = 0.3$.

步骤1和步骤4中, k, ρ, k_1 是FFTC-GL引导律的关键参数,通过经验获取,其他参数根据理论依据容易确定.为验证FFTC-GL的优越性,与时不变前视距离的几何法期望艏向角(TILAD-GM)^[6]、时变前视距离的几何法期望艏向角(TVLAD-GM)^[15]和FTC-LOS^[11]3种引导方法进行对比.

图3是基于FFTC-GL的轨迹跟踪控制框图,包括求解NTLAD和引入有限时间技术,设计FFTC-LOS和FTC-SGL保证轨迹跟踪误差有限时间快速收敛.

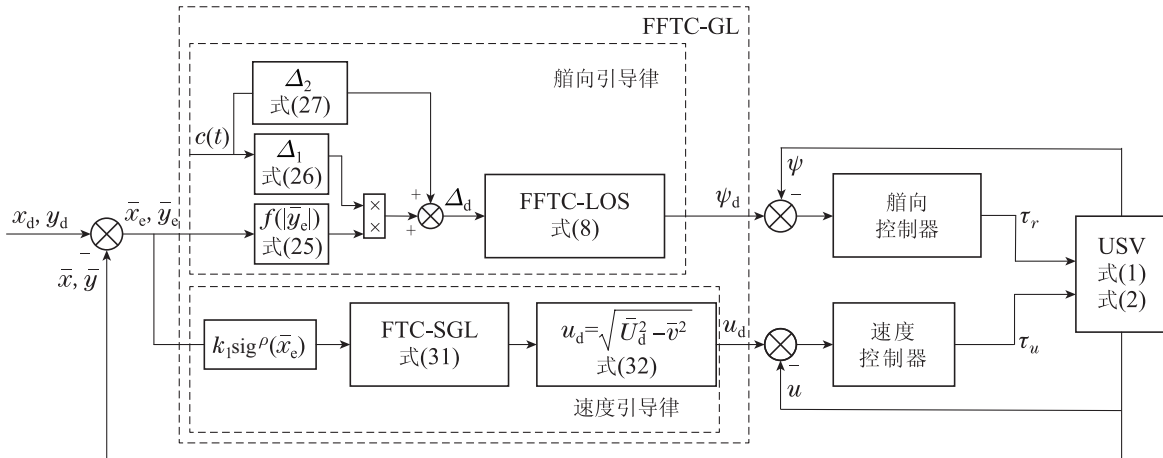


图3 基于FFTC-GL的轨迹跟踪控制框图

Fig. 3 FFTC-GL for trajectory tracking of USV

8.1 直线轨迹跟踪

设参考轨迹为 $x_d(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2})t, y_d(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2})t$. USV初始线速度及艏摇角速度为 $[u(0) \ v(0) \ r(0)] = [0 \ 0 \ 0]$. 定义初始位置及艏向角为 $[\bar{x}(0) \ \bar{y}(0) \ \psi(0)] = [0 \ 1.5 \ 0]$ 的FFTC-GL方法为FFTC-GL1, 初始位置及艏向角为 $[\bar{x}(0) \ \bar{y}(0) \ \psi(0)] = [0 \ 3 \ -\pi/10]$ 的FFTC-GL方法为FFTC-GL2.

对于FFTC-GL1方法的直线轨迹跟踪,通过计算可得 $\mu_1 = \lim_{\substack{\bar{x}_e \rightarrow 0 \\ \bar{y}_e \rightarrow 0}} \min\{ \mu k \varphi / \sqrt{(k \text{sig}^\rho \bar{y}_e)^2 + \Delta_d^2}, k_1 \} =$

$\min\{ \frac{7}{24}, 0.3 \} = \frac{7}{24}, \bar{x}_e(0) = \bar{y}_e(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}, u_p = 1$, 根据式(43)可知,FFTC-GL1的有限时间 T_s 上确界为

$$T_s \leq \frac{[\frac{1}{2} \bar{x}_e^2(0) + \frac{1}{2} \bar{y}_e^2(0)]^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{\Omega(1-\rho)} \approx 18.96 \text{ s.} \quad (67)$$

根据式(46)可知,FTC-LOS有限时间 T_{ss} 上确界为

$$T_{ss} \leq \frac{[\frac{1}{2} \bar{x}_e^2(0) + \frac{1}{2} \bar{y}_e^2(0)]^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{(1-\rho)u_p/\Delta_{\max}} \approx 43.38 \text{ s.} \quad (68)$$

由式(67)–(68)计算结果表明,FFTC-GL1方法的有限时间上确界更小,因此位置跟踪误差收敛更快速.

图4为 $|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|$ 和 $|\bar{y}_e|$ 的对比,可知条件 $|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| - |\bar{y}_e| > 0$ 成立,从而满足不等式(16).图5为直线轨迹跟踪响应过程,TILAD-GM采用常值前视距离跟踪参考轨迹,当远离参考轨迹时,常值前视距离无法调整至较小值,因此跟踪缓慢.而根据文献[6]可知,若常值前视距离始终较小,在接近参考轨迹时易发生振荡,因此常值法设计前视距离在跟踪弯曲度较大的曲线时存在偏差较大.若使用关于 \bar{y}_e 的指数时变前视距离的TVLAD-GM方法,初始阶段能够调整前视距离实现直线轨迹的快速跟踪,且初始位置误差越大这种效果越明显,但缺点是不能起到有限时间收敛的作用.相比于TVLAD-GM,FTC-LOS方法在 $\text{sig}^\rho \bar{y}_e$ 函数

作用下实现了误差的有限时间收敛. 而FFTC-GL1方法更是兼具了FTC-LOS和TVLAD-GM的优势, 直线轨迹跟踪初始阶段位置误差 \bar{y}_e 较大, 在式(25)NTLAD函数作用下, 及时调整前视距离至较小值, 实现快速收敛, 同时, 当接近参考轨迹时, $\text{sig}^\rho \bar{y}_e$ 的控制效果使得FFTC-LOS起到及时收敛的作用. 另外, 为了反应出轨迹跟踪性能与艏向和速度控制的动态过程之间的关系, 图5中增加了FFTC-GL2曲线, 以及图7中期望速度 u_{d2} 和期望艏向 ψ_{d2} , 和实际曲线 u_2, ψ_2 . 与FFTC-GL1相比, FFTC-GL2的初始位置偏离参考轨迹较远, 此时, USV先慢速调节艏向, 3s后, USV的艏向刚好能够驶入参考轨迹时再增加前进速度, 实现快速收敛. FFTC-GL2曲线案例展现出控制器随着FFTC-GL2提供的期望艏向和速度动态调节的过程.

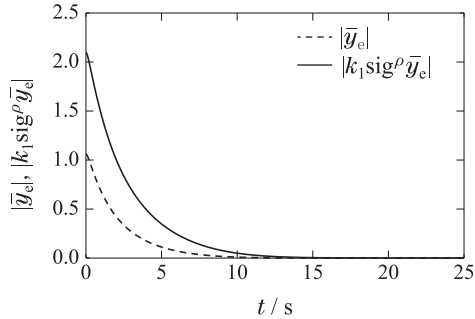


图4 $|ksig^\rho \bar{y}_e|$ 和 $|\bar{y}_e|$ 的对比

Fig. 4 Comparison of $|ksig^\rho \bar{y}_e|$ and $|\bar{y}_e|$

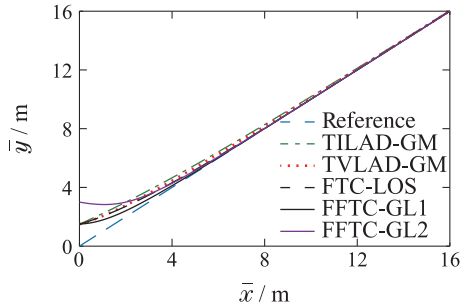
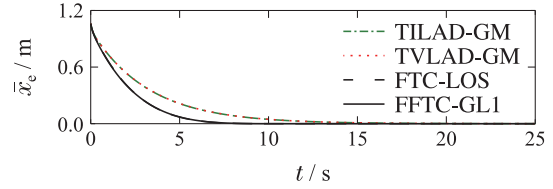


图5 直线轨迹跟踪

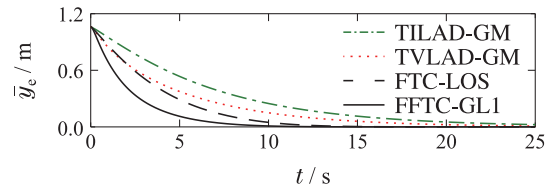
Fig. 5 Straight trajectory tracking

图6为轨迹跟踪位置误差, 如图6(a)所示, FFTC-GL1, FTC-LOS, TVLAD-GM, TILAD-GM的切向误差收敛时间分别为6.5 s, 6.5 s, 11 s, 11 s, 如图6(b)所示, 法向误差收敛时间分别为7.5 s, 12 s, 15 s和20 s, 结果表明FFTC-GL1引导下的位置跟踪误差收敛时间最短. 图7是FFTC-GL1引导下的纵向速度和艏向响应过程, 纵向控制器和艏向控制器能够及时响应FFTC-GL1提供的期望速度和期望艏向. 图8为FFTC-GL1引导下的偏航力矩 τ_r 和纵向推力 τ_u , 由于 \bar{x}_e, \bar{y}_e 初值不为0, 则 τ_u 和 τ_r 的初值不为0, 并且, 为了保证快速收敛 \bar{x}_e 和 \bar{y}_e , τ_u 和 τ_r 在初始阶段输出较大. 实际上, τ_r 受艏向初值的影响, 若初值艏向正好朝向驶入参考轨迹

方向, 则 τ_r 在执行器输出范围内. 但是, 当初始艏向偏离参考轨迹方向时, 则USV在初始阶段需要一个很大的力矩 τ_r 将其调整到参考轨迹方向. 本文考虑前者, 假定USV初始艏向为驶入参考轨迹方向.



(a) 切线误差收敛曲线



(b) 法向误差收敛曲线

图6 轨迹跟踪误差 \bar{x}_e 和 \bar{y}_e

Fig. 6 Trajectory tracking error \bar{x}_e and \bar{y}_e

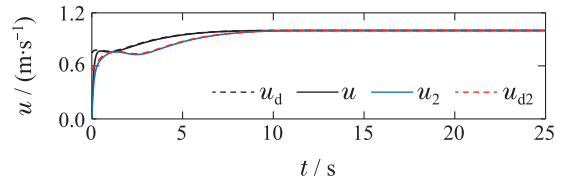


图7 纵向速度和艏向的响应

Fig. 7 Longitudinal velocity and heading response

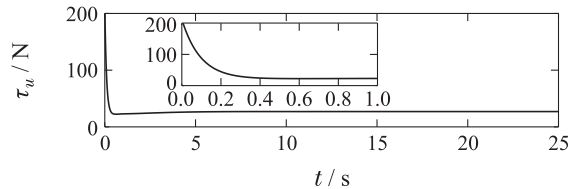
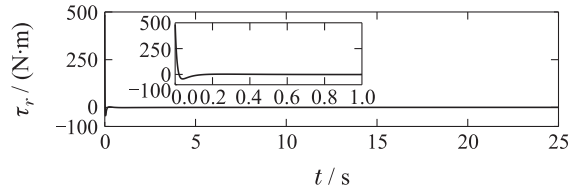


图8 偏航力矩和纵向推力

Fig. 8 Yaw moment and longitudinal thrust

8.2 正弦曲线轨迹跟踪

8.2.1 正弦曲线响应分析

设参考轨迹为 $x_d(t) = t, y_d(t) = 10 \sin(\frac{2\pi}{T} t)$, 取周期 $T = 25$ s, 最大曲率为 $\eta = 0.416(1/m)$. USV

初始线速度及艏摇角速度为 $[u(0) \ v(0) \ r(0)] = [0 \ 0 \ 0]$, 初始位置及艏向角为 $[\bar{x}(0) \ \bar{y}(0) \ \psi(0)] = [0 \ 3 \ \pi/12]$.

对于正弦曲线跟踪, $\bar{x}_e(0) = 2.79, \bar{y}_e(0) = 1.11,$

$$u_p = \frac{\sqrt{25 + 16\pi^2}}{5},$$

$$\mu_1 = \lim_{\substack{\bar{x}_e \rightarrow 0 \\ \bar{y}_e \rightarrow 0}} \min\{\mu k \varphi / \sqrt{(k \text{sig}^\rho \bar{y}_e)^2 + \Delta_d^2}, k_1\} = \min\{0.788, 0.3\} = 0.3.$$

根据式(41)可知, FFTC-GL的有限时间 T_s 上确界为

$$T_s \leq \frac{[\frac{1}{2}\bar{x}_e^2(0) + \frac{1}{2}\bar{y}_e^2(0)]^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{k_1(1-\rho)} \approx 20.76 \text{ s.} \quad (69)$$

根据式(46)可知, FTC-LOS的有限时间 T_{ss} 上确界为

$$T_{ss} \leq \frac{[\frac{1}{2}\bar{x}_e^2(0) + \frac{1}{2}\bar{y}_e^2(0)]^{\frac{1-\rho}{2}} 2^{\frac{1-\rho}{2}}}{(1-\rho)u_p/\Delta_{\max}} \approx 49.83 \text{ s.} \quad (70)$$

由式(69)–(70)计算结果可知, 跟踪正弦曲线轨迹时, FFTC-GL方法的有限时间上确界更小, 是保证位置跟踪误差快速收敛的关键.

如图9可知, 条件 $|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e| - |\bar{y}_e| > 0$ 成立, 能够满足不等式(16). 图10为周期 $T = 25 \text{ s}$ 的正弦曲线轨迹跟踪, TILAD-GM使用常值前视距离带来的跟踪误差最大, 而TVLAD-GM方法设计关于 \bar{y}_e 相关的指数时变函数代替常值前视距离能够更贴近参考轨迹, 但跟踪弯曲度大的拐点时未能及时减小前视距离, 仍然产生较大误差, 导致后续 $8 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$ 阶段跟踪不准确. 相比于TILAD-GM和TVLAD-GM, 具备有限时间收敛效果的FTC-LOS初始阶段收敛速度明显更快, 在 $8 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$ 阶段跟踪更准确, 这是 $\text{sig}^\rho \bar{y}_e$ 函数带来的效果. 显然, 在新型 Δ_d 的作用下, 当远离参考轨迹时, FFTC-GL引导律根据 \bar{y}_e 和曲率 $c(t)$ 进行调整, 在 $0 \text{ s} < t < 8 \text{ s}$ 阶段采用较小的前视距离实现快速收敛, 当 $8 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$ 阶段距离参考轨迹较近时, 选择较大的前视距离, 控制USV平滑跟踪, 前视距离的及时调整使得FFTC-GL在 $8 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$ 阶段跟踪误差最小.

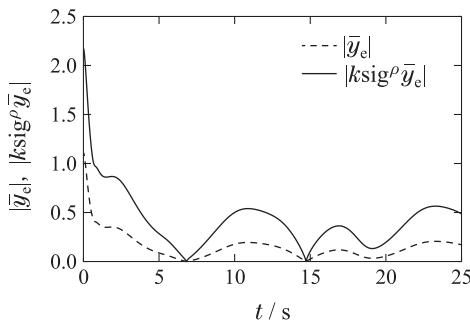


图9 $|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|$ 和 $|\bar{y}_e|$ 的对比
 Fig. 9 Comparison of $|k \text{sig}^\rho \bar{y}_e|$ and $|\bar{y}_e|$

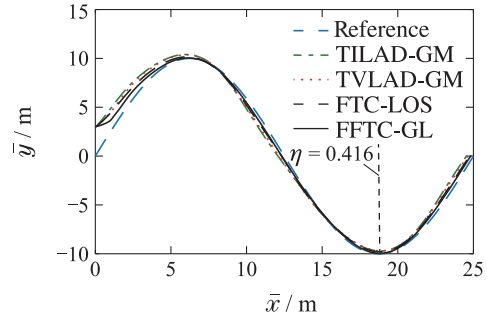


图10 正弦曲线轨迹跟踪
 Fig. 10 Sinusoidal trajectory tracking

当跟踪至点 $\eta = 0.416(1/\text{m})$ 时, 由图11位置跟踪误差可知, 在初始条件相同的情况下, FFTC-GL, FTC-LOS, TVLAD-GM和TILAD-GM方法的法向误差分别为 $0.017 \text{ m}, 0.14 \text{ m}, 0.32 \text{ m}$ 和 0.35 m , 切向误差分别为 $0.0023 \text{ m}, 0.066 \text{ m}, 0.21 \text{ m}$ 和 0.24 m , 表明 FFTC-GL方法跟踪最大曲率时的位置误差最小. 图12是 FFTC-GL引导下的纵向速度和艏向响应曲线, 表明纵向速度控制器和艏向控制器能够很好的跟踪上 FFTC-GL提供的期望速度和期望艏向. 图13为 FFTC-GL引导下的偏航力矩 τ_r 和纵向推力 τ_u , τ_u 和 τ_r 在初始阶段输出值达到最大, 其中 τ_u 达到饱和值.

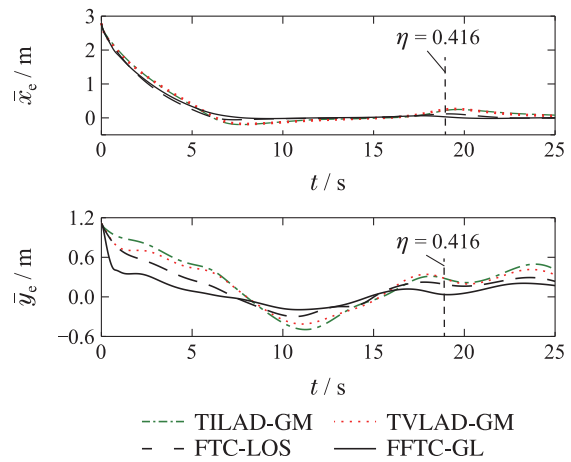


图11 轨迹跟踪误差 \bar{x}_e 和 \bar{y}_e
 Fig. 11 Trajectory tracking error \bar{x}_e and \bar{y}_e

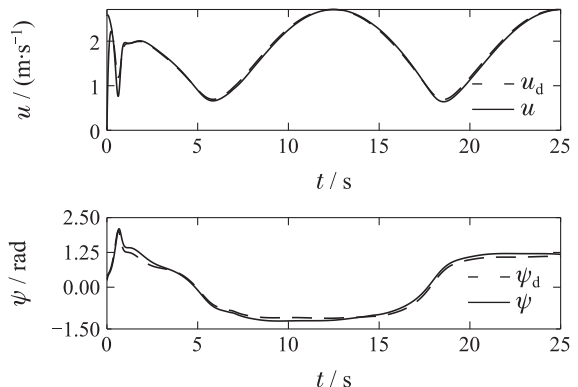


图12 纵向速度和艏向的响应
 Fig. 12 Longitudinal velocity and heading response

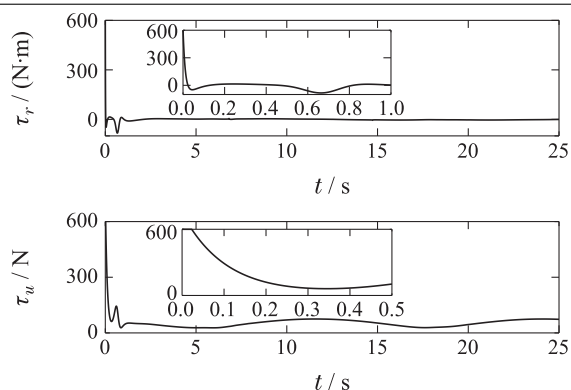


图13 偏航力矩和纵向推力

Fig. 13 Yaw moment and longitudinal thrust

8.2.2 最大曲率 η 与位置误差关系

为验证FFTC-GL能够应对不同曲率的轨迹跟踪, 设正弦曲线为 $x_d(t) = t, y_d(t) = 10 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$. 分别取周期 $T=20, 25, 30, 35, 45, 50, 60, 70$, 单位s, 对应的 η 依次为0.65, 0.416, 0.29, 0.215, 0.13, 0.105, 0.073, 0.054, 单位1/m. 随着 T 增大, 最大曲率 η 减小. USV初始线速度及艏摇角速度为 $[u(0) \ v(0) \ r(0)] = [0 \ 0 \ 0]$, 初始位置及艏向角为 $[\bar{x}(0) \ \bar{y}(0) \ \psi(0)] = [0 \ 3 \ \pi/12]$. 对比4种引导律在最大曲率 η 处的位置跟踪误差.

图14和图15分别为最大曲率 η 处的法向误差 \bar{y}_e 和切向误差 \bar{x}_e 与周期 T 的关系.

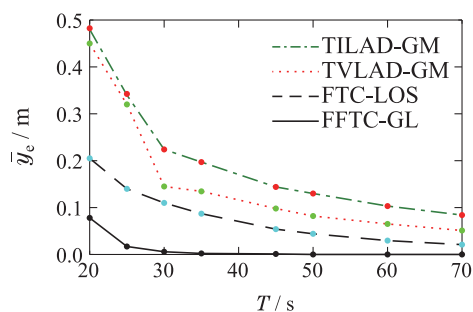


图14 \bar{y}_e 与 T 的关系

Fig. 14 The relationship between \bar{y}_e and T

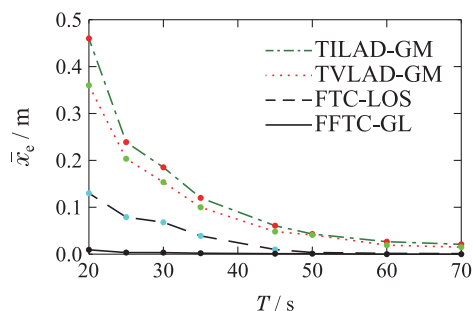


图15 \bar{x}_e 与 T 的关系

Fig. 15 The relationship between \bar{x}_e and T

图14-15中, 随着 T 增大, 4种引导律的位置跟踪误差均减小, 但FFTC-GL引导下的误差最小. 并且, 当

$T > 30$ s时, FFTC-GL引导下 \bar{y}_e 和 \bar{x}_e 都接近于0, 对于曲率变化大的轨迹跟踪, FFTC-GL应对的范围更广, 而其他3种引导律都有一定的误差, 表明FFTC-GL可以解决大范围曲率变化下的轨迹跟踪引导律设计问题.

9 总结

针对参考轨迹曲率变化大易导致前视距离调整不及时, 使得USV位置跟踪误差收敛慢的问题, 提出一种FFTC-GL用于准确跟踪大范围曲率变化的轨迹. FFTC-GL设计包括FFTC-LOS和FTC-SGL. 首先, 引入曲率参数设计NTLAD, 定义NTLAD的Lyapunov稳定约束条件, 利用图解法求解NTLAD函数, 实现法向误差快速有限时间收敛, 以快速准确地跟踪不同曲线的轨迹. 其次, 基于切向误差有限时间项, 设计FTC-SGL实现切向误差的有限时间收敛. 最后, 推导出有限时间收敛的时间上确界, 证明了FFTC-GL的位置跟踪误差收敛快速性. 轨迹跟踪仿真结果表明:

1) 直线轨迹跟踪仿真中, FFTC-GL和FTC-LOS的有限时间收敛上确界实际计算结果分别为 $T_s < 18.96$ s和 $T_{ss} < 43.38$ s, 表明FFTC-GL的收敛时间小. 同时, 仿真也验证了4种引导律中FFTC-GL的位置跟踪误差收敛时间最小, 说明FFTC-GL的有限时间收敛更快速.

2) $T = 25$ s($\eta = 0.416(1/m)$)的正弦曲线跟踪仿真中, FFTC-GL和FTC-LOS的有限时间收敛上确界实际计算结果分别为 $T_s < 19.26$ s和 $T_{ss} < 46.22$ s, 表明FFTC-GL的收敛时间小. 同时, 仿真表明FFTC-GL在最大曲率 $\eta = 0.416(1/m)$ 处位置跟踪误差比另外3种引导律都小. 并且, 当 T 从20 s变化到70 s时, 对应的 η 从0.054(1/m)增加到0.65(1/m), FFTC-GL方法的位置跟踪误差最小, 能够应对大范围曲率变化的参考轨迹.

参考文献:

- [1] JIN J C, LIU D Q, WANG D, et al. A practical trajectory tracking scheme for a twin-propeller twin-hull unmanned surface vehicle. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2021, 9(10): 1070.
- [2] TANG X H, PEI Z H, YIN S M, et al. Practical design and implementation of an autonomous surface vessel prototype navigation and control. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2020, 17(3): 1729881420919949.
- [3] CAHARIJA W, PETTERSEN K Y, CALADO P, et al. A comparison between the ILOS guidance and the vector field guidance. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, 48(16): 89 - 94.
- [4] SU Z J, ZHANG X K. Nonlinear feedback-based path following control for underactuated ships via an improved compound line-of-sight guidance. *IEEE Access*, 2021, 9(1): 81535 - 81545.
- [5] FOSSEN T I, BREIVIK M, SKJETNE R. Line-of-sight path following of underactuated marine craft. *IFAC Proceedings Volumes*, 2003, 36(21): 211 - 216.

- [6] HUANG H B, GONG G, MIAN Z, et al. A new guidance law for trajectory tracking of an underactuated unmanned surface vehicle with parameter perturbations. *Ocean Engineering*, 2019, 175: 217 – 222.
- [7] MU D D, WANG G F, FAN Y S, et al. Adaptive LOS path following for a podded propulsion unmanned surface vehicle with uncertainty of model and actuator saturation. *Applied Sciences-Basel*, 2017, 7(12): 1 – 20.
- [8] QU Y, CAI L L, XU H X. Curved path following for unmanned surface vehicles with heading amendment. *IEEE Transactions on Systems*, 2020, 51(7): 4183 – 4192.
- [9] KHALED N, CHALHOUB N G. A self-tuning guidance and control system for marine surface vessels. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1): 897 – 906.
- [10] WANG N, AHN C. Hyperbolic-tangent LOS guidance-based finite-time path following of underactuated marine vehicles. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(10): 8566 – 8575.
- [11] LI M C, GUO C, YU H M, et al. Line-of-sight-based global finite-time stable path following control of unmanned surface vehicles with actuator saturation. *ISA Transactions*, 2022, 125: 306 – 317.
- [12] YU Y L, GUO C, LI T S. Finite-time LOS path following of unmanned surface vessels with time-varying sideslip angles and input saturation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2022, 27(1): 463 – 474.
- [13] LEKKAS A M, FOSSEN T I. Integral LOS path following for curved paths based on a monotone cubic hermite spline parametrization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(6): 2287 – 2301.
- [14] FOSSEN T I, PETTERSEN K Y, GALEAZZI R. Line-of-sight path following for dubins paths with adaptive sideslip compensation of drift forces. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(2): 820 – 827.
- [15] ALEJANDRO G G, HERMAN C. Guidance and control based on adaptive sliding mode strategy for a USV subject to uncertainties. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2021, 46(4): 1144 – 1154.
- [16] MU D D, WANG G F, FAN Y S. A time-varying lookahead distance of ILOS path following for unmanned surface vehicle. *Journal of Electrical Engineering & Technology*, 2020, 15(5): 2267 – 2278.
- [17] WAN L L, SU Y X, ZHANG H J, et al. An improved integral light-of-sight guidance law for path following of unmanned surface vehicles. *Ocean Engineering*, 2020, 205: 107302.
- [18] LIU F X, SHEN Y, HE B, et al. Drift angle compensation-based adaptive line-of-sight path following for autonomous underwater vehicle. *Applied Ocean Research*, 2019, 93: 101943.
- [19] LI L G, PEI Z Z, JIN J C, et al. Control of unmanned surface vehicle along the desired trajectory using improved line of sight and estimated sideslip angle. *Polish Maritime Research*, 2021, 28(2): 18 – 26.
- [20] XIA Y K, XU K, LI Y, et al. Improved line-of-sight trajectory tracking control of under-actuated AUV subjects to ocean currents and input saturation. *Ocean Engineering*, 2019, 174: 14 – 30.
- [21] DO K D, PAN J. Global tracking control of underactuated ships with nonzero off-diagonal terms in their system matrices. *Automatica*, 2004, 41(1): 87 – 95.
- [22] LIU F X, SHEN Y, HE B, et al. 3DOF adaptive line-of-sight based proportional guidance law for path following of AUV in the presence of ocean currents. *Applied Sciences*, 2019, 9(17): 3518.

- [23] DONG Zaopeng, WAN Lei, LIAO Yulei, et al. Path following control of underactuated USV based on asymmetric model. *Ship Build China*, 2016, 57(1): 116 – 126.
(董早鹏, 万磊, 廖煜雷, 等. 基于非对称模型的欠驱动USV路径跟踪控制. *中国造船*, 2016, 57(1): 116 – 126.)
- [24] LIU L, WANG D, PENG Z H, et al. Saturated coordinated control of multiple underactuated unmanned surface vehicles over a closed curve. *Science China Information Sciences*, 2017, 60(7): 40 – 53.

附录

引理 3^[11] 对于如下级联系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(t, x_1, x_2) = f_1(t, x_1) + g(t, x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_2), \end{cases} \quad (71)$$

式中: $x_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $f(t, x_1, x_2)$ 和 $f_2(t, x_2)$ 是连续函数且分别对 (x_1, x_2) 和 x_2 是局部 Lipschitz 的. 如果 $g(t, x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2) - f(t, x_1, 0)$, 且满足如下条件:

- 1) 子系统 $f_1(t, x_1)$ 是全局有限时间稳定的;
- 2) 子系统 $f_2(t, x_2)$ 是全局有限时间稳定的;
- 3) 如果存在一个正定函数 $V(t, x_1)$ 满足

$$\pi_1(\|x_1\|) \leq V(t, x_1) \leq \pi_2(\|x_1\|), \quad (72)$$

$$\dot{V}|_{x_1=f_1(t, x_1)}(t, x_1) \leq -P(\|x_1\|), \quad (73)$$

$$\left\| \frac{\partial V(t, x_1)}{\partial x_1} \right\| \leq \pi_3(\|x_1\|), \quad (74)$$

式中: $\pi_1(\cdot)$, $\pi_2(\cdot) \in K_\infty$ 类函数, $P(\cdot)$ 和 $\pi_2(\cdot)$ 分别是半正定函数和非递减函数;

- 4) 函数 $g(t, x_1, x_2)$ 满足

$$\|g(t, x_1, x_2)\| \leq \gamma(\|x_2\|)\pi_4(\|x_1\|), \quad (75)$$

式中 $\gamma(\cdot)$ 和 $\pi_4(\cdot)$ 是非负定函数. 另外, 如果存在一个非递减函数 $\pi_5(\cdot)$ 和一个常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\begin{cases} \pi_5(\alpha) \geq 0, \pi_5(s) \geq \pi_3(\pi_1^{-1}(s))\pi_4(\pi_1^{-1}(s)), \forall s > 0, \\ \int_\alpha^\infty \frac{1}{\pi_5(s)} ds = \infty, \end{cases}$$

则级联系统(71)是全局有限时间稳定的.

作者简介:

黄宴委 教授, 工学博士, 从事运动控制方向研究, E-mail: sjtu.huanghao@fzu.edu.cn;

林涛 硕士研究生, 从事运动控制方向研究, E-mail: 1149086189@qq.com;

黄文超 讲师, 工学博士, 从事鲁棒控制方向研究, E-mail: ehwenc@fzu.edu.cn;

陈少斌 副教授, 工学博士, 从事运动控制方向研究, E-mail: 286790921@qq.com.