具有时变外系统扰动的一维抛物方程的观测器设计

魏 静[1], 郭宝珠[1,2†]

(1. 华北电力大学 数理学院, 北京 102206; 2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘要: 本文考虑含有扰动的一维抛物方程的状态观测问题, 其中系统内部和边界上的扰动由一般的时变外系统产生. 利用反步变换和解耦变换, 设计了基于边界输出信号的状态观测器, 用于在线估计原系统和外部系统的状态. 结果表明, 随着时间的推移, 观测器是指数收敛的. 最后, 通过数值仿真验证了该观测器的有效性.

关键词: 观测器; 时变; 外系统

引用格式: 魏静, 郭宝珠. 具有时变外系统扰动的一维抛物方程的观测器设计. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1408 – 1416

DOI: 10.7641/CTA.2022.20094

Observer design of a 1-D parabolic equation with disturbances generated by time-varying exosystems

WEI Jing[1], GUO Bao-zhu[1,2†]

(1. School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;
2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: In this paper, we consider state observer design for a one-dimensional parabolic equation that is disturbed by external disturbances from spatial domain and boundaries. The disturbances are generated from a general time-varying exosystem. A boundary state observer which estimates in real time both the system state and the exosystem state is designed by using backstepping transformation and decoupling transformation. As a consequence, we show that the observer is exponentially convergent as time goes on. Finally, some numerical simulations are presented to validate the effectiveness of the proposed observer.

Key words: observer; time-varying; exosystem;

Citation: WEI Jing, GUO Baozhu. Observer design of a 1-D parabolic equation with disturbances generated by time-varying exosystems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1408 – 1416

1 引言

状态估计是实现输出反馈控制的必要途径之一, 在控制理论和工程实践中具有广泛应用, 例如文献[1–2]. 在分布参数系统状态重构的早期研究中, 文献[3–4]将Luenberger观测器的设计思想推广至无穷维系统, 此时要求系统具有有界的输出算子. 利用反步(backstepping)技术, 文献[5]为一类抛物型积分–微分方程设计了基于边界输出的状态观测器. 该技术的思想是引入Volterra变换, 将不稳定系统变换为稳定的目标系统, 因此可应用于多种不稳定偏微分方程中[6].

在实际的控制系统中, 不可避免会受到未知外界干扰的影响, 使系统的观测精度下降,甚至导致观测器失效, 这给观测器的设计及应用带来很大挑战. 当外部扰动进入系统时, 需要设计这样的观测器,它不仅能够提供系统状态的在线估计, 而且能够实时估计扰动. 近年来, 针对边界匹配或非匹配扰动, Feng等[7–9]学者将有限维扩张状态观测器(extended state observer, ESO) 推广到无穷维的分布参数系统中, 取得了一系列开创性成果. 文献[10]为带有边界匹配谐波干扰的波动方程设计了自适应观测器, 实现了系统状态和未知参数的在线估计. 一般而言, 当扰动从区域内部和边界两端同时进入系统时, 相应的观测器设计问题比只有单一边界不确定性的系统要困难得多, 现有的结果也只涉及特定类型的扰动, 比如, 参数扰动[11]和调

收稿日期: 2022−02−03; 录用日期: 2022−06−27.
†通信作者. E-mail: bzguo@iss.ac.cn.
本文责任编委: 王军民.
国家自然科学基金项目(12131008), 中国博士后面上基金项目(2021M690993)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (12131008) and the China Postdoctoral Science Foundation (2021M690993).

和扰动[12]. 文献[11]为带有多个不确定参数的非线性波动方程设计了自适应观测器. 在持续激励条件下, 作者证明了上述自适应观测器是指数收敛的. 文献[12]为带有多个外部扰动的抛物方程设计了指数收敛的状态观测器, 其中扰动由线性时不变的外部系统产生. 文献[12] 中的方法还可以应用到其他类型的偏微分方程中, 比如文献[13–14]. 文献[15]考虑了带有一类周期时变外系统的线性各向异性双曲系统的输出调节问题. 作者证明了观测器收敛的前提是相应的周期Sylvester方程可精确求解. 对于无法精确求解的一般时变系统, 文献[15]的方法很难直接推广.

本文研究带有外部扰动的一维抛物方程状态观测器设计问题, 其中所有扰动信号由一般时变外系统产生. 本文有以下创新点: 1) 将时不变或一类特殊的周期时变外系统[15]($S(t)=0$)推广为一般的时变外系统,可以产生更加丰富的扰动信号; 2) 引入全新的时变目标误差系统.

记号: 为了方便, 现引入如下记号. $\mathbb{C}^n$是n维复空间, $\mathbb{C}^{n\times m}$为$n\times m$ 复矩阵构成的集合. 用$\|\cdot\|$表示$\mathbb{C}^n$和$\mathbb{C}^{n\times m}$中的欧氏范数. 如果X和Y为Banach空间, 用$\mathscr{L}(X,Y)$表示由X到Y的有界线性算子全体. 若$Y=X$, 记$\mathscr{L}(X)=\mathscr{L}(X,X)$. 用$C(0,\infty;X)$表示从$[0,\infty)$到$X$的连续函数的全体, $C^m(0,\infty;X)$表示从$[0,\infty)$ 到X的具有m阶连续偏导数的函数全体. 设$A(\cdot)\in C(0,\infty;X)$, 其范数定义为

$$\|A\|_\infty=\sup_{t\geqslant 0}\|A(t)\|_X. \tag{1}$$

本文考虑如下一维抛物方程:

$$\begin{cases} w_t(x,t)=w_{xx}(x,t)+\lambda_0 w(x,t)+\\ \qquad\qquad f(x)d_0(t), \quad 0<x<1, t>0,\\ w_x(0,t)=d_1(t), \qquad t\geqslant 0,\\ w_x(1,t)=u(t)+d_2(t),\ t\geqslant 0,\\ y_m(t)=w(1,t), \qquad t\geqslant 0,\\ w(x,0)=w_0(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \tag{2}$$

其中w_x和w_t分别表示w关于x和t的偏导数, $\lambda_0\in\mathbb{R}$是已知常数, $u(t)$为控制(输入), $y_m(t)$为观测(输出), $w_0(x)$为初值, $d_i(t)(i=0,1,2)$代表外部扰动且由如下时变外系统产生:

$$\begin{cases} \dot v(t)=S(t)v(t),\\ d_i(t)=F_i(t)v(t),\ i=0,1,2,\\ v(0)=v_0\in\mathbb{C}^n, \end{cases} \tag{3}$$

其中: v_0为初值, $S(\cdot)\in C(0,\infty;\mathbb{C}^{n\times n})$, $F_0(\cdot),F_2(\cdot)\in C(0,\infty;\mathbb{C}^{1\times n})$, $F_1(\cdot)\in C^1(0,\infty;\mathbb{C}^{1\times n})$. 与时不变外系统相比, 时变外系统(3)能产生更多类型的扰动信号, 如周期信号[16]和带有时变频率的调和信号[17–18], 在机器臂[16]和光盘驱动器[17–18]中有许多应用.

本文的目标是: 利用输出信号$w(1,t)$, 设计观测器以便同时估计抛物方程(2)和时变外系统(3)的状态. 为此, 对$S(\cdot),F_i(\cdot)(i=0,1,2)$作以下假设:

假设 1　$S(\cdot),F_i(\cdot)(i=0,1,2)$ 是有界的, 即存在常数$C>0$, 使得

$$\begin{cases} \|S\|_\infty+\|F_0\|_\infty+\|F_2\|_\infty\leqslant C,\\ \|F_1\|_\infty+\|\dot F_1\|_\infty\leqslant C. \end{cases} \tag{4}$$

假设 2　$S(\cdot),F_i(\cdot)(i=0,1,2)$是Hölder连续的, 即存在常数$\ell_i>0, 0<\alpha_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,5)$, 使得

$$\begin{cases} \|S(t)-S(s)\|\leqslant \ell_1|t-s|^{\alpha_1},\quad \forall\, t,s\geqslant 0,\\ \|F_0(t)-F_0(s)\|\leqslant \ell_2|t-s|^{\alpha_2},\ \forall\, t,s\geqslant 0,\\ \|F_1(t)-F_1(s)\|\leqslant \ell_3|t-s|^{\alpha_3},\ \forall\, t,s\geqslant 0,\\ \|\dot F_1(t)-\dot F_1(s)\|\leqslant \ell_4|t-s|^{\alpha_4},\ \forall\, t,s\geqslant 0,\\ \|F_2(t)-F_2(s)\|\leqslant \ell_5|t-s|^{\alpha_5},\ \forall\, t,s\geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

本文安排如下: 在第2节中, 引入辅助系统, 并证明其解的存在性, 为后续构建解耦变换做准备; 在第3节中, 利用反步变换和解耦变换, 设计了状态观测器; 第4节, 给出本文的主要结果及证明; 第5节, 通过数值仿真验证理论结果的有效性; 第6节, 总结全文的基本要点.

2　预备: 辅助系统解的存在性

令$H=\{G=(g_1\ g_2\cdots g_n)^{\mathrm T}|g_i\in L^2(0,1)(i=1,2,\cdots,n)\}$. 在本节中, 考虑如下辅助系统:

$$\begin{cases} V_t(x,t)=V_{xx}(x,t)-(\lambda I+S^{\mathrm T}(t))V(x,t)+\\ \qquad\quad F(x,t),\\ V_x(0,t)=V(1,t)=0,\ V(x,0)=V_0(x), \end{cases} \tag{6}$$

其中$\lambda>\|S^{\mathrm T}\|_\infty$是常数, $F(\cdot,t)$在$[0,\infty)$上Hölder连续, 即存在常数$\ell_F>0, 0<\varpi_F\leqslant 1$, 使得

$$\|F(\cdot,t)-F(\cdot,s)\|_H\leqslant \ell_F|t-s|^{\varpi_F},\ \forall\, t,\ s\geqslant 0. \tag{7}$$

定义算子$\mathcal{A}_\lambda: D(\mathcal{A}_\lambda)(\subset H)\to H$为

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\lambda G=G''-\lambda G,\ \forall\, G\in D(\mathcal{A}_\lambda),\\ D(\mathcal{A}_\lambda)=\{G\in H|\mathcal{A}_\lambda G\in H,\\ \qquad\qquad \nabla G(0)=G(1)=0\}. \end{cases} \tag{8}$$

易证, $\mathcal{A}_\lambda$生成H上解析且指数稳定的C_0–半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t}$,

$$\|\mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t}\|_H\leqslant L_0\mathrm{e}^{-\omega_0 t},\quad \forall\, t\geqslant 0, \tag{9}$$

$$\|\mathcal{A}_\lambda\mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t}\|_{\mathcal{L}(H)}\leqslant C_0/t,\ \ \forall\, t>0, \tag{10}$$

其中$L_0>0,\ \omega_0>\lambda, C_0>0$为常数. 令

$$\mathcal{A}(t)=-\mathcal{A}_\lambda+S^{\mathrm T}(t), \tag{11}$$

则系统(6)可改写为空间H上的发展方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm d}{\mathrm dt}V(\cdot,t)+\mathcal{A}(t)V(\cdot,t)=F(\cdot,t),\\ V(\cdot,0)=V_0. \end{cases} \tag{12}$$

注意到算子$\mathcal{A}(t)$是随时间变化的, 系统(12)解的存在性比时不变算子$\mathcal{A}(t)=\mathcal{A}$要复杂许多. 为解决上述问题, 现引入文献[20]中"发展系统"的概念.

定义 1[20, p. 129] 设$U(t,s), 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$为Banach空间$X$上的双参数有界线性算子族. 如果:

1) $U(s,s)=I$;

2) $U(t,r)U(r,s)=U(t,s),\ \forall\ 0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T$;

3) $\forall\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, (t,s)\to U(t,s)$是强连续的, 称$U(t,s)$为$X$上的发展系统.

命题 1[20, 定理6.1] 若线性时变算子

$$A(t):D(A(t))\to X,\ t\in[0,T]$$

满足下列抛物型条件:

P1) 算子$A(t)(t\in[0,T])$的定义域$D(A(t))=D$不依赖于时间t且在空间X中稠密;

P2) 对所有的$t\in[0,T]$以及$\omega\in\mathbb{C}$满足$\mathrm{Re}\,\omega\leqslant 0$, 算子$A(t)$的预解算子$R(\omega,A(t))$都存在, 并且存在常数$M>0$, 使得对所有的$t\in[0,T]$有

$$\|R(\omega,A(t))\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant\frac{M}{|\omega|+1},\ \mathrm{Re}\,\omega\leqslant 0; \quad (13)$$

P3) 存在常数$L>0$和常数$\alpha\in(0,1]$, 使得对所有的$s,t,\tau\in[0,T]$有

$$\|(A(t)-A(s))A(\tau)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant L|t-s|^{\alpha}, \quad (14)$$

则$U(t,s)(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T)$满足:

E1) $\|U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant C, \forall\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$;

E2) 对任意$0\leqslant s<t\leqslant T, U(t,s):X\to D$在空间$X$上强可微. 偏导数$\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,s)\in B(X)$并且在区间$0\leqslant s<t\leqslant T$上强连续. 进一步, 对任意的$0\leqslant s<t\leqslant T$有

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)+A(t)U(t,s)=0, \quad (15)$$

$$\|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)}=\|A(t)U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant \frac{C}{t-s}, \quad (16)$$

以及对任意的$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, 有

$$\|A(t)U(t,s)A(s)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant C; \quad (17)$$

E3) 对任意初值$v\in D, U(t,s)v$相对s是可微的且

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)v=U(t,s)A(s)v. \quad (18)$$

命题 2[20, 定理7.1] 若线性时变算子$\{A(t)\}_{t\in[0.T]}$满足条件P1)–P3), 且$U(t,s)$为满足命题1的发展系统. 如果$f(\cdot)$为$[s,\ t]$上的Hölder连续函数, 则对任意的初值$x\in X$, 下列初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+A(t)u(t)=f(t),\ 0\leqslant s<t\leqslant T,\\ u(s)=x,\end{cases} \quad (19)$$

存在唯一的解u, 并且具有下列表达式:

$$u(t)=U(t,s)x+\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \quad (20)$$

引理 1 假设1–2成立. 则对任意的时刻$t\geqslant 0$, 由式(11)定义的时变算子$\mathcal{A}(t)$满足抛物条件P1)–P3). 因此, 对任意的初值$V_0(\cdot)\in H$, 系统(6)存在唯一的解$V(\cdot,t)\in C(0,\infty;H)$, 并且

$$V(\cdot,t)=U(t,0)V_0+\int_0^t U(t,s)F(\cdot,s)\mathrm{d}s. \quad (21)$$

其中$U(t,s)$为满足E1)–E3)的发展方程.

证 显然, 算子$\mathcal{A}(t)$满足条件P1). 现验证条件P2). 令$\mathcal{A}_0\triangleq\mathcal{A}_\lambda+\lambda I$. 容易证明, 算子$\mathcal{A}_0$生成空间$H$上的解析半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_0 t}$. 于是, $-\mathcal{A}_0$满足条件P2), 即存在常数$M>0$, 使得

$$\|R(\omega,-\mathcal{A}_0)\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant\frac{M}{|\omega|+1},\ \forall\ \mathrm{Re}\,\omega\leqslant 0. \quad (22)$$

因此,

$$\begin{aligned}&\|S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)\|_{\mathscr{L}(H)}=\\&\|S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega-\lambda,-\mathcal{A}_0)\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant\\&\frac{M\|S^{\mathrm{T}}\|_\infty}{|\omega|+\lambda+1},\ \forall\ \mathrm{Re}\,\omega\leqslant 0.\end{aligned} \quad (23)$$

选取

$$\lambda>M\|S^{\mathrm{T}}\|_\infty, \quad (24)$$

有

$$\|S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)\|_{\mathscr{L}(H)}<1. \quad (25)$$

因此, 算子$I-S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)$是可逆的, 并且

$$\begin{aligned}&\|\left(I-S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)\right)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant\\&\frac{1}{1-\|S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)\|_{\mathscr{L}(H)}}.\end{aligned} \quad (26)$$

由下列公式:

$$\begin{aligned}&R(\omega,\mathcal{A}(t))=\\&R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)\left(I-S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)\right)^{-1}\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&\|R(\omega,\mathcal{A}(t))\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant\\&\frac{M}{|\omega|+\lambda+1}\frac{1}{1-\|S^{\mathrm{T}}(t)R(\omega,-\mathcal{A}_\lambda)\|_{\mathscr{L}(H)}}\leqslant\\&\frac{M'}{|\omega|+\lambda+1},\ \forall\ \mathrm{Re}\,\omega\leqslant 0,\end{aligned} \quad (27)$$

其中$M'>0$是常数. 现验证条件P3). 根据式(27), 有

$$\|\mathcal{A}^{-1}(t)\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant M'/(\lambda+1), \quad (28)$$

于是,

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{A}(t)-\mathcal{A}(s))\mathcal{A}^{-1}(\tau)\|_{\mathscr{L}(H)}=\\&\|(S^{\mathrm{T}}(t)-S^{\mathrm{T}}(s))\mathcal{A}^{-1}(\tau)\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant\end{aligned}$$

$$M'/(\lambda+1)\|S^{\mathrm{T}}(t)-S^{\mathrm{T}}(s)\| \leqslant M'/(\lambda+1)\ell_1|t-s|^{\alpha_1},\ \forall\, t,\ s \geqslant 0. \tag{29}$$

余下的证明可从命题1和命题2直接得出.　证毕.

引理 2　假设1–2成立. 由时变算子$\mathcal{A}(t)$生成的发展系统$U(t,s)$是指数稳定的, 即

$$\|U(t,s)\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant L\mathrm{e}^{-\omega(t-s)},\ \forall\, t \geqslant s \geqslant 0, \tag{30}$$

其中$L,\omega>0$是常数.

证　在系统(6)中取$F(x,t)=0$. 定义Lyapunov泛函

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 V^{\mathrm{T}}(x,t)V(x,t)\mathrm{d}x. \tag{31}$$

沿系统(6)的解, 对$E(t)$求微分, 可得

$$\dot{E}(t)\leqslant-\int_0^1|V_x|^2\mathrm{d}x-(\lambda-\|S^{\mathrm{T}}\|_\infty)\int_0^1|V|^2\mathrm{d}x\leqslant -2(\lambda-\|S^{\mathrm{T}}\|_\infty)E(t),\ \forall\, t\geqslant s\geqslant 0. \tag{32}$$

利用Gronwall不等式, 有

$$E(t)\leqslant E(s)\mathrm{e}^{-2(\lambda-\|S^{\mathrm{T}}\|_\infty)(t-s)},\ \forall\, t\geqslant s\geqslant 0. \tag{33}$$

这就证明了式(30).　证毕.

3　观测器设计与时变误差系统

在本节中, 为串联系统(2)–(3)设计如下观测器:

$$\begin{cases}\dot{\hat{v}}(t)=S(t)\hat{v}(t)+K(t)[w(1,t)-\hat{w}(1,t)],\\ \hat{w}_t(x,t)=\hat{w}_{xx}(x,t)+\lambda_0\hat{w}(x,t)+\\ \qquad f(x)F_0(t)\hat{v}(t)+\\ \qquad \gamma(x,t)[w(1,t)-\hat{w}(1,t)],\\ \hat{w}_x(0,t)=F_1(t)\hat{v}(t),\\ \hat{w}_x(1,t)=u(t)+F_2(t)\hat{v}(t)+\\ \qquad k_0[w(1,t)-\hat{w}(1,t)],\end{cases} \tag{34}$$

其中$k_0>\dfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_0)$为调节常数且常数$\lambda>\|S^{\mathrm{T}}\|_\infty$, $K(t)\in\mathbb{C}^n$和$\gamma(\cdot,t)\in L^2(0,1)$都是待定的依赖于时间的观测器增益. 定义观测器误差

$$\begin{cases}\tilde{v}(t)=v(t)-\hat{v}(t),\\ \tilde{w}(x,t)=w(x,t)-\hat{w}(x,t),\end{cases} \tag{35}$$

则$(\tilde{v}\ \ \tilde{w})^{\mathrm{T}}$满足

$$\begin{cases}\dot{\tilde{v}}(t)=S(t)\tilde{v}(t)-K(t)\tilde{w}(1,t),\\ \tilde{w}_t(x,t)=\tilde{w}_{xx}(x,t)+\lambda_0\tilde{w}(x,t)+\\ \qquad f(x)F_0(t)\tilde{v}(t)-\gamma(x,t)\tilde{w}(1,t),\\ \tilde{w}_x(0,t)=F_1(t)\tilde{v}(t),\\ \tilde{w}_x(1,t)=F_2(t)\tilde{v}(t)-k_0\tilde{w}(1,t).\end{cases} \tag{36}$$

3.1　反步变换

由于系统(36)存在不稳定项$\lambda_0\tilde{w}(x,t)$, 考虑如下的反步变换[21]和其逆变换:

$$\begin{cases}\tilde{w}(x,t)=Pu(x,t)=\\ \qquad u(x,t)-\displaystyle\int_x^1 p(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y,\\ u(x,t)=P^{-1}\tilde{w}(x,t)=\\ \qquad \tilde{w}(x,t)+\displaystyle\int_x^1 q(x,y)\tilde{w}(y,t)\mathrm{d}y,\end{cases} \tag{37}$$

其中

$$\begin{cases}p_{xx}(x,y)-p_{yy}(x,y)=-(\lambda+\lambda_0)p(x,y),\\ p_x(0,y)=0,\ p(x,x)=-\dfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_0)x,\\ q_{xx}(x,y)-q_{yy}(x,y)=(\lambda+\lambda_0)q(x,y),\\ q_x(0,y)=0,\ q(x,x)=-\dfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_0)x.\end{cases} \tag{38}$$

特别地, 系统(38)的解为

$$\begin{cases}p(x,y)=-(\lambda+\lambda_0)y\dfrac{I_1(\sqrt{(\lambda+\lambda_0)(y^2-x^2)})}{\sqrt{(\lambda+\lambda_0)(y^2-x^2)}},\\ q(x,y)=-(\lambda+\lambda_0)y\dfrac{J_1(\sqrt{(\lambda+\lambda_0)(y^2-x^2)})}{\sqrt{(\lambda+\lambda_0)(y^2-x^2)}},\end{cases} \tag{39}$$

其中: $I_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$是修正的贝塞尔函数, $J_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$是贝塞尔函数. 选取

$$\gamma(x,t)=-p_y(x,1)-kp(x,1)+P\gamma_1(x,t), \tag{40}$$

其中: $k\triangleq k_0-\dfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_0)>0$, $\gamma_1(\cdot,t)\in L^2(0,1)$是待定函数. 在变换(37)下, 系统(36)变为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{v}}(t)=S(t)\tilde{v}(t)-K(t)u(1,t),\\ u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-\lambda u(x,t)+\\ \qquad g_0(x,t)\tilde{v}(t)-\gamma_1(x,t)u(1,t),\\ u_x(0,t)=F_1(t)\tilde{v}(t),\\ u_x(1,t)=F_2(t)\tilde{v}(t)-ku(1,t),\end{cases} \tag{41}$$

其中

$$g_0(x,t)=P^{-1}(f(x)F_0(t))+q(x,1)F_2(t). \tag{42}$$

3.2　解耦变换

为了确定$\gamma_1(\cdot,t)$和$K(t)$, 现引入如下解耦变换:

$$\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-b(x,t)\tilde{v}(t), \tag{43}$$

其中b满足

$$\begin{cases}b_t(x,t)=b_{xx}(x,t)-\lambda b(x,t)-\\ \qquad b(x,t)S(t)+g_0(x,t),\\ b_x(0,t)=F_1(t),\ b(1,t)=E(t),\\ b(x,0)=b_0(x).\end{cases} \tag{44}$$

选取$E(t)\in\mathbb{C}^{1\times n}$, 使得$(S(t),E(t))$在$[0,\infty)$上是一致完全可观测的[22]. 根据文献[22, 引理3], 存在有界的$K(t)\in\mathbb{C}^n$, 使得如下系统:

$$\dot{\tilde{v}}(t)=(S(t)-K(t)E(t))\tilde{v}(t)\triangleq S_e(t)\tilde{v}(t) \tag{45}$$

的状态转移矩阵$\varPhi(t,s)$是一致指数稳定的, 即

$$\|\varPhi(t,s)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)}\leqslant L_1\mathrm{e}^{-\omega_1(t-s)},\ \forall\, t\geqslant s, \tag{46}$$

其中L_1和ω_1为正常数. 如果系统(44)存在解, 选取

$$\gamma_1(x,t)=b(x,t)K(t). \tag{47}$$

在变换(43)下, 系统(41)变为如下目标误差系统:

$$\begin{cases}\dot{\tilde{v}}(t)=S_e(t)\tilde{v}(t)-K(t)\tilde{u}(1,t),\\ \tilde{u}_t(x,t)=\tilde{u}_{xx}(x,t)-\lambda\tilde{u}(x,t),\\ \tilde{u}_x(0,t)=0,\\ \tilde{u}_x(1,t)=-k\tilde{u}(1,t)+\varDelta(t)\tilde{v}(t),\end{cases} \tag{48}$$

其中

$$\varDelta(t)=F_2(t)-b_x(1,t)-kE(t). \tag{49}$$

注 1 举例说明有界观测器增益$K(t)$的选取. 若$(S(t),E(t))$满足能观测标准型, 即

$$\begin{cases}S(t)=\begin{pmatrix}0\cdots0 & 0 & a_n(t)\\ 1\cdots0 & 0 & a_{n-1}(t)\\ \vdots\quad\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0\cdots1 & 0 & a_2(t)\\ 0\cdots0 & 1 & a_1(t)\end{pmatrix},\\ E(t)=(0,0,\cdots,0,1),\end{cases} \tag{50}$$

则$(S(t),\ E(t))$是一致完全可观测的. 对任意给定的Hurwitz矩阵

$$S_1=\begin{pmatrix}0\cdots0 & 0 & \mu_1\\ 1\cdots0 & 0 & \mu_2\\ \vdots\quad\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0\cdots1 & 0 & \mu_{n-1}\\ 0\cdots0 & 1 & \mu_n\end{pmatrix}, \tag{51}$$

观测器增益$K(t)=(k_1(t)\ \ k_2(t)\cdots k_n(t))^{\mathrm{T}}$取为

$$k_i(t)=a_{n+1-i}(t)-\mu_i,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{52}$$

简单计算, 可得

$$S(t)-K(t)E(t)=S_1 \tag{53}$$

是Hurwitz矩阵. 在一定条件下存在唯一的坐标变换[23]可将一般的一致完全可观测的$(S(t),E(t))$变为能观测标准型(50). 于是, 利用相似的方法可获得一致完全可观测$(S(t),E(t))$的观测器增益$K(t)$.

下述引理说明了系统(44)解的存在性和有界性.

引理 3 假设1–2成立. 若$E(\cdot)$为有界函数且在$[0,\infty)$上Hölder连续, 即存在常数$C_E,\ell_{i,E}>0$和$\varpi_{i,E}\in(0,1]$, $i=1,2$, 使得

$$\|E\|_\infty+\|\dot{E}\|_\infty\leqslant C_E, \tag{54}$$

以及

$$\begin{cases}\|E(t)-E(s)\|\leqslant\ell_{1,E}|t-s|^{\varpi_{1,E}},\ \forall\, t,\ s\geqslant0,\\ \|\dot{E}(t)-\dot{E}(s)\|\leqslant\ell_{2,E}|t-s|^{\varpi_{2,E}},\ \forall\, t,\ s\geqslant0.\end{cases} \tag{55}$$

对任意的初值$b_0^{\mathrm{T}}\in H$, 系统(44)存在唯一的解$b^{\mathrm{T}}\in C(0,\infty;H)$, 使得

$$\sup_{t\geqslant0}\|b^{\mathrm{T}}(\cdot,t)\|_H\leqslant l_1, \tag{56}$$

其中$l_1>0$为常数. 进一步, $b_x^{\mathrm{T}}(1,t)$是有界的, 即

$$\sup_{t>0}\|b_x^{\mathrm{T}}(1,t)\|\leqslant l_2, \tag{57}$$

其中$l_2>0$为常数.

证 令

$$V(x,t)=b^{\mathrm{T}}(x,t)-(x-1)F_1^{\mathrm{T}}(t)-x^2E^{\mathrm{T}}(t), \tag{58}$$

则

$$\begin{cases}V_t(x,t)=V_{xx}(x,t)-(\lambda I+S^{\mathrm{T}}(t))V(x,t)+\\ \qquad\qquad F(x,t),\\ V_x(0,t)=V(1,t)=0,\\ V(x,0)=V_0(x),\end{cases} \tag{59}$$

其中

$$\begin{cases}F(x,t)=g_0^{\mathrm{T}}(x,t)+2E^{\mathrm{T}}(t)-\\ \qquad (x-1)[\dot{F}_1^{\mathrm{T}}(t)+(\lambda I+S^{\mathrm{T}}(t))F_1^{\mathrm{T}}(t)]-\\ \qquad x^2[\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)+(\lambda I+S^{\mathrm{T}}(t))E^{\mathrm{T}}(t)],\\ V_0(x)=b^{\mathrm{T}}(x,0)-(x-1)F_1^{\mathrm{T}}(0)-x^2E^{\mathrm{T}}(0).\end{cases}$$

将V–系统改写为空间H上的发展方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\cdot,t)+\mathcal{A}(t)V(\cdot,t)=F(\cdot,t), \tag{60}$$

其中时变算子$\mathcal{A}(t)$由式(11)定义. 根据引理1–2, 对任意$V_0(\cdot)\in H$, 系统(59)存在唯一解$V\in C(0,\infty;H)$,

$$V(\cdot,t)=U(t,0)V_0+\int_0^t U(t,s)F(\cdot,s)\mathrm{d}s, \tag{61}$$

其中$U(t,s)$指数稳定, 即存在常数$L,\omega>0$, 使得

$$\|U(t,s)\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant L\mathrm{e}^{-\omega(t-s)},\ \forall\, t\geqslant s\geqslant0. \tag{62}$$

由假设1和式(54),

$$\|F(\cdot,t)\|_H\leqslant M,\ \forall t\geqslant0. \tag{63}$$

结合式(62)–(63), 可得

$$\|V(\cdot,t)\|_H\leqslant L\mathrm{e}^{-\omega t}\|V_0\|_H+\frac{ML}{\omega}(1-\mathrm{e}^{-\omega t}), \tag{64}$$

其中$\forall\, t\geqslant0$. 由此可推出式(56).

另一方面, 令

$$F_1(V(x,t))=-S^{\mathrm{T}}(t)V(x,t)+F(x,t). \tag{65}$$

由式(64), 有

$$\|F_1(V(\cdot,t))\|_H \leqslant M_1,\ \forall\, t \geqslant 0. \tag{66}$$

注意到, V–系统可改写为空间H上的半线性发展方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\cdot,t) = \mathcal{A}_\lambda V(\cdot,t) + F_1(V(\cdot,t)). \tag{67}$$

因为系统(59)存在唯一的解$V \in C(0,\infty;H)$, 所以

$$V(\cdot,t) = \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t}V_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda(t-s)}F_1(V(\cdot,s))\mathrm{d}s. \tag{68}$$

利用Sobolev迹定理, 式(67)–(68), 有

$$\begin{aligned}\|V_x(1,t)\| \leqslant\ & C_1(\|V_{xx}(\cdot,t)\|_H + \|V(\cdot,t)\|_H) \leqslant \\ & C_1\|\mathcal{A}_\lambda \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t}V_0\|_H + C_2\|V(\cdot,t)\|_H + \\ & C_1\|\int_0^t \mathcal{A}_\lambda \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda(t-s)}F_1(V(\cdot,s))\mathrm{d}s\|_H,\end{aligned} \tag{69}$$

其中$C_1,\ C_2 > 0$是常数. 根据文献[20, 定理2.4], 式(9)–(10), 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\lambda \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t}V_0\|_H = & \|\mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda(t-t_0)}(\mathcal{A}_\lambda \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t_0}V_0)\|_H \leqslant \\ & \frac{CL_0}{t_0}\mathrm{e}^{-\omega_0(t-t_0)}\|V_0\|_H,\end{aligned} \tag{70}$$

其中$\forall\, t \geqslant t_0, t_0 > 0$是任意固定常数, 以及

$$\begin{aligned}&\|\int_0^t \mathcal{A}_\lambda \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda(t-s)}F_1(V(\cdot,s))\mathrm{d}s\|_H \leqslant \\ &\int_0^t \|\mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda(t-t_0-s)}\|_H\|\mathcal{A}_\lambda \mathrm{e}^{\mathcal{A}_\lambda t_0}\|_{\mathscr{L}(H)} \times \\ &\|F_1(V(\cdot,s))\|_H \mathrm{d}s \leqslant \\ &\frac{CM_1L_0}{\omega_0 t_0}[\mathrm{e}^{\omega_0 t_0} - \mathrm{e}^{-\omega_0(t-t_0)}],\ \forall\, t \geqslant t_0.\end{aligned} \tag{71}$$

根据式(69)–(71), 可得

$$\sup_{t>0}\|V_x(1,t)\| \leqslant C_3, \tag{72}$$

其中$C_3 > 0$是常数. 于是, 由式(72)(58), 可得式(57).

证毕.

4　主要结果

注意到, 状态转移矩阵$\Phi(t,s)$是指数稳定的, 于是存在唯一的对称正定矩阵$P(t)$满足方程

$$\begin{cases}\dot{P}(t) = -S_e^{\mathrm{T}}(t)P(t) - P(t)S_e(t) - mI,\\ P(\infty) = 0,\end{cases} \tag{73}$$

其中:

$$\begin{cases} m_1 = \sup\limits_{t>0}\|\Delta(t)\|^2,\ m_2 = \sup\limits_{t\geqslant 0}\|P(t)K(t)\|^2,\\ 0 < \delta_1 < \dfrac{k}{2},\ 0 < \delta_2 < \dfrac{k}{4},\ m > \dfrac{1}{2\delta_1}m_1 + \dfrac{1}{\delta_2}m_2.\end{cases} \tag{74}$$

令$\mathcal{H} = L^2(0,1)$. 现讨论目标误差系统(48)在状态空间$\mathcal{X} = \mathbb{C}^n \times \mathcal{H}$上的局部存在性.

定理 1　假设1–2成立. 若$E(\cdot)$满足式(54)–(55), 则对任意初值$(\tilde{v}_0\ \ \tilde{u}_0)^{\mathrm{T}} = (\tilde{v}(0)\ \ \tilde{u}(\cdot,0))^{\mathrm{T}} \in \mathcal{X}$, 存在时刻$T > 0$, 使得时变的目标误差系统(48)存在唯一解$(\tilde{v}(t)\ \ \tilde{u}(\cdot,t))^{\mathrm{T}} \in C(0,T;\mathcal{X})$.

证　利用压缩映像原理证明此定理. 定义算子$\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1)(\subset \mathcal{H}) \to \mathcal{H}$为

$$\begin{cases}\mathcal{A}_1 f = f'' - \lambda f,\ \forall\, f \in D(\mathcal{A}_1),\\ D(\mathcal{A}_1) = \{f \in H^2(0,1)|\\ \qquad f'(0) = 0,\ f'(1) = -kf(1)\}.\end{cases} \tag{75}$$

易证, 算子$\mathcal{A}_1$生成$\mathcal{H}$上指数稳定的C_0–半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_1 t}$, 且$\delta(x-1)$对$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_1 t}$是允许的. 若$\tilde{u}(1,\cdot) \in C[0,T]$存在, 则由$\delta(x-1)$的允许性可知, 系统(48)存在唯一的解$(\tilde{v}(t)\ \ \tilde{u}(\cdot,t))^{\mathrm{T}} \in C(0,T;\mathcal{X})$, 且满足

$$\begin{cases}\tilde{v}(t) = \Phi(t,0)\tilde{v}_0 - \displaystyle\int_0^t \Phi(t,s)K(s)\tilde{u}(1,s)\mathrm{d}s,\\ \tilde{u}(x,t) =\\ \mathrm{e}^{\mathcal{A}_1 t}\tilde{u}_0 + \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathcal{A}_1(t-s)}\delta(x-1)\Delta(s)\tilde{v}(s)\mathrm{d}s =\\ \mathrm{e}^{\mathcal{A}_1 t}\tilde{u}_0 \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathcal{A}_1(t-s)}\delta(x-1)\Phi_1(s,0)\tilde{v}_0\mathrm{d}s -\\ \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathcal{A}_1(t-s)}\delta(x-1)\int_0^s \phi_2(s,\tau)\tilde{u}(1,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\end{cases} \tag{76}$$

其中

$$\begin{cases}\Phi_1(s,0) = \Delta(s)\Phi(s,0),\\ \phi_2(s,\tau) = \Delta(s)\Phi(s,\tau)K(\tau).\end{cases} \tag{77}$$

根据式(46)(57), 易得

$$\begin{cases}\|\Phi_1(s,0)\| \leqslant l_1\mathrm{e}^{-\varpi_1 s}, \quad \forall\, s > 0,\\ |\phi_2(s,\tau)| \leqslant l_2\mathrm{e}^{-\varpi_2(s-\tau)},\ \forall\, s \geqslant \tau > 0,\end{cases} \tag{78}$$

其中$l_i, \varpi_i > 0 (i = 1,2)$是常数.

现证明$\tilde{u}(1,t)$的存在性. 定义$C[0,T]$上的范数为

$$|||y|||_\infty = \sup_{t\in[0,T]}|y(t)|,\ \forall\, y \in C[0,T]. \tag{79}$$

对给定初值$(\tilde{v}_0\ \ \tilde{u}_0)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{X}$, 定义映射

$$F : C[0,T] \to C[0,T] \tag{80}$$

为

$$\begin{aligned}&Fy(t) =\\ &\mathrm{e}^{\mathcal{A}_1 t}\tilde{u}_0(1) +\\ &\int_0^t \mathrm{e}^{\mathcal{A}_1(t-s)}\delta(x-1)\Phi_1(s,0)\tilde{v}_0\mathrm{d}s\Big|_{x=1}\\ &-\int_0^t \mathrm{e}^{\mathcal{A}_1(t-s)}\delta(x-1)\int_0^s \phi_2(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\Big|_{x=1}.\end{aligned}$$

计算$\mathcal{A}_1$的特征值与特征向量, 有

$$\begin{cases}\mu_n = -\lambda - (n\pi)^2 + \mathcal{O}(n^{-1}),\\ q_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x) + \mathcal{O}(n^{-1}).\end{cases} \tag{81}$$

易证, $\{q_n : n = 1,2,\cdots\}$构成$\mathcal{H}$上的一组Riesz基. 因此, $Fy(t)$可改写为

$$
\begin{aligned}
&Fy(t)=\\
&\sum_{n=1}^{\infty}a_nq_n(1)\mathrm{e}^{\mu_nt}+\\
&\sum_{n=1}^{\infty}q_n(1)b_n\int_0^t\mathrm{e}^{\mu_n(t-s)}\varPhi_1(s,0)\tilde{v}_0\mathrm{d}s-\\
&\sum_{n=1}^{\infty}q_n(1)b_n\int_0^t\mathrm{e}^{\mu_n(t-s)}\int_0^s\phi_2(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{82}
$$

其中: 常数$\ell_i(i=1,2,3)>0$, $a_n=\langle\tilde{u}_0,q_n\rangle_{\mathcal{H}}$,

$$
\begin{cases}
\ell_1\|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\leqslant\ell_2\|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{H}}^2,\\
|b_n|=|\langle\delta(x-1),\ q_n\rangle_{\mathcal{H}}|=|q_n(1)|\leqslant\ell_3.
\end{cases}
\tag{83}
$$

由式(82)可得$F(C[0,T])\subset C[0,T]$. 对任意$y_1,y_2\in C[0,T]$, 可得

$$
\begin{aligned}
&Fy_1(t)-Fy_2(t)=\\
&-\sum_{n=1}^{\infty}q_n(1)b_n\int_0^t\mathrm{e}^{\mu_n(t-s)}\times\\
&\int_0^s\phi_2(s,\tau)(y_1(\tau)-y_2(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

利用Hölder不等式, 有

$$
\begin{aligned}
&|\int_0^s\phi_2(s,\tau)(y_1(\tau)-y_2(\tau))\mathrm{d}\tau|\leqslant\\
&\|\phi_2(s,\cdot)\|_{L^2(0,s)}\|y_1-y_2\|_{L^2[0,T]}\leqslant\\
&C_1\|y_1-y_2\|_{L^2[0,T]}\leqslant C_1T\,|||\,y_1-y_2|||_{\infty},
\end{aligned}
\tag{85}
$$

其中$C_1>0$是正常数. 根据式(83), 可得

$$
|\int_0^tq_n(1)b_n\mathrm{e}^{\mu_n(t-s)}\mathrm{d}s|\leqslant\frac{\ell_3^2}{|\mu_n|}=\mathcal{O}(n^{-2}).\tag{86}
$$

结合式(85), 有

$$
\begin{aligned}
|||Fy_1-Fy_2|||_{\infty}\leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}(n^{-2})C_1T\,|||\,y_1-y_2|||_{\infty}\leqslant\\
&C_1C_2T\,|||\,y_1-y_2|||_{\infty},
\end{aligned}
\tag{87}
$$

其中$C_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}(n^{-2})$. 对任意$T<\dfrac{1}{C_1C_2}$, 由压缩映像原理, 式(82)具有唯一不动点$\tilde{u}(1,\cdot)\in C[0,T]$.

证毕.

下述定理2表明, 定理1中得到的解是一个整体解, 并且是指数稳定的.

定理 2 假设1–2成立. 若$E(\cdot)$满足式(54)–(55), 则对任意初值$(\tilde{v}(0)\ \ \tilde{u}(\cdot,0))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{X}$, 时变的目标误差系统(48) 存在唯一的解$(\tilde{v}\ \ \tilde{u})^{\mathrm{T}}\in C(0,\ \infty;\ \mathcal{X})$, 使得

$$
\|(\tilde{v}\ \ \tilde{u})^{\mathrm{T}}\|_{\mathcal{X}}\leqslant L_2\mathrm{e}^{-\omega_2t}\|(\tilde{v}(0)\ \ \tilde{u}(\cdot,0))^{\mathrm{T}}\|_{\mathcal{X}},\tag{88}
$$

其中上式$\forall\ t\geqslant0$成立, 且$L_2,\omega_2>0$为常数.

证 根据定理1, 存在$\delta>0$, 使得系统(48)的唯一的局部解从区间$[0,T]$延拓到区间$[0,T+\delta]$上. 假设$[0,T_{\max})$为系统(48)解存在的最大区间, 下证$T_{\max}=\infty$. 为此, 只要证明

$$
E_1(t)=\frac{1}{2}\int_0^1|\tilde{u}(x,t)|^2\mathrm{d}x+\tilde{v}^{\mathrm{T}}(t)P(t)\tilde{v}(t)<\infty,\quad\forall t\geqslant0.\tag{89}
$$

沿系统(48), 对$E_1(t)$求导, 可得

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_1(t)=&-\lambda\int_0^1|\tilde{u}(x,t)|^2\mathrm{d}x-\int_0^1|\tilde{u}_x(x,t)|^2\mathrm{d}x-\\
&m\tilde{v}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{v}(t)-k\tilde{u}^2(1,t)+\varDelta(t)\tilde{v}(t)\tilde{u}(1,t)-\\
&[K^{\mathrm{T}}(t)P(t)\tilde{v}(t)+\tilde{v}^{\mathrm{T}}(t)P(t)K(t)]\tilde{u}(1,t).
\end{aligned}
$$

利用Young不等式和Poincaré不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&|\varDelta(t)\tilde{v}(t)\tilde{u}(1,t)|\leqslant\\
&\frac{m_1}{2\delta_1}\big(\tilde{v}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{v}(t)\big)+\frac{\delta_1}{2}|\tilde{u}(1,t)|^2,\ \forall\ t\geqslant0,
\end{aligned}
\tag{90}
$$

$$
\begin{aligned}
&|K^{\mathrm{T}}(t)P(t)\tilde{v}(t)\tilde{u}(1,t)|=\\
&|\tilde{v}^{\mathrm{T}}(t)P(t)K(t)\tilde{u}(1,t)|\leqslant\\
&\frac{m_2}{2\delta_2}\big(\tilde{v}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{v}(t)\big)+\frac{\delta_2}{2}|\tilde{u}(1,t)|^2,\ \forall\ t\geqslant0,
\end{aligned}
\tag{91}
$$

其中$\delta_1,\delta_2,m_1,m_2$满足式(74). 结合式(90)–(91)(74), 有

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_1(t)\leqslant&-[k-\frac{\delta_1}{2}-\delta_2]|\tilde{u}(1,t)|^2-\\
&[m-\frac{m_1}{2\delta_1}-\frac{m_2}{\delta_2}]\big(\tilde{v}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{v}(t)\big)-\\
&\lambda\int_0^1|\tilde{u}(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant-\mu E_1(t),
\end{aligned}
\tag{92}
$$

其中$\forall\ t>0$成立, 并且

$$
\mu=\min\{2\lambda,\frac{m-\frac{m_1}{2\delta_1}-\frac{m_2}{\delta_2}}{\sup\limits_{t\geqslant0}\|P(t)\|}\}>0.\tag{93}
$$

利用Gronwall不等式, 有

$$
E_1(t)\leqslant E_1(0)\mathrm{e}^{-\mu t},\ \forall\ t\geqslant0.\tag{94}
$$

由此推得式(88)–(89). 证毕.

5 数值模拟

为了举例说明状态观测器的性能, 选取

$$
\begin{cases}
S(t)=\begin{pmatrix}0&0.2\sin\sqrt{t+1}\\1&0.2i\end{pmatrix},\ E(t)=(0\ \ 1),\\
F_1(t)=(\cos t\ \ \sin t),\ F_0(t)=F_2(t)=0.
\end{cases}
\tag{95}
$$

显然, 式(95)满足定理2的假设条件, 并且$(S(t),E(t))$是一致完全可观测的. 因而, 选取

$$
K(t)=(0.2\sin\sqrt{t+1}+25\ \ 0.2i+10)^{\mathrm{T}}.\tag{96}
$$

令$u(t)=0$. 系统(2)–(3)和观测器(34)的初值和参数选取为

$$
\begin{cases}
w(\cdot,0)=0,\ \hat{w}(\cdot,0)=200\cos(\pi x)-18i,\\
v(0)=(10\ \ 2)^{\mathrm{T}},\ \hat{v}(0)=(22\ \ 22)^{\mathrm{T}},\\
b(x,0)=(0\ \ 0),\\
\lambda_0=0,\ \lambda=1.45,\ k_0=10,\ k=9.275.
\end{cases}
\tag{97}
$$

记$v(t)=(v_1(t)\ \ v_2(t))^{\mathrm{T}}$, $\hat{v}(t)=(\hat{v}_1(t)\ \ \hat{v}_2(t))^{\mathrm{T}}$.

利用有限差分方法, 对串联系统(2)–(3)以及其观测器(34)数值离散, 并用MATLAB软件数值仿真, 其中时间步长和空间步长分别取为4×10^{-5}和1×10^{-1}. 串联系统(2)–(3)的状态$(w(x,t)\ \ v_1(t)\ \ v_2(t))^{\mathrm{T}}$和观测系统(34)的状态$(\hat{w}(x,t)\ \ \hat{v}_1(t)\ \ \hat{v}_2(t))^{\mathrm{T}}$绘制在图1–6中. 从图可知, 观测器快速且光滑地收敛到它们的真实值.

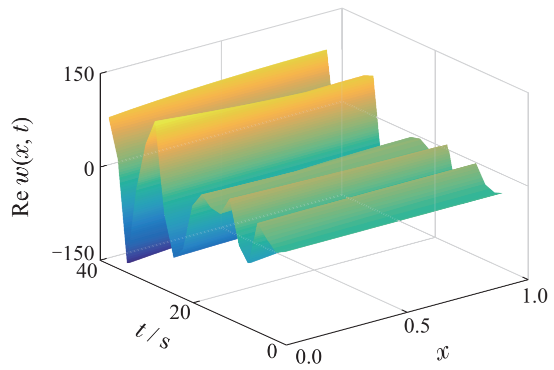

图 1　$w(x,t)$的实部

Fig. 1　Real part of $w(x,t)$

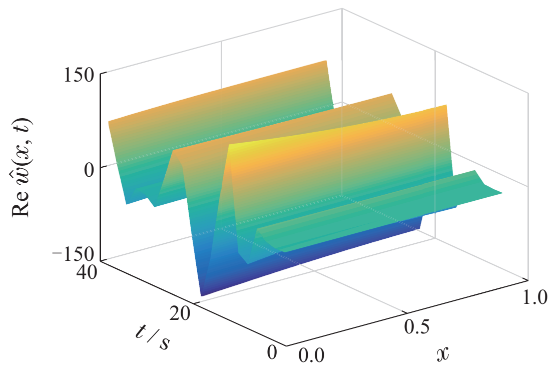

图 2　$\hat{w}(x,t)$的实部

Fig. 2　Real part of $\hat{w}(x,t)$

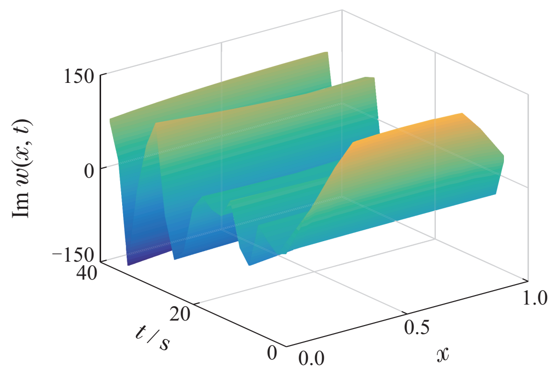

图 3　$w(x,t)$的虚部

Fig. 3　Imaginary part of $w(x,t)$

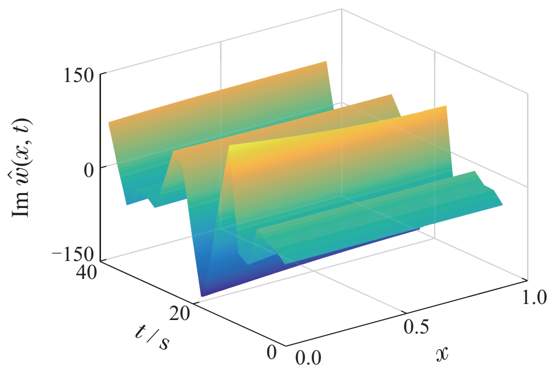

图 4　$\hat{w}(x,t)$的虚部

Fig. 4　Imaginary part of $\hat{w}(x,t)$

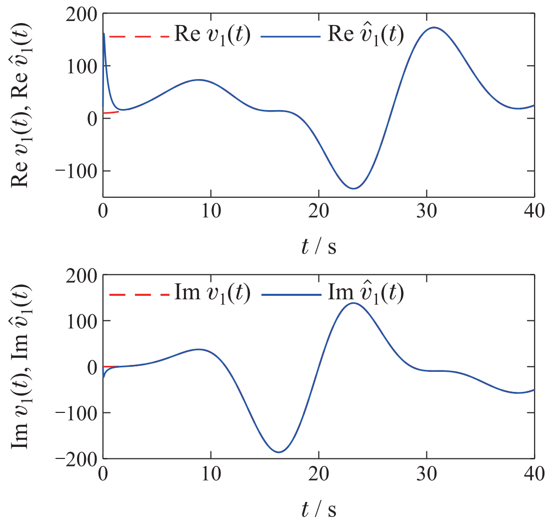

图 5　$\hat{v}_1(t)$跟踪$v_1(t)$

Fig. 5　$\hat{v}_1(t)$ tracking $v_1(t)$

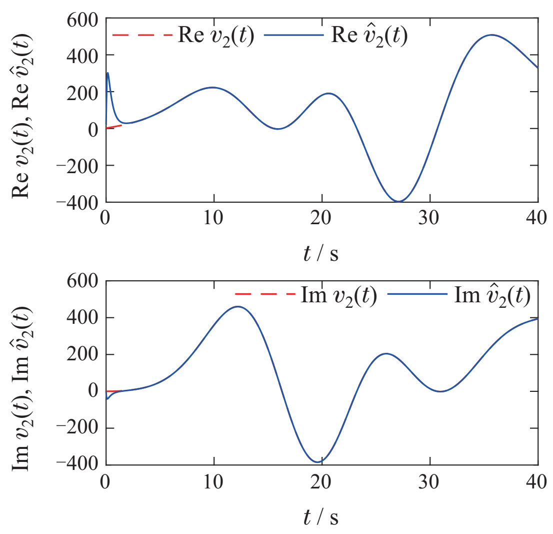

图 6　$\hat{v}_2(t)$跟踪$v_2(t)$

Fig. 6　$\hat{v}_2(t)$ tracking $v_2(t)$

6　结论

本文研究了含扰动的一维抛物方程的观测器设计问题, 其中扰动作用于方程内部及全部边界. 本文的难点在于扰动信号是由一般的线性时变外系统产生.

利用边界输出, 通过结合反步变换和解耦变换, 首次为带有此类扰动的偏微分方程设计了状态观测器. 结果表明, 该状态观测器是指数收敛的. 最后, 通过数值仿真验证了结论的有效性. 另外, 本文中的观测器设计方法可推广于带有特殊时变系数$\lambda_0(\cdot) \in G_\alpha(\mathbb{R}^+_{t_0})$, $\alpha \in [1,\ 2)$的抛物系统中, 此时需采用时变反步变换[24–25]替换时不变反步变换(37).

参考文献:

[1] ZHANG Shihua, QI Xiaohui, WAN Hui. Design and performance analysis of generalized nonlinear extended state observer. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(12): 2059 – 2068.
(张世华, 齐晓慧, 万慧. 广义非线性扩张状态观测器设计及性能分析. 控制理论与应用, 2021, 38(12): 2059 – 2068.)

[2] CHEN Gang, LIN Qing. Observer-based consensus control and fault detection for multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(5): 584 – 591.
(陈刚, 林青. 基于观测器的多智能体系统一致性控制与故障检测. 控制理论与应用, 2014, 31(5): 584 – 591.)

[3] CURTAIN R F, ZWART H. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. New York: Springer-Verlag, 1995.

[4] BOUNIT H, HAMMOURI H. Observers for infinite dimensional bilinear systems. *European Journal of Control*, 1997, 3(4): 325 – 339.

[5] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. Backstepping observers for a class of parabolic PDEs. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(7): 613 – 625.

[6] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. *Boundary Control of PDEs: a Course on Backstepping Designs*. Philadelphia: SIAM, 2008.

[7] FENG H, GUO B Z. New unknown input observer and output feedback stabilization for uncertain heat equation. *Automatica*, 2017, 86: 1 – 10.

[8] ZHANG X, FENG H, CHAI S. Performance output exponential tracking for a wave equation with a general boundary disturbance. *Systems & Control Letters*, 2016, 98: 79 – 85.

[9] FENG H, GUO B Z. A new active disturbance rejection control to output feedback stabilization for a one-dimensional anti-stable wave equation with disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3774 – 3787.

[10] GUO W, GUO B Z. Parameter estimation and non-collocated adaptive stabilization for a wave equation subject to general boundary harmonic disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1631 – 1643.

[11] BENABDELHADI A, GIRI F, AHMED-ALI T, et al. Adaptive observer design for wave PDEs with nonlinear dynamics and parameter uncertainty. *Automatica*, 2021, 123(5): 109295.

[12] DEUTSCHER J. A backstepping approach to the output regulation of boundary controlled parabolic PDEs. *Automatica*, 2015, 57: 56 – 64.

[13] JIN F F, GUO B Z. Performance boundary output tracking for a wave equation with control unmatched disturbance. *European Journal of Control*, 2019, 50: 30 – 40.

[14] DEUTSCHER J. Finite-time output regulation for linear 2×2 hyperbolic systems using backstepping. *Automatica*, 2017, 75: 54 – 62.

[15] DEUTSCHER J, GABRIEL J. Periodic output regulation for general linear heterodirectional hyperbolic systems. *Automatica*, 2019, 103: 208 – 216.

[16] PAUNONEN L, POHJOLAINEN S. Periodic output regulation for distributed parameter systems. *Mathematics of Control Signals Systems*, 2012, 24(4): 403 – 441.

[17] HOU J, LIU T, WANG Q G. Recursive subspace identification subject to relatively slow time-varying load disturbance. *International Journal of Control*, 2018, 91(3): 622 – 638.

[18] SHIM H, LEE J, KIM J S, et al. Output regulation problem and solution for LTV minimum phase systems with time-varying exosystem. *SICE-ICASE International Joint Conference*. Busan: IEEE, 2006: 1823 – 1827.

[19] HUANG Lin. *Stability and Robustness*. Beijing: Science Press, 2003.
(黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础. 北京: 科学出版社, 2003.)

[20] PAZY A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer–Verlag, 1983.

[21] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. *Adaptive Control of Parabolic PDEs*. Princeton: Princeton University Press, 2010.

[22] SILVERMAN L M, ANDERSON B D O. Controllability, observability and stability of linear systems. *SIAM Journal on Control*, 1968, 6(1): 121 – 130.

[23] SHIEH L S, GANESAN S, NAVARRO J M. Transformations of a class of time-varying multivariable control systems to block companion forms. *Computers & Mathematics with Applications*, 1987, 14(6): 471 – 477.

[24] MEURER T. *Control of Higher-Dimensional PDEs*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.

[25] DEUTSCHER J. Cooperative output regulation for a network of parabolic systems with varing parameters. *Automatica*, 2021, 125: 109446.

作者简介:

魏 静 从事博士后研究工作, 目前研究方向为分布参数系统的输出调节, E-mail: JingWei@ncepu.edu.cn;

郭宝珠 教授, 目前研究方向为分布参数系统控制理论, E-mail: bzguo@iss.ac.cn.