

CLF-CBF-QP新形式下非线性系统的安全攸关控制与优化

龙离军[†], 胡腾飞

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 利用二次规划(QP)结合控制Lyapunov函数(CLF)和控制障碍函数(CBF)形成非线性系统的一种安全攸关控制策略, 称为CLF-CBF-QP, 其在实现控制目标和确保安全之间起到协调作用. 然而, 一旦引入附加的约束, 如输入约束, QP求解可能变得不可行. 另外, 当考虑系统本身的体积或环境中存在快速移动的障碍物时, 动态系统与障碍物发生碰撞的可能性会极大地提高. 因此, 本文首先从控制输入空间和状态空间的角度分别分析QP求解可行性以及CLF和CBF中参数对QP求解可行性和系统性能的影响, 并提出一种CLF-CBF-QP新形式来提高优化问题的可解性; 其次, 在考虑动态系统本身的体积且环境中存在动态障碍物时, 设计一种CBF新形式使其仍能保证系统的安全性; 最后, 通过线性平面四旋翼在存在动态或静态障碍物的环境中进行轨迹跟踪来验证所提出方法的有效性.

关键词: 控制Lyapunov函数; 控制障碍函数; 二次规划; 安全攸关控制

引用格式: 龙离军, 胡腾飞. CLF-CBF-QP新形式下非线性系统的安全攸关控制与优化. 控制理论与应用, 2022, 39(8): 1387 – 1396

DOI: 10.7641/CTA.2022.20045

Safety-critical control and optimization of nonlinear systems based on new forms of CLF-CBF-QP

LONG Li-jun[†], HU Teng-fei

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: Using quadratic programming (QP) to combine control Lyapunov function (CLF) and control barrier function (CBF) forms a safety-critical control strategy of nonlinear systems, named CLF-CBF-QP, which can mediate between achieving control objective and ensuring safety. However, when additional constraints such as input constraints are introduced, the CLF-CBF-QP may become infeasible. In addition, when considering the volume of the system itself or the presence of fast-moving obstacles in the environment, the possibility of collision between dynamic system and obstacles will be greatly increased. Therefore, this paper firstly analyzes the feasibility of QP solution and the influence of parameters in CLF and CBF on the feasibility of QP solution and system performance from the perspective of control-input-space and state-space, and proposes a new form of CLF-CBF-QP to improve the feasibility of solving optimization problems. Then, when considering the volume of the dynamic system itself and the presence of dynamic obstacles in the environment, a new form of CBF is designed to ensure the safety of the system. Finally, the effectiveness of the proposed algorithms is verified by a simulation case of linear planar quadrotor trajectory tracking in the environment with dynamic or static obstacles.

Key words: control Lyapunov function; control barrier function; quadratic programming; safety-critical control

Citation: LONG Lijun, HU Tengfei. Safety-critical control and optimization of nonlinear systems based on new forms of CLF-CBF-QP. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(8): 1387 – 1396

1 引言

随着移动机器人的应用越来越广泛, 许多新的或具有挑战性的课题被提出, 例如, 如何实现机器人的安全攸关控制, 从而避免其与人或物相碰撞^[1-4]. 因此, 为了确保机器人能正常运行, 制定实时避障策略来保证动态系统的安全性是必要的. 目前, 已有许多

算法专注于机器人的避障问题, 如: 全局路径规划算法^[1-2]提供了从起点到终点的一条最优路径, 然而这种算法只能应用于全局信息已知的情形. 基于人工势场(artificial potential field, APF)和栅格法的虚拟力场法(virtual force field, VFF)^[5]可以实现机器人实时避障, 但这种方法信息存储量大且获得的控制器不是最

收稿日期: 2022-01-17; 录用日期: 2022-06-28.

[†]通信作者. E-mail: longlijun@ise.neu.edu.cn; long_lijun@126.com.

本文责任编辑: 孙振东.

国家自然科学基金项目(62173075, 61773100), 辽宁省“兴辽英才计划”项目(XLYC1907043), 中央高校基本科研业务费(N2004015)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62173075, 61773100), the Liaoning Revitalization Talents Program (XLYC1907043) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (N2004015).

优的. Hamilton Jacobi可达性分析法(Hamilton Jacobi reachability analysis, HJ-RA)^[6]是一种验证动态系统安全性的形式化方法,该方法在避免不安全集受有界不确定性影响的前提下,将动力系统驱动到目标集,然而,可达性分析随系统维数的增加(呈指数增长)而变得难以计算.

近年来,一种基于集合前向不变性以实现系统安全攸关控制的控制障碍函数(control barrier function, CBF)^[7]被提出,且APF为其特例^[8].由于CBF具有可扩展性、强实时性和鲁棒性^[9]等优点,其常与PID,控制Lyapunov函数(control Lyapunov function, CLF)以及反步法等算法相结合并利用二次规划(quadratic programming, QP)实现系统的最优安全轨迹跟踪控制^[10-12].该算法的有效性和优越性在许多领域得到验证并广泛应用,例如:双足机器人^[13]、自动驾驶汽车^[14]、四旋翼无人机^[15]、多智能体系统^[16]等.此后, CBF得到诸多学者研究和扩展,例如:文献[17]和[18]分别提出指数和高阶CBF用于处理高相对阶系统的安全控制问题,文献[19]根据系统状态和输入定义的积分CBF可应用于非仿射控制系统,文献[20]和[21]分别提出鲁棒自适应和自适应滑模CBF用于处理具有未知参数不确定系统的安全控制问题.此外, CBF从连续时间控制系统推广到了离散时间控制系统中^[22-24].最近, CBF被应用于基于机器学习数据驱动作用下的安全控制^[25-26].文献[27]对CBF的发展进行了综述.

然而,在实际工程应用中,由于物理限制,智能体系统通常需要考虑容许控制输入等附加约束,但该约束可能与CLF和CBF约束发生冲突,从而导致QP变得求解不可行.另外,值得注意的是,当需要考虑系统自身体积或运行环境中存在快速移动障碍物等问题时,需时刻保证系统与障碍物之间有一定安全距离以降低发生碰撞的风险.在前人的一些研究工作中^[28-30],使用CLF-CBF-QP实现安全控制时并没有考虑控制输入约束,这意味着可能由于物理限制而导致系统无法正常执行操作.虽然文献[31-32]在QP中显式考虑了控制输入约束,但仍没有处理输入约束与CLF和CBF约束之间存在的潜在冲突.文献[33]虽然提出一种CBF的最优衰减形式来提高优化问题的可行性,且CBF的衰减率在时间上是逐点优化的,却没有考虑系统自身体积和环境中存在动态障碍物等问题,当该方法被应用于上述情况时,系统的安全性难以保证.

因此,针对上述关于QP求解可行性和动态系统的安全性问题,本文的主要工作和创新点如下:1)分别从控制输入空间和状态空间的角度分析CLF和CBF中参数 γ 和 λ 对QP求解可行性和系统性能的影响;2)提出CLF-CBF-QP新形式,以此提高优化问题的可解性;

3)设计CBF新形式,以此提高动态系统在考虑自身体积或在具有动态障碍物环境中运行时的安全性;4)通过线性平面四旋翼安全轨迹跟踪验证所提出方法的可行性和有效性.

2 基础知识

2.1 符号定义

$x := (p, \dot{p}, q) \in \mathbb{R}^n$ 表示动态系统的状态,其中 $p \in \mathbb{R}^k$ 为系统在 k 维空间中的位置状态, $q \in \mathbb{R}^{n-2k}$ 为除了位置状态 p 和速度状态 \dot{p} 的其他状态. $\mathbf{0}_{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维零矩阵, \mathbf{I}_n 表示 n 维单位矩阵. $\partial \mathcal{S}$ 表示集合 \mathcal{S} 的边界.对于 $a, b > 0$,如果连续函数 $\alpha: (-b, a) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 严格单调递增且 $\alpha(0) = 0$,那么称 α 为扩展的 \mathcal{K} 类函数.如无特殊说明,QP指CLF-CBF-QP.

2.2 控制Lyapunov函数

考虑如下仿射非线性系统:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1)$$

其中: $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}_{\text{adm}} \subset \mathbb{R}^m$ 分别是系统状态和控制输入, \mathcal{U}_{adm} 是容许控制输入集, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是局部Lipschitz函数.

定义 1^[11] 对于仿射非线性系统(1),如果存在正常数 c_1, c_2 和 γ ,使得对于所有 $x \in \mathcal{D}$,连续可微函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2, \\ \inf_{u \in \mathbb{R}^m} [L_f V(x) + L_g V(x)u + \gamma V(x)] \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $L_f V(x) = \nabla V(x)f(x)$, $L_g V(x) = \nabla V(x)g(x)$.那么, V 称为指数CLF.

给定一个CLF $V(x)$,对于 $x \in \mathcal{D}$,定义集合

$$\mathcal{U}_{\text{CLF}}(x) = \{u: L_f V(x) + L_g V(x)u + \gamma V(x) \leq 0\}. \quad (3)$$

定理 1^[27] 对于仿射非线性系统(1),如果存在满足式(2)的CLF V ,那么任意Lipschitz连续反馈控制器 $u(x) \in \mathcal{U}_{\text{CLF}}$ 使系统渐近稳定到平衡点 $x^* = 0$.

由于约束(2)关于 u 是仿射的,因此,利用QP可获得最优镇定控制器,其形式为

CLF-QP

$$u^*(x) = \underset{u \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} (u - u_d)^T H (u - u_d) + p \delta^2, \quad (4)$$

$$\text{s.t. } L_f V(x) + L_g V(x)u + \gamma V(x) \leq \delta,$$

$$u \in \mathcal{U}_{\text{adm}},$$

其中: H 为正定矩阵, u_d 为期望输入, $p > 0$ 为惩罚因子, δ 为松弛变量.当CLF和控制输入约束冲突时,通过 δ 放宽系统稳定性而提高QP求解可行性.

2.3 控制障碍函数

定义 2^[11] 给定一个连续可微函数 $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义零超水平集

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0\}, \\ \partial\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}, \\ \text{Int}(\mathcal{C}) = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : h(x) > 0\}. \end{cases} \quad (5)$$

定义 3^[11] 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ 为连续可微函数 $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 的超水平集, 对于仿射非线性系统(1), 如果存在常数 $\lambda > 0$, 使得对于所有 $x \in \mathcal{D}$, h 满足

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^m} [L_f h(x) + L_g h(x)u + \lambda h(x)] \geq 0. \quad (6)$$

那么, h 称为归零 CBF (Zeroing CBF, ZCBF).

给定一个 CBF $h(x)$, 对于 $x \in \mathcal{D}$, 定义集合

$$\mathcal{U}_{\text{CBF}}(x) = \{u : L_f h(x) + L_g h(x)u + \lambda h(x) \geq 0\}. \quad (7)$$

定理 2^[27] 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连续可微函数 $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 的超水平集, 若 h 是定义在 \mathcal{D} 上的 CBF, 且对所有 $x \in \partial\mathcal{C}$ 有 $\frac{\partial h}{\partial x}(x) \neq 0$, 那么任意 Lipschitz 连续反馈控制器 $u(x) \in \mathcal{U}_{\text{CBF}}$ 使集合 \mathcal{C} 相对于系统(1)是前向不变的, 即 $x(0) \in \mathcal{C} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{C}, \forall t > 0$.

由于约束(6)关于 u 是仿射的, 因此, 利用 QP 可获得最优安全控制器, 其形式为

CBF-QP

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \underset{u \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}(u - u_d)^\top H(u - u_d), \\ \text{s.t. } &L_f h(x) + L_g h(x)u + \lambda h(x) \geq 0, \\ &u \in \mathcal{U}_{\text{adm}}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中: H 为正定矩阵, u_d 为期望输入.

2.4 利用 QP 结合 CLF 和 CBF

Ames^[7] 等人首次利用 QP 将 CLF 和 CBF 约束相结合构造最优安全镇定控制器以实现自适应巡航控制, 其具体形式为

CLF-CBF-QP

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \underset{(u, \delta) \in \mathbb{R}^{m+1}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}(u - u_d)^\top H(u - u_d) + p\delta^2, \\ \text{s.t. } &L_f V(x) + L_g V(x)u + \gamma V(x) \leq \delta, \\ &L_f h(x) + L_g h(x)u + \lambda h(x) \geq 0, \\ &u \in \mathcal{U}_{\text{adm}}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中: H 为正定矩阵, 常数 $\gamma, \lambda \geq 0, p > 0$ 为惩罚因子, δ 为松弛变量. 当 CLF, CBF 和控制输入约束冲突时, 通过 δ 放宽系统稳定性而提高 QP 可行性. 该形式的 QP 被广泛地应用于各种安全攸关控制中^[31-33].

2.5 平面四旋翼线性模型

假设 1 四旋翼布局对称且质量分布均匀.

考虑如图 1 所示平面四旋翼控制系统. 图 1 的动力学模型为

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -F \sin \phi, \\ m\ddot{z} = F \cos \phi - mg, \\ J\ddot{\phi} = M, \end{cases} \quad (10)$$

其中: g 为重力加速度, m 和 J 分别为四旋翼的质量和转动惯量, $[y \ z]^\top$ 为四旋翼的中心位置, ϕ 为横滚角, F 和 M 分别为由螺旋桨提供的推力和力矩. 显然, 该四旋翼动力学系统可以被描述为控制仿射形式(1), 其中: $x = [y \ z \ \phi \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\phi}]^\top$ 和 $u = [F \ M]^\top$ 分别为系统状态和控制输入.

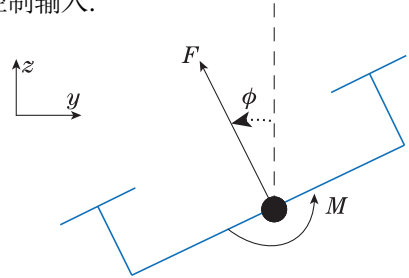


图 1 平面四旋翼模型

Fig. 1 Model of planar quadrotor

为获得平面四旋翼线性模型, 考虑在平衡点(悬停状态) $x_e = \mathbf{0}_{6 \times 1}$, $u_g = [mg \ 0]^\top$ 处利用泰勒展开进行线性化处理

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (x - x_e) + \\ &\left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (u - u_e) + o^n. \end{aligned} \quad (11)$$

令 $\tilde{x} = x - x_e$, $\tilde{u} = u - u_e$, 则其线性动力学模型为

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \quad (12)$$

$$\text{其中: } A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ 0 & 0 \\ 1/m & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix}.$$

2.6 不规则障碍物圆形近似化

在实际环境中存在的障碍物多为不规则形状, 但 CBF 的设计涉及系统与障碍物距离的计算, 为方便理论计算与仿真验证, 对不规则静或动态障碍物通过以下两种方式近似化处理^[35], 其如图 2 所示

- 不规则球形状障碍物近似为单个半径为 r 的圆形或球形.
- 不规则长条状障碍物近似为多个半径为 r 的圆形或球形组合而成.

2.7 控制问题描述

定义 4 标量函数 $d(p, o)$ 被定义为

$$d(p, o) = (p - o)^\top (p - o) - r^2, \quad (13)$$

其中: $p \in \mathbb{R}^k$ 为动态系统的位置状态, $o \in \mathbb{R}^k$, r 分别表示在 k 维空间中障碍物的中心位置和半径.

于是, 系统相对于第 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 个障碍物的几何安全区域被定义为 $\mathcal{S}_i = \{p \in \mathbb{R}^k \mid d(p, o_i) \geq r\}$. 因此, 系统的整体安全区域为 $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i$.

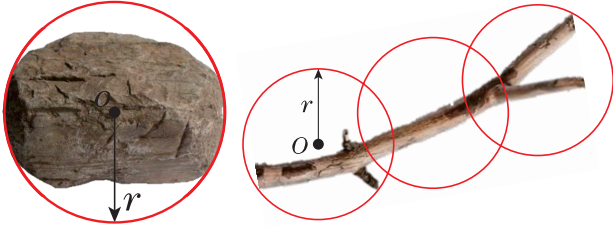


图2 不规则障碍物近似化处理

Fig. 2 Approximation processing of irregular obstacles

假设2 为保证系统正常运行, 对于 $\forall t > 0$, 安全区域 \mathcal{S} 非空.

本文的控制目标为: 给定一条光滑的参考轨迹 $[y_r(t) \ z_r(t)]^T$, 构造最优安全镇定控制器使线性平面四旋翼(12)满足:

- 1) $[y(t) \ z(t)]^T \in \mathcal{S}, t \geq 0;$ (安全约束)
 - 2) $F_{\min} \leq F \leq F_{\max}, |M| \leq M_{\max}, t \geq 0;$ (输入约束)
 - 3) $[y(t) \ z(t)]^T \rightarrow [y_r(t) \ z_r(t)]^T, t \rightarrow \infty.$ (位置约束)
- 其中: F_{\min}, F_{\max} 和 M_{\max} 是已知常数.

3 主要结论

动态系统能否正常运行与QP求解可行性息息相关. 当QP选择为式(9)时, 由于考虑控制输入约束 $u \in \mathcal{U}_{\text{adm}}$, 可能导致QP求解不可行. 另外, CBF的设计需要考虑这一问题: 当系统体积不能被忽略或环境中存在快速移动的障碍物时, 动态系统极有可能与障碍物相碰. 因此, 为了降低系统碰撞障碍物的风险, 本文设计一种CBF新形式以提高系统的安全性.

3.1 输入空间角度分析QP求解可行性

系统在 $x_t := x(t)$ 处时有控制输入集 $\mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t)$, 安全控制输入集 $\mathcal{U}_{\text{CBF}}(x_t)$, 且 $\mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t)$ 和 $\mathcal{U}_{\text{CBF}}(x_t)$ 在输入空间 \mathbb{R}^m 中为半空间^[33]. 那么, QP求解可行性问题变为集合 $\mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t)$, $\mathcal{U}_{\text{CBF}}(x_t)$ 和 \mathcal{U}_{adm} 是否有交集. 若 $\mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t) \cap \mathcal{U}_{\text{CBF}}(x_t) \cap \mathcal{U}_{\text{adm}} \neq \emptyset$, 则表明QP在 x_t 处求解可行.

定义5 集合 $\mathcal{U}_{\text{fea}}(x_t)$ 被定义为

$$\mathcal{U}_{\text{fea}}(x_t) := \mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t) \cap \mathcal{U}_{\text{CBF}}(x_t) \cap \mathcal{U}_{\text{adm}}. \quad (14)$$

假设3 容许控制输入集 \mathcal{U}_{adm} 被描述为具有 n 个顶点的凸多边形, 如图3所示, 其中, 每个顶点标记为 $d_i \in \mathbb{R}^m, i \in \{1, \dots, n\}$, \mathcal{U}_{adm} 被表示为

$$\mathcal{U}_{\text{adm}} = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : u = \sum_{i=1}^n \eta_i d_i, \sum_{i=1}^n \eta_i = 1, \eta_i \geq 0 \right\}. \quad (15)$$

基于假设3, 为了直观起见, 本文从几何的角度进行QP可行性分析. 图3中凸多边形区域表示允许控制输入集, 绿色区域表示 $\mathcal{U}_{\text{fea}}(x_t)$, 箭头方向表示集合的半空间方向.

1) 如图3(a)所示情况, 此时 $\mathcal{U}_{\text{fea}}(x_t) = \mathcal{U}_{\text{adm}}$, QP求解可行. CLF和CBF约束在优化问题中不起作用, 且最优值在 $\partial \mathcal{U}_{\text{adm}}$ 处获得.

2) 如图3(b)所示情况, 此时 $\mathcal{U}_{\text{fea}}(x_t) \neq \emptyset$, QP求解可行. 当CLF约束起作用时, QP最优值在 $\partial \mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t)$ 处取得, 当CBF约束起作用时, QP最优值在 $\partial \mathcal{U}_{\text{abf}}(x_t)$ 处取得, 若在 \mathcal{U}_{adm} 的顶点处取得最优值时, 那么, CLF和CBF约束将都不起作用.

3) 如图3(c)所示情况, 此时QP求解可行, 且CLF和CBF约束都起作用, QP的最优值在 $\partial \mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t)$ 和 $\partial \mathcal{U}_{\text{CBF}}(x_t)$ 处取得.

4) 如图3(d)所示情况, 此时 $\mathcal{U}_{\text{fea}}(x_t) = \emptyset$, QP求解不可行.

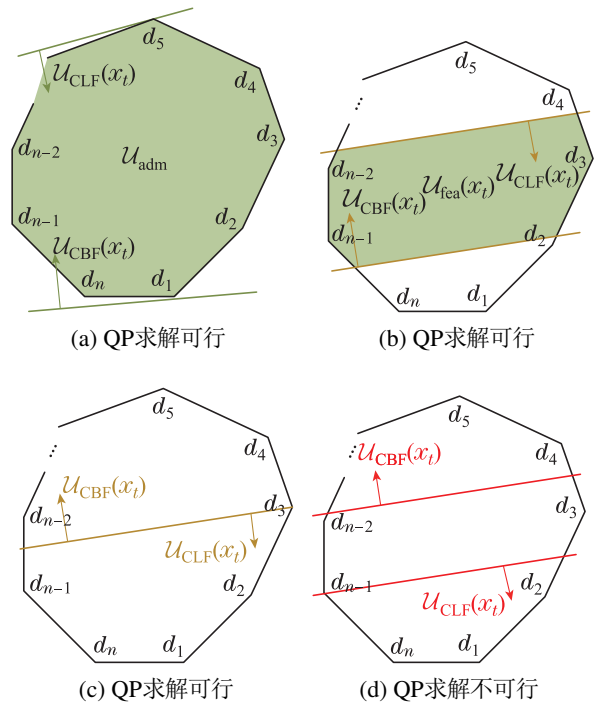


图3 QP求解可行性分析

Fig. 3 Feasibility analysis of QP

根据上述分析可知, QP求解可行性与CLF和CBF约束相关, 即与正常数 γ 和 λ 有关. 因此, 接下来分析 γ 和 λ 的数值大小对QP求解可行性和系统性能的影响. 受文献[33]的研究思路启发, 本文将从状态空间的角度分析 γ 和 λ 对QP求解可行性的影响.

3.2 γ 和 λ 对系统性能和QP求解可行性的影响

3.2.1 γ 对系统收敛速度的影响

由 $\dot{V}(x) + \gamma V(x) = 0$, 可知

$$V(x(t)) = V(x(0))e^{-\gamma t}. \quad (16)$$

根据式(2)和式(16), 利用比较引理^[34]易知

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x(0)\| e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \quad (17)$$

由式(17)知, $\|x(t)\|$ 以不小于 $\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x(0)\| e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ 的速率收敛到0. 因此, 增大 γ 将加快系统收敛速度, 但会降低QP求解的可行性, 这将在下一节中进行讨论.

3.2.2 γ 对QP求解可行性的影响

定义 6 状态集合 $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t)$ 表示在满足系统(1)和控制输入约束 \mathcal{U}_{adm} 时, 系统在状态 x_t 处经过极小时间 Δt 后所能达到的状态集.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t) = \\ \{x(t + \Delta t) \in \mathbb{R}^n : \dot{x}(\tilde{t}) = f(x(\tilde{t})) + g(x(\tilde{t}))u(\tilde{t}), \\ u(\tilde{t}) \in \mathcal{U}_{\text{adm}}, \tilde{t} \in [t, t + \Delta t]\}. \end{aligned} \quad (18)$$

在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 内, 根据式(2), 可得

$$V(x(t + \Delta t)) \leq V(x(t)) - \int_t^{t + \Delta t} \gamma V(x(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (19)$$

因此, 在状态空间中, 定义在 $x(t + \Delta t)$ 时满足CLF约束的超水平集为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) = \\ \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(x_t) - \int_t^{t + \Delta t} \gamma V(x(\tilde{t})) d\tilde{t}\}. \end{aligned} \quad (20)$$

当 $\Delta t = 0$ 时

$$\mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(x_t)\}. \quad (21)$$

注 1 $\mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) \subset \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, 0)$ 总是成立的.

因此, 若 $\mathcal{R}(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t) \cap \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) = \emptyset$, 则表明QP在 x_t 处求解不可行. 然而, 对于仿射非线性系统(1), 计算 \mathcal{R} 是复杂的, 所以, 接下来, 本文将通过绘制几何关系来直观的表述 γ 对QP求解可行性的影响.

如图4所示, 蓝色区域表示 $\mathcal{R}(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t)$, 黄色区域表示 $\mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, 0)$, 黄色实线表示 $\partial\mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, 0)$, 绿色区域表示 $\mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t)$, 绿色实线表示 $\partial\mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t)$. 根据不同情况对QP求解可行性分析.

1) 如图4(a)–(b)所示情况, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) = \mathcal{R} \neq \emptyset$, 系统的稳定性可以被保证, 此时CLF约束在优化问题中不起作用, QP求解可行性与CBF约束相关.

2) 如图4(c)所示情况, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) \neq \emptyset$, 系统的稳定性仍可被保证. 此时CLF约束是否起作用取决于 γ 的取值, 且QP求解可行性与CBF约束相关.

3) 如图4(c)–(d)所示情况, 当 Δt 一定时, 随着 γ 数值的逐渐增大, 根据式(20)可知, $\mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t)$ 的区域将逐渐减小, 进而导致 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) = \emptyset$, 此时QP求解不可行, 系统无法实现镇定.

3.2.3 λ 对系统安全性能的影响

根据CBF约束式(6), 利用比较引理可得

$$h(x_t) \geq h(x_0)e^{-\lambda t}. \quad (22)$$

为了确保 $h(x)$ 有下界, $\lambda \geq 0$.

根据式(22)可知, 当 t 确定时, 随着 λ 的逐渐减小, $h(x_0)e^{-\lambda t}$ 逐渐增大, 即系统距离 $\partial\mathcal{C}$ 越远. 考虑 $\lambda = 0$ 时 $\dot{h}(x) \geq 0$ 这一极端情况, 系统将随时间 t 逐渐远离 $\partial\mathcal{C}$. 所以, 减小 λ 将使系统的安全性更容易得到保证. 然而, 由式(6)可知, 减小 λ 将导致CBF约束的加强, 从而, QP求解可行性也随之降低, 在下一节中将通过几何关系进行更直观的分析.

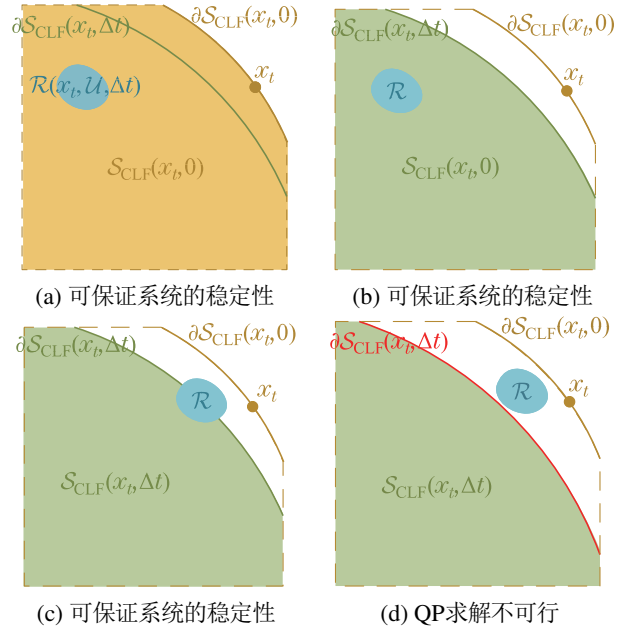


图 4 系统稳定性和QP可行性的分析
Fig. 4 Analysis of system stability and QP feasibility

3.2.4 λ 对QP求解可行性的影响

在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 内, 根据式(6), 可得

$$h(x(t + \Delta t)) \geq h(x(t)) - \int_t^{t + \Delta t} \lambda h(x(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (23)$$

因此, 在状态空间中, 定义在 $x(t + \Delta t)$ 时满足CBF约束的超水平集为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t) = \\ \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq h(x_t) - \int_t^{t + \Delta t} \lambda h(x(\tilde{t})) d\tilde{t}\}. \end{aligned} \quad (24)$$

当 $\Delta t = 0$ 时:

$$\mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq h(x_t)\}. \quad (25)$$

注 2 $\mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, 0) \subset \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t)$ 总是成立的.

因此, 若 $\mathcal{R}(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t) \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t) = \emptyset$, 则表明QP在状态 x_t 处求解不可行. 接下来, 本文将通过绘制几何关系来直观的描述 λ 对QP求解可行性的影响.

如图5所示, 定义障碍物外部区域为安全空间, 红色区域表示不安全区域(障碍物), 蓝色区域表示 $\mathcal{R}(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t)$, 黄色区域表示 $\mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, 0)$, 黄色实线表示 $\partial\mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, 0)$, 绿色区域表示 $\mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t)$, 绿色实线表示 $\partial\mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t)$. 根据不同情况对QP求解

可行性进行分析.

1) 如图5(a)所示情况, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t) \neq \emptyset$ 且 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, 0) = \mathcal{R}$, 所以系统将朝远离障碍物的方向移动, 系统的安全性可以被保证. 又由于 $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t)$, 所以此时 CBF 约束在优化问题中不起作用, QP 求解可行性与 CLF 约束相关.

2) 如图5(b)所示情况, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t) \neq \emptyset$ 且 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, 0) \subset \mathcal{R}$, 所以系统可能朝靠近或远离障碍物的方向移动, 但系统的安全性仍可以被保证. 此时 CBF 约束在优化问题中不起作用, QP 求解可行性与 CLF 约束相关.

3) 如图5(c)所示情况, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t) \neq \emptyset$ 且 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, 0) = \emptyset$, 所以系统将朝靠近障碍物的方向移动, 但系统的安全性仍可以被保证. 此时 CBF 约束是否起作用取决于 λ 的取值, 且 QP 求解可行性与 CLF 约束相关.

4) 如图5(c)-(d)所示情况, 当 Δt 一定时, 随着 λ 数值的逐渐减小, 根据式(24)可知, $\mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t)$ 的区域也将逐渐缩小, 进而导致 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) = \emptyset$, 此时 QP 求解不可行, 系统的安全性无法被保证.

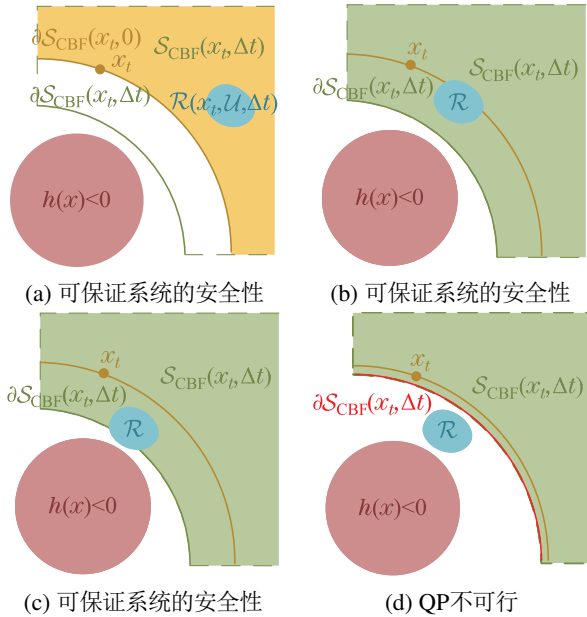


图5 系统安全性和QP可行性的分析

Fig. 5 Analysis of system safety and QP feasibility

根据上述分析, γ 和 λ 对系统性能和 QP 求解可行性影响的结论如表1所示.

表1 γ 和 λ 对性能的影响

Table 1 Performance effects of γ and λ

| 变化 | γ | λ |
|----|-----------|-----------|
| 增大 | 系统收敛速度加快 | QP求解可行性提高 |
| 减小 | QP求解可行性提高 | 系统安全性更高 |

当同时考虑 CLF, CBF 和控制输入约束时, 若 $(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t) \cap \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t) \neq \emptyset$, 则 QP 求解可行, 系统可实现最优安全镇定控制.

3.3 设计QP新形式

根据上节分析可知, 若选择的 γ 太大或 λ 太小则会导致 $\mathcal{U}_{\text{CLF}}(x_t) \cap \mathcal{U}_{\text{CBF}}(x_t) \cap \mathcal{U}_{\text{adm}} = \emptyset$ 或 $\mathcal{R}(x_t, \mathcal{U}_{\text{adm}}, \Delta t) \cap \mathcal{S}_{\text{CLF}}(x_t, \Delta t) \cap \mathcal{S}_{\text{CBF}}(x_t, \Delta t) = \emptyset$, 即优化问题变得不可行. 因此, 为了提高 QP 求解可行性, 本文提出一种新颖的 QP 形式为

CLF-CBF-QP

$$u^*(x) = \underset{(u, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+2}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}(u - u_d)^T H (u - u_d) + q(\gamma - \gamma_d)^2 + p(\lambda - \lambda_d)^2, \quad (26)$$

$$\text{s.t. } L_f V(x) + L_g V(x)u + \gamma V(x) \leq 0,$$

$$L_f h(x) + L_g h(x)u + \lambda h(x) \geq 0,$$

$$\lambda \geq 0, u \in \mathcal{U}_{\text{adm}},$$

其中: H 为正定矩阵, 常数 $q, p > 0$ 为惩罚因子, 正常数 u_d, γ_d, λ_d 为期望值, γ 和 λ 为决策变量.

根据式(26), λ 非负, 因此, 需要始终确保系统的安全性. 当系统靠近障碍物时, 决策变量 γ 减小, λ 增大, 在确保系统安全的前提下放宽稳定性约束以此提高 QP 求解可行性. 当系统远离障碍物时, 由于成本函数中的惩罚项, 使得 γ 最终会达到期望值 γ_d , 因此系统的稳定性得到保证.

注3 虽然提出的 QP(26) 新形式可以提高优化问题求解可行性, 但当输入约束较苛刻时, QP 仍变得求解不可行.

3.4 设计CBF新形式

本文基于文献[10]中 CBF 的形式定义标量函数

$$h(x) = \mu \alpha(d(p, o)) + \dot{d}(p, o) - c_1 e^{-c_2 d(p, o) + c_3}, \quad (27)$$

其中: $\mu, c_1, c_2, c_3 > 0$ 为常数, α 为扩展的 \mathcal{K} 类函数, 标量函数 $d(p, o)$ 为式(13).

假设4 对于仿射非线性系统(1), 系统速度状态 $\dot{p} \in \mathbb{R}^k$ 的微分为

$$\ddot{p} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u, \quad (28)$$

其中: $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}_{\text{adm}} \subset \mathbb{R}^m$ 分别是系统状态和控制输入, $\tilde{f}(x)$ 和 $\tilde{g}(x)$ 局部 Lipschitz 连续. 同时, 当 $p \neq o$ 时, $(p - o)^T \tilde{g}(x) \neq \mathbf{0}_{1 \times m}$.

定理3 对于满足假设4的仿射非线性系统(1), 式(27)为全局有效 CBF, 且保证系统与障碍物间始终保持安全距离.

证 简化 $d := d(p, o), h := h(x)$.

对式(27)微分可得

$$\dot{h} = \mu \dot{\alpha}(d) \dot{d} + \ddot{d} + c_1 c_2 \dot{d} e^{-c_2 d + c_3}. \quad (29)$$

根据式(13), 可得

$$\begin{cases} \dot{d} = 2(p - o)^T \dot{p}, \\ \ddot{d} = 2\dot{p}^T \dot{p} + 2(p - o)^T \ddot{p}. \end{cases} \quad (30)$$

将式(28)代入式(30)可得

$$\ddot{d} = 2\dot{p}^T \dot{p} + 2(p - o)^T (\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u). \quad (31)$$

为使 $h(x)$ 成为CBF, 条件(6)必须被满足. 把式(31)代入式(29), 即必须存在 u 满足

$$2(p - o)^T \tilde{g}(x)u + 2(p - o)^T \tilde{f}(x) + 2\dot{p}^T \dot{p} + \mu\dot{\alpha}(d)\dot{d} + c_1 c_2 \dot{d} e^{-c_2 d + c_3} + \lambda h \geq 0. \quad (32)$$

根据式(32), 若不考虑控制输入约束 $u \in \mathcal{U}_{adm}$, 仅当 $2(p - o)^T \tilde{g}(x) = \mathbf{0}_{1 \times m}$ 且 $2(p - o)^T \tilde{f}(x) + \mu\dot{\alpha}(d)\dot{d} + 2\dot{p}^T \dot{p} + c_1 c_2 \dot{d} e^{-c_2 d + c_3} + \lambda h < 0$ 时, 条件(6), 即式(32)不成立. 根据假设4, 由于当 $p = o$ 时, $2(p - o)^T \tilde{g}(x) = \mathbf{0}_{1 \times m}$. 然而 $p = o$ (动态系统位于障碍物中心)是不可能发生的, 因此, 式(27)为全局有效CBF.

因此, 由CBF(27)所定义的集合 $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0\}$ 相对于系统(1)是前向不变的, 即当 $x_0 = (p_0, \dot{p}_0, q_0) \in \mathcal{C}$ 时, $x_t = (p_t, \dot{p}_t, q_t) \in \mathcal{C}$. 所以, 对于 $t > 0$, 可得 $\mu\dot{\alpha}(d) + \dot{d} - c_1 e^{-c_2 d + c_3} \geq 0$. 考虑在某一极端时刻, 系统到达安全区域 \mathcal{S} 的边界 $\partial\mathcal{S}$, 即 $d = 0$. 根据式(27), 则 $\dot{d} - c_1 e^{c_3} \geq 0$, 所以 $\dot{d} \geq c_1 e^{c_3} > 0$. 根据函数的连续性可知, 存在正常数 $\delta > 0$, 在 $d \in (0, \delta)$ 区域内, 仍有 $\dot{d} > 0$. 因此, 当系统与障碍物间仍有间距时, 系统便开始远离障碍物, 从而提高了系统的安全性. 证毕.

注 4 通过调节正常数 c_1, c_2, c_3 可以改变系统与障碍物间的最小距离, 但 c_1 的选取不能太小.

4 仿真实验

在假设1-4满足的前提下, 本文使用线性平面四旋翼(12)在具有障碍物的环境中进行轨迹跟踪控制¹. 同时, 基于MATLAB(R2019b)仿真平台, “ode45”微分方程求解器, YALMIP最优化工具箱和IPOPT“内点法”求解器来验证所提出算法的有效性和优越性. 仿真中所用参数如表2所示.

表 2 仿真中使用的参数值

Table 2 Parameter values used in simulation

| 变量 | 数值 | 变量 | 数值 | 变量 | 数值 |
|-----------|--------------------------------------|------------|----------------|-------------|------------------------------------|
| g | $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | m | 1 kg | J | $0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ |
| F_{min} | -9.81 N | F_{max} | 30 N | M_{max} | $20 \text{ N} \cdot \text{m}$ |
| H | \mathbf{I}_2 | q | 0.2 | p | 1 |
| u_d | $\mathbf{0}_{2 \times 1}$ | γ_d | 10 | λ_d | 2 |

注 5 由于平面四旋翼动力学模型在线性化过程中进行变量替换 $\tilde{u} = u - u_c, u_c = [mg \ 0]^T$. 因此, 设置 $F_{min} = -9.81 \text{ N}$. 另外, 对于平面四旋翼线性模型(12), 仅当四旋翼与障碍物中心位置在同一水平线上时, $(p - o)^T \tilde{g}(x) \neq \mathbf{0}_{1 \times m}$, 此时, 假

设4不成立, 本文中该情况被忽略. 最后, 为了提高系统的收敛速度和安全性, γ_d 的选取应偏大, λ_d 的选取应偏小.

为了确保系统的稳定性, 本文根据文献[24], 选择CLF为

$$V(x) = e_x^T P e_x, \quad (33)$$

其中: $e_x = x - x_d, x$ 为系统状态, x_d 为期望状态, P 为正定矩阵, 仿真中通过MATLAB内置函数 lqr 获得 P .

4.1 动态障碍物环境中避障失败

给定参考轨迹为

$$\begin{cases} y_r(t) = 3.5 \cos(0.1t + \pi), \\ z_r(t) = 3.5 \sin(0.1t + \pi). \end{cases} \quad (34)$$

半径为1的动态障碍物1的移动轨迹为

$$\begin{cases} o_y = 3 \cos(-0.1t), \\ o_z = 3 \sin(-0.1t). \end{cases} \quad (35)$$

静态障碍物2位于 $o_2 = [3.5 \ 0]$, 其半径为 $r = 1$, 系统初始状态为 $x_0 = [-4.5 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 期望状态为 $x_d(t) = [y_r(t) \ z_r(t) \ 0 \ \dot{y}_r(t) \ \dot{z}_r(t) \ 0]^T$.

根据文献[10], 选取CBF的形式为

$$h(x) = \mu\alpha(d(p, o)) + \dot{d}(p, o). \quad (36)$$

仿真结果如图6-7所示. 根据图7可知, 当 $t = 15 \text{ s}$ 时, $d(p, o_1) < 0$ 表示四旋翼与障碍物相碰; 当 $t = 35 \text{ s}$ 时, $d(p, o_2) = 0$ 表示四旋翼紧靠障碍物边缘移动, 因此当系统的体积不能被忽略时, 四旋翼将与障碍物发生碰撞. 由此可知, 文献[10]中所设计的CBF不能处理考虑动态系统体积或环境中存在快速移动障碍物时的情况. 接下来, 将验证本文所给方法的有效性.

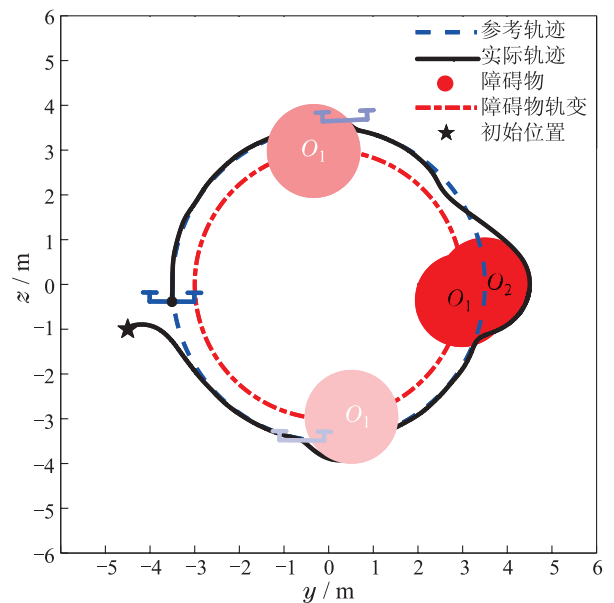


图 6 平面四旋翼运行轨迹

Fig. 6 The trajectory of planar quadrotor

¹ 仿真案例视频链接: <https://b23.tv/vZL2yN2>.

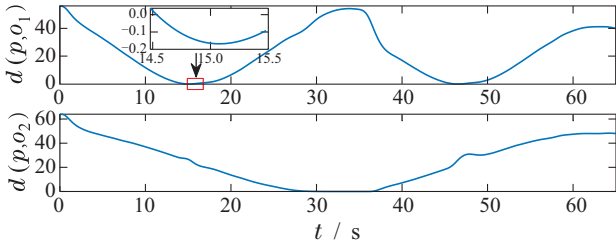


图7 函数 $d(p, o_1)$ 和 $d(p, o_2)$

Fig. 7 Functions $d(p, o_1)$ and $d(p, o_2)$

4.2 静态障碍物环境下轨迹跟踪控制

给定系统的参考轨迹为式(34), 静态障碍物 $1, 2$ 分别位于 $o_1 = [0 \ 3.5]$ 和 $o_2 = [0 \ -3.5]$, 其半径为 $r = 1$. 系统初始状态为 $x_0 = [-4.5 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 期望状态为 $x_d(t) = [y_r(t) \ z_r(t) \ 0 \ \dot{y}_r(t) \ \dot{z}_r(t) \ 0]^T$. 选择CBF为式(27).

仿真结果如图8–11所示. 根据图9可知, $d(p, o_1) > 0$, $d(p, o_2) > 0$, 四旋翼始终与静态障碍物保持一定距离, 因此系统触碰障碍物的风险被大大降低. 另外, 从图10可以看出, 当四旋翼靠近障碍物时, γ 将减小, λ 将增大, 从而提高QP可行性使系统能正常运行. 根据图11可知, 控制输入约束始终得到满足. 因此, 相比于文献[10], 本文所给CBF形式使系统的安全性更高.

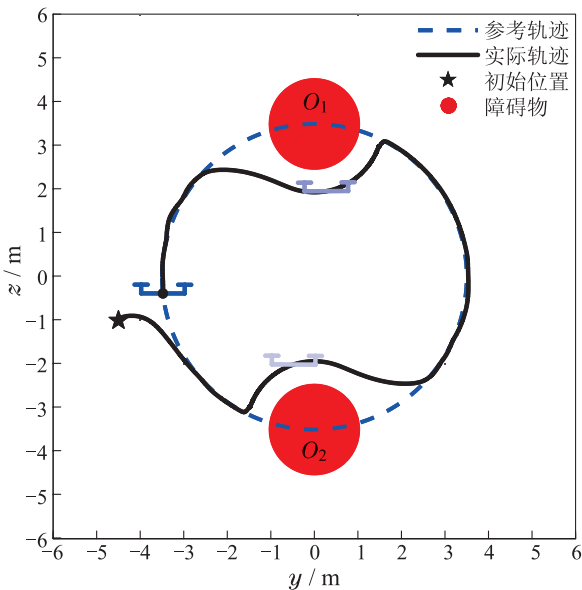


图8 平面四旋翼运行轨迹

Fig. 8 The trajectory of planar quadrotor

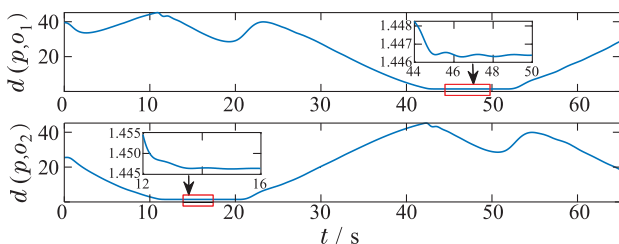


图9 函数 $d(p, o_1)$ 和 $d(p, o_2)$

Fig. 9 Functions $d(p, o_1)$ and $d(p, o_2)$

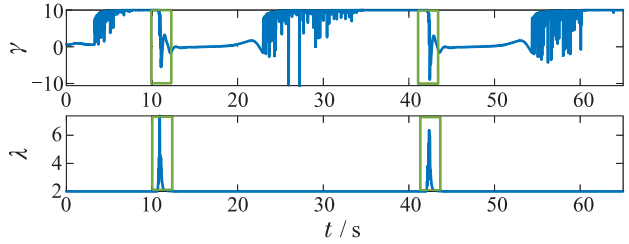


图10 决策变量 γ 和 λ

Fig. 10 Decision variables γ and λ

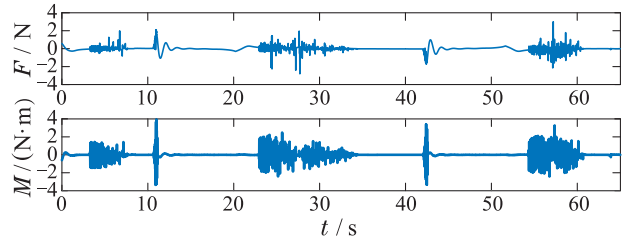


图11 控制输入 F 和 M

Fig. 11 Control inputs F and M

4.3 动态障碍物环境下轨迹跟踪控制

给定系统的参考轨迹为式(34), 动态障碍物移动轨迹为式(35). 系统初始状态为 $x_0 = [-4.5 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 期望状态为 $x_d(t) = [y_r(t) \ z_r(t) \ 0 \ \dot{y}_r(t) \ \dot{z}_r(t) \ 0]^T$. 选择CBF为(27).

仿真结果如图12–15所示. 从图13可知, $d(p, o) > 0$, 四旋翼始终与动态障碍物保持一定距离, 使得四旋翼能及时避开障碍物, 系统的安全性得到提高. 从图14中绿框区域可以看出, 当四旋翼靠近障碍物时, γ 将减小, λ 将增大, 从而提高QP求解可行性使四旋翼能正常运行, 从红框区域可以看出, 在确保QP求解可行的前提下, λ 将减小使得四旋翼能更早避开动态障碍物. 另外, 根据图15可知, 控制输入约束始终得到满足.

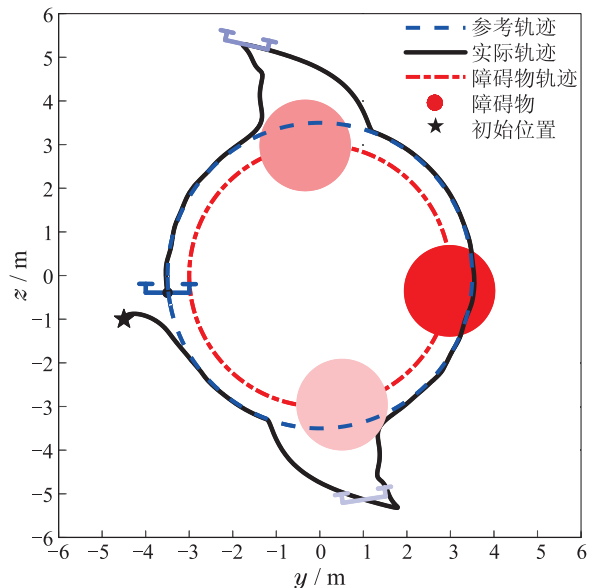
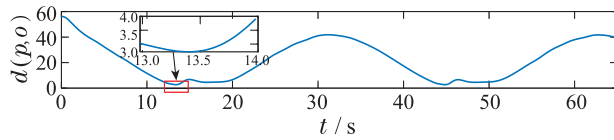
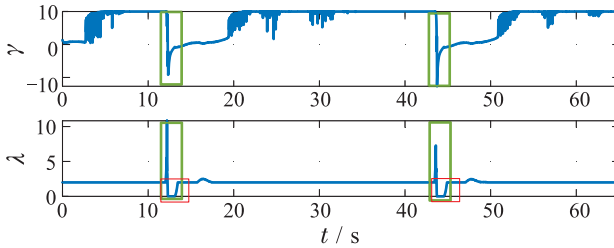
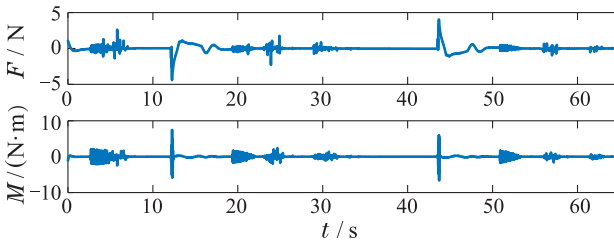


图12 平面四旋翼运行轨迹

Fig. 12 The trajectory of planar quadrotor

图 13 函数 $d(p, o)$ Fig. 13 Function $d(p, o)$ 图 14 决策变量 γ 和 λ Fig. 14 Decision variables γ and λ 图 15 控制输入 F 和 M Fig. 15 Control inputs F and M

若使用QP(9)并选取常数 $\gamma = \gamma_d = 10$, $\lambda = \lambda_d = 2$, 当四旋翼靠近动态障碍物时, QP变得求解不可行, 其在MATLAB中显示信息为

```
yalmipversion : 20210331
matlabversion : 9.7.0.1190202(R2019b)
yalmiptime : 0.0310
solvetime : 0
info : Infeasible problem(IPOPT)
problem : 1
```

因此, 本文所给QP新形式的可求解性更高。

5 结论

本文从控制输入和状态空间的角度分别分析了QP求解可行性以及 γ 和 λ 对QP求解可行性和系统性能的影响, 从而提出了一种CLF-CBF-QP新形式, 以此来提高优化问题的可行性。另外, 本文设计一种CBF新形式, 使得当考虑动态系统本身的体积且环境中存在动态障碍物时, 仍能保证系统的安全性。最后, 通过线性平面四旋翼在具有障碍物的环境中进行轨迹跟踪验证所提出方法的有效性和优越性。值得注意的是, 当控制输入约束较为苛刻时, QP仍会变得不可行。如何进一步提高优化问题的可行性, 这将是笔者未来研究的重点。

参考文献:

- [1] LU W, LEI J, SHAO Y. Path planning for mobile robot based on an improved A* algorithm. *Journal of Ordnance Equipment Engineer-*

ing, 2019, 40(4): 197 – 201.

- [2] CHEN L, SHAN Y, TIAN W, et al. A fast and efficient double-tree RRT*-like sampling-based planner applying on mobile robotic systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2018, 23(6): 2568 – 2578.
- [3] LONG L, HONG Y. Safety stabilization of switched systems with unstable subsystems. *Control Theory and Technology*, 2022, 20(1): 95 – 102.
- [4] LONG L, WANG J. Safety-critical dynamic event-triggered control of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2022, 162: 1 – 9.
- [5] JIANG Y, YANG C, JU Z, et al. Obstacle avoidance of a redundant robot using virtual force field and null space projection. *12th International Conference on Intelligent Robotics and Applications*. Shenyang, China: Springer, 2019: 728 – 739.
- [6] LI Z C. Comparison between safety methods control barrier function vs. reachability analysis. *arXiv preprint*. arXiv: 2106.13176, 2021.
- [7] AMES A D, GRIZZLE J W, TABUADA P. Control barrier function based quadratic programs with application to adaptive cruise control. *The 53rd IEEE Conference on Decision and Control*. California, USA: IEEE, 2014: 6271 – 6278.
- [8] SINGLETARY A, KLINGGEBIEL K, BOURNE J, et al. Comparative analysis of control barrier functions and artificial potential fields for obstacle avoidance. *IEEE/RSS International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Prague, Czech Republic: IEEE, 2021: 8129 – 8136.
- [9] XU X, TABUADA P, AMES A D, et al. Robustness of control barrier functions for safety critical control. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, 48(27): 54 – 61.
- [10] WU G, SREENATH K. Safety-critical and constrained geometric control synthesis using control Lyapunov and control barrier functions for systems evolving on manifolds. *American Control Conference (ACC)*. Chicago, USA: IEEE, 2015: 2038 – 2044.
- [11] AMES A D, XU X, GRIZZLE J W, et al. Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3861 – 3876.
- [12] MARVI Z, KIUMARSI B. Safety planning using control barrier function: A model predictive control scheme. *IEEE 2nd Connected and Automated Vehicles Symposium (CAVS)*. Honolulu, USA: IEEE, 2019: 1 – 5.
- [13] NGUYEN Q, DA X, SREENATH K, et al. Dynamic walking on stepping stones with gait library and control barrier functions. *Algorithmic Foundations of Robotics XII*, 2020, 1001: 384 – 399.
- [14] XU X R, GRIZZLE J W, AMES A D, et al. Correctness guarantees for the composition of lane keeping and adaptive cruise control. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2018, 15(3): 1216 – 1229.
- [15] KHAN M, ZAFAR M, CHATTERJEE A. Barrier functions in cascaded controller: Safe quadrotor control. *American Control Conference (ACC)*. Denver, USA: IEEE, 2020: 1737 – 1742.
- [16] TAN X, DIMAROGONAS D V. Distributed implementation of control barrier functions for multi-agent systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 6: 1879 – 1884.
- [17] NGUYEN Q, SREENATH K. Exponential control barrier functions for enforcing high relative-degree safety-critical constraints. *American Control Conference (ACC)*. Boston, USA: IEEE, 2016: 322 – 328.
- [18] XIAO W, BELTA V. High order control barrier functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, DOI: 10.1109/TAC.2021.3105491.
- [19] AMES A D, NOTOMISTA G, WARDI Y, et al. Integral control barrier functions for dynamically defined control laws. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, 5(3): 887 – 892.

- [20] LOPEZ B T, SLOTINE J J E, HOW J P. Robust adaptive control barrier functions: An adaptive and data-driven approach to safety. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, 5(3): 1031 – 1036.
- [21] LIU Z, PAN H. Barrier function-based adaptive sliding mode control for application to vehicle suspensions. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2021, 7(3): 2023 – 2033.
- [22] CHEN Y, JANKOVIC M, SANTILLO M, et al. Backup control barrier functions: Formulation and comparative Study. *The 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Austin, USA: IEEE, 2021: 6835 – 6841.
- [23] AGRAWAL A, SREENATH K. Discrete control barrier functions for safety-critical control of discrete systems with application to bipedal robot navigation. *The 13th Conference on Robotics: Science and Systems*. Cambridge, USA: MIT Press, 2017.
- [24] HU T, LONG L. Deadlock avoidance and solution time optimization for discrete-time control systems via control barrier functions. *The 40th Chinese Control Conference (CCC)*. Shanghai, China: IEEE, 2021: 639 – 644.
- [25] MARVI Z, KIUMARSI B. Safe reinforcement learning: A control barrier function optimization approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(6): 1923 – 1940.
- [26] WANG X. Ensuring safety of learning-based motion planners using control barrier functions. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(2): 4773 – 4780.
- [27] AMES A D, COOGAN S, EGERSTEDT M, et al. Control barrier functions: Theory and applications. *The 18th European Control Conference (ECC)*. Naples, Italy: IEEE, 2019: 3420 – 3431.
- [28] GANGOPADHYAY B, DASGUPTA P, DEY S. Safe and stable RL (S2RL) driving policies using control barrier and control lyapunov functions. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2022, DOI: 10.1109/TIV.2022.3160202.
- [29] CAPELLI B, SECCHI C, SABATTINI L. Passivity and control barrier functions: optimizing the use of energy. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(2): 1356 – 1363.
- [30] BUCH J, LIAO S C, SEILER P. Robust control barrier functions with sector-bounded uncertainties. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 6: 1994 – 1999.
- [31] MAJD K, YAGHOUBI S, YAMAGUCHI T, et al. Safe navigation in human occupied environments using sampling and control barrier functions. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Prague, Czech Republic: IEEE, 2021: 5794 – 5800.
- [32] HEGDE A, GHOSE D. Multi-UAV collaborative transportation of payloads with obstacle avoidance. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 6: 926 – 931.
- [33] ZENG J, ZHANG B, SREENATH K, et al. Safety-critical control using optimal-decay control barrier function with guaranteed pointwise feasibility. *American Control Conference (ACC)*. New Orleans, USA: IEEE, 2021: 3856 – 3863.
- [34] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [35] WU G, SREENATH K. Safety-critical control of a planar quadrotor. *American Control Conference (ACC)*. Boston, USA: IEEE, 2016: 2252 – 2258.

作者简介:

龙离军 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为切换系统与混杂控制(构造性控制设计)、安全攸关控制、非线性控制理论与自适应控制, E-mail: longlijun@ise.neu.edu.cn; long_lijun@126.com;

胡腾飞 硕士研究生, 目前研究方向为安全攸关控制, E-mail: 1900797@stu.neu.edu.cn.