

# 一类非线性多自主体系统的实用脉冲一致性

邹文成<sup>1</sup>, 王荣浩<sup>2</sup>, 向峥嵘<sup>1†</sup>

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 陆军工程大学 国防工程学院, 江苏 南京 210007)

**摘要:** 针对一类非线性多自主体系统, 研究基于实用脉冲控制的一致性协议设计问题. 引入脉冲调制间歇控制策略, 利用峰值很大, 持续时间很短的信号代替理想脉冲信号, 设计实用脉冲一致性协议. 首先给出一类连续-间歇型实用脉冲协议. 利用李雅普诺夫函数方法, 图论和间歇控制理论, 证明了在该协议下, 多自主体系统可以实现渐近一致性. 在连续-间歇型实用脉冲协议实施中, 需在控制作用区间连续量测自主体状态. 针对此局限, 提出了采样-间歇型实用脉冲协议. 通过采样和间歇控制理论, 建立了多自主体系统实现渐近一致性的充分条件. 进一步地, 分析了当控制作用区间等于采样周期时, 采样-间歇型实用脉冲协议退化为周期采样控制协议, 而当控制作用区间趋于 0 时, 其退化为脉冲控制协议. 揭示了所提出的采样-间歇型实用脉冲协议同周期采样控制协议, 脉冲控制协议之间的关系.

**关键词:** 多自主体系统; 一致性; 非线性系统; 采样控制; 脉冲控制; 脉冲调制间歇控制

**引用格式:** 邹文成, 王荣浩, 向峥嵘. 一类非线性多自主体系统的实用脉冲一致性. 控制理论与应用, 2023, 40(2): 267–274

DOI: 10.7641/CTA.2022.20189

## Practical impulsive consensus of a class of nonlinear multiagent systems

ZOU Wen-cheng<sup>1</sup>, WANG Rong-hao<sup>2</sup>, XIANG Zheng-rong<sup>1†</sup>

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;  
2. National Defense Engineering College, Army Engineering University, Nanjing Jiangsu 210007, China)

**Abstract:** In this paper, the practical impulsive consensus protocol design is investigated for a class of nonlinear multiagent systems. By introducing the pulse-modulated intermittent control scheme, novel practical impulsive consensus protocols are proposed, where the signals with large peaks and short durations are used to replace the ideal impulsive signals. First, a continuous-intermittent-type practical impulsive protocol is given, and it is proved that the asymptotic consensus can be achieved by the protocol using the Lyapunov functional method, graph theory and the intermittent control theory. In the implementation of the continuous-intermittent-type practical impulsive protocol, it is necessary to measure the agents' states continuously in the control interval. In view of this limitation, the sampling-intermittent-type practical impulsive protocol is developed. Using the sampled-data and intermittent control theory, the sufficient condition on the asymptotic consensus is established. Furthermore, it is analyzed that the sampling-intermittent-type practical impulsive protocol degenerates into the periodic sampled-data protocol when the control interval is equal to the sampling period, and degenerates into the impulsive protocol when the control interval goes to 0. The relationship among the sampling-intermittent-type practical impulsive protocol, periodic sampled-data protocol and impulsive protocol is revealed.

**Key words:** multiagent systems; consensus; nonlinear systems; sampled-data control; impulsive control; pulse-modulated intermittent control

**Citation:** ZOU Wencheng, WANG Ronghao, XIANG Zhengrong. Practical impulsive consensus of a class of nonlinear multiagent systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(2): 267–274

收稿日期: 2022-03-16; 录用日期: 2022-06-30.

†通信作者. E-mail: xiangzr@njut.edu.cn; Tel.: +86 13951012297.

本文责任编辑: 龙离军.

国家自然科学基金项目(61873128, 62173341), 江苏省重点研发计划项目(BE2018004-3)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873128, 62173341) and the Key Research and Development Plan of Jiangsu Province (BE2018004-3).

## 1 引言

近年来,由于多自主系统协同控制在工业和军事领域的广泛应用,其得到大量关注<sup>[1-2]</sup>.一致性是协同控制的一个基础问题,其任务是通过局部信息交互确定分布式控制律,驱动自主体的某一个或几个状态量达到相同<sup>[3]</sup>.多自主系统一致性的相关结论已被广泛用于指导解决更复杂的协同控制任务,如:包含控制<sup>[4]</sup>、时变编队控制<sup>[5]</sup>和分布式任务分配<sup>[6]</sup>等.

由于实际物理系统大都是非线性系统,越来越多的非线性多自主系统一致性协议设计问题被考虑.例如,文献[7]研究了切换有向拓扑和多类型输入饱和约束下非线性多自主系统的输出一致性问题.针对一类分数阶非线性多自主系统,文献[8]提出了一种鲁棒自适应容错一致性协议.利用自适应控制和有限时间控制技术,文献[9]设计了一种新的完全分布式协议.在文献[10]中,一类高阶非线性多自主系统的预定时间双边一致性问题得到研究.针对具有静态和动态不确定性的非线性多自主系统,文献[11]设计了一种最优输出一致性协议.需要指出的是,以上协议的实现都依赖于自主体间的连续通信.众所周知,在实际应用中,自主体间连续通信往往难以实现,高频率的通信也会导致资源浪费.鉴于此,很多研究学者针对非线性多自主系统提出了多种采样一致性协议,有效地降低了系统通信负荷.非线性多自主系统的时间触发型采样一致性协议设计问题在文献[12-14]中得到了研究;文献[15-18]探讨了非线性多自主系统的事件触发一致性;还有一些工作结合时间和事件触发控制方案,为非线性多自主系统设计了一致性协议<sup>[19-20]</sup>.

在脉冲控制方案的实施中,仅在一些离散的时间点有输入作用于系统.因此,脉冲控制天然地属于采样控制的范畴,其可以降低通信负荷和控制器更新频次.此外,脉冲控制还具有响应速度快、鲁棒性强、耗能低等优点<sup>[21]</sup>.脉冲控制策略也被广泛应用于非线性多自主系统的一致性协议设计.脉冲控制策略可以分别与时间触发型和事件触发型采样控制策略相结合,用于构造不同的协议,其主要区别在于产生脉冲时间序列的机制不同.文献[22-25]针对不同的非线性多自主系统提出了时间触发型脉冲一致性协议,要求相邻脉冲时刻的间隔在一个给定的范围之内.文献[26-27]提出了事件触发型脉冲一致性协议,当触发条件得到满足时,脉冲控制信号将作用于所考虑的非线性多自主系统.进而,非线性多自主系统的自触发一致性问题也得到了一定关注<sup>[28-29]</sup>.需要指出的是,上述协议都是依赖理想脉冲信号设计的.

事实上,持续时间无穷小,峰值无穷大的理想脉冲信号是不存在的.因此,依赖理想脉冲信号设计的一

致性协议往往难以实现.在实际应用中,常利用持续时间很短,峰值很大的信号来代替理想脉冲信号,这意味着很多已有的脉冲控制理论不能有效指导脉冲控制的实际应用.文献[30]针对一类二阶积分器多自主系统提出了一种脉冲调制间歇控制(pulse-modulated intermittent control, PMIC)方案,该控制方案充分地结合了采样控制和脉冲控制各自的优势,其实施不依赖理想脉冲信号.文献[31]进一步提出了一种基于随机量化的PMIC一致性跟踪方案.针对具有有向切换拓扑的一阶积分器多自主系统,文献[32]设计了一种新的脉宽调制一致性协议,并建立了系统实现一致性的充分必要条件.文献[30-32]中的研究对象均为线性多自主系统,据作者所知,非线性多自主系统协同PMIC的相关研究结果尚未见报道.此外,PMIC一致性方案同脉冲一致性方案,采样一致性方案的关系也有待进一步探讨.

基于以上讨论,本文就一类非线性多自主系统展开研究,通过引入PMIC技术,设计一致性协议.本文的主要贡献总结如下:

1) 针对所研究的非线性多自主系统,基于PMIC技术,设计了两种新的一致性协议,分别命名为连续-间歇型实用脉冲协议和采样-间歇型实用脉冲协议.利用李雅普诺夫函数方法,图论和间歇控制等理论,建立了多自主系统实现一致性的充分条件.

2) 严格证明了采样一致性协议和脉冲一致性协议都是所提出的采样-间歇型实用脉冲协议的特例.深入探讨了采样-间歇型实用脉冲协议同采样/脉冲一致性协议之间的关系.

本文的剩余章节安排如下:第2节介绍了必要的预备知识,并给出了研究模型和控制目标.第3节呈现了本文的主要研究内容,包括协议设计和相应的一致性证明.第4节通过仿真算例,验证了所提一致性协议的有效性.最后,本文的主要结论在第5节作了总结.

**符号说明:**在本文中, $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 分别表示实数集, $n$ 维实向量集和 $m \times n$ 维实矩阵集.对于对称实矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , $\lambda_{\min}(A)$ 和 $\lambda_{\max}(A)$ 分别表示其最小和最大特征值. $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ 表示对角元素依次为 $a_1, \dots, a_n$ 的对角矩阵.符号 $\|\cdot\|$ 表示2范数算子.函数 $\delta(t)$ 用来表示Dirac函数,也即 $\delta(t) = 0, t \neq 0$ , $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ .

## 2 预备知识与问题描述

### 2.1 代数图论

用无向图 $G = \{\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{A}\}$ 来描述跟随自主体之间的通信拓扑,其中 $\mathbf{V} = \{v_i, i \in \mathcal{V} = \{1, \dots, n\}\}$ 为节点集合,集合中每个元素对应一个自主体; $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ 表示边集; $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示图 $G$ 的邻

接矩阵.  $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) \in \mathbf{E}$  当且仅当  $a_{ij} > 0$ , 这也意味着自主体  $i$  可以从自主体  $j$  处获得信息, 此时  $\mathbf{v}_j$  被称为  $\mathbf{v}_i$  的邻居, 记  $\mathcal{N}_i = \{\mathbf{v}_j : (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) \in \mathbf{E}\}$ ; 否则  $a_{ij} = 0$ , 表示自主体  $j$  没有通向  $i$  的信息流. 对于无向图,  $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) \in \mathbf{E} \iff (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathbf{E}$ . 用一系列边  $(\mathbf{v}_{i_0}, \mathbf{v}_{i_1}), (\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}), \dots, (\mathbf{v}_{i_{q-1}}, \mathbf{v}_{i_q})$  表示节点  $\mathbf{v}_{i_0}$  与  $\mathbf{v}_{i_q}$  间的一条路径. 若任两节点间存在一条路径, 则称图是连通的. 定义对应的 Laplacian 矩阵为  $L = [l_{ij}]_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $l_{ij} = -a_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ . 矩阵  $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$  表征领导自主体与跟随自主体间的通信关系. 如果自主体  $i$  可以从领导自主体获取信息,  $b_i > 0$ ; 否则,  $b_i = 0$ .

## 2.2 问题描述

考虑由1个领导成员和  $n$  个跟随成员组成的多自主体系统, 自主体动态系统给出如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i + f(t, x_i), & i \in \mathcal{V} = \{1, \dots, n\}, \\ \dot{x}_0 = f(t, x_0), \end{cases} \quad (1)$$

其中标签  $1 - n$  对应跟随成员, 标签  $0$  对应领导成员.  $x_i \in \mathbb{R}$  表示自主体的状态,  $u_i \in \mathbb{R}$  表示跟随成员的待设计输入.  $f(\cdot)$  为满足如下假设的非线性函数.

**假设 1**  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , 非线性函数  $f(\cdot)$  满足

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \rho |x_1 - x_2|, \quad \forall t \geq 0, \quad (2)$$

其中  $\rho > 0$  是一个常数.

本文拟基于 PMIC 策略为多自主体系统(1)设计两种实用脉冲一致性协议, 以实现渐近领导跟随一致性, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_0| = 0, \forall i \in \mathcal{V}$ . 两种协议分别命名为连续-间歇型实用脉冲协议和采样-间歇型实用脉冲协议.

以下假设和引理将有助于导出一致性的充分条件.

**假设 2** 图  $G$  无向且连通, 且存在  $b_i > 0, i \in \mathcal{V}$ .

**引理 1** [33-34] 如果假设 2 成立, 那么矩阵  $L + B$  对称且正定.

**引理 2** [35] 记  $D := [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  为一个实数域, 如果函数  $a(t)$  在  $D$  中连续且满足

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_1}^t c(s)a(s)ds, \quad (3)$$

其中  $b(t)$  和  $c(t) \geq 0$  为  $D$  上连续的函数, 则对于  $t \in D$

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_1}^t b(s)c(s)e^{\int_s^t c(r)dr} ds. \quad (4)$$

## 3 主要结果

### 3.1 连续-间歇型实用脉冲协议

连续-间歇型实用脉冲协议设计为如下形式:

$$u_i = \sum_{l=0}^{\infty} k\phi_i \bar{\delta}(t - t_l), \quad (5)$$

其中:  $\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) + b_i(x_0 - x_i), k > 0$  是一个待设计的常数. 函数  $\bar{\delta}(t)$  称为实用脉冲函数, 定义为  $\bar{\delta}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \Delta t), \\ 0, & t \notin [0, \Delta t), \end{cases} t_l = lT, l = 0, 1, 2, \dots$  为脉冲起始时刻,  $\Delta t$  为脉冲宽度,  $T > \Delta t$  为控制周期. 可以看出, 仅在区间  $[t_l, t_l + \Delta t)$ , 存在输入作用于系统. 考虑只有很短的作用区间, 自主体被施加很大的连续输入.

**定理 1** 考虑多自主体系统(1), 如果假设 1 和 2 成立, 且有  $k\Delta t > \frac{\rho T \lambda_{\max}(L + B)}{(\lambda_{\min}(L + B))^2}$ , 那么在协议(5)的作用下, 多自主体系统可实现渐近领导跟随一致性.

**证** 构造如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i^2 = \frac{1}{2} \phi^T \phi, \quad (6)$$

其中  $\phi = [\phi_1 \ \dots \ \phi_n]^T$ .

**情况 1**  $t \in [t_l, t_l + \Delta t)$

可以求得  $V$  对时间  $t$  的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \phi^T \dot{\phi} = -\phi^T (L + B) \dot{\bar{x}} \\ &\quad - k\phi^T (L + B) \phi - \phi^T (L + B) \bar{f}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中:

$$\bar{x} = [x_1 - x_0 \ \dots \ x_n - x_0]^T,$$

$$\bar{f} = [f(t, x_1) - f(t, x_0) \ \dots \ f(t, x_n) - f(t, x_0)]^T.$$

由引理 1 可得  $0 < \lambda_{\min}(L + B) \leq \lambda_{\max}(L + B)$ , 结合假设 1, 易得

$$\begin{aligned} -\phi^T (L + B) \bar{f} &\leq \rho \lambda_{\max}(L + B) \|\phi\| \|\bar{x}\| \leq \\ &\rho \lambda_{\max}(L + B) \|\phi\| \|(L + B)^{-1} \phi\| \leq \\ &\rho \frac{\lambda_{\max}(L + B)}{\lambda_{\min}(L + B)} \phi^T \phi. \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(7)-(8), 可得

$$\dot{V} \leq -\alpha_1 V, \quad (9)$$

其中  $\alpha_1 = 2(k\lambda_{\min}(L + B) - \rho \frac{\lambda_{\max}(L + B)}{\lambda_{\min}(L + B)})$ .

**情况 2**  $t \in [t_l + \Delta t, t_{l+1})$

可以求得  $V$  对时间  $t$  的导数满足

$$\dot{V} = -\phi^T (L + B) \bar{f}. \quad (10)$$

由式(8)得

$$\dot{V} \leq \alpha_2 V, \quad (11)$$

其中  $\alpha_2 = 2\rho \frac{\lambda_{\max}(L + B)}{\lambda_{\min}(L + B)}$ .

综合情况 1 和 2 可得  $\forall t \in [t_l, t_l + \Delta t)$ ,

$$V(t) \leq e^{-\alpha_1(l\Delta t + t - lT) + \alpha_2 l(T - \Delta t)} V(t_0), \quad (12)$$

而对于任意  $t \in [t_l + \Delta t, t_{l+1})$ , 有

$$V(t) \leq e^{-\alpha_1(l+1)\Delta t + \alpha_2(l(T-\Delta t) + t - lT - \Delta t)} V(t_0). \quad (13)$$

因此, 不难得到

$$V(t_l) \leq e^{-l(\alpha_1\Delta t - \alpha_2(T-\Delta t))} V(t_0). \quad (14)$$

注意到  $k\Delta t > \frac{\rho T \lambda_{\max}(L+B)}{(\lambda_{\min}(L+B))^2}$ , 则有

$$\begin{aligned} \alpha_1\Delta t - \alpha_2(T-\Delta t) = \\ 2\lambda_{\min}(L+B) \left( k\Delta t - \frac{\rho T \lambda_{\max}(L+B)}{(\lambda_{\min}(L+B))^2} \right) > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

则易得  $\lim_{l \rightarrow \infty} V(lT) = 0$ , 进一步有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0, \quad (16)$$

这意味着  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_0| = 0$ . 证毕.

**注1** 定理1中, 增益  $k$  需满足  $k\Delta t > \frac{\rho T \lambda_{\max}(L+B)}{(\lambda_{\min}(L+B))^2}$ ,

这意味着当  $T$  给定时, 如果脉冲宽度  $\Delta t$  很小, 就需要增益  $k$  很大来确保一致性的实现. 特别地, 若  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则需要  $k \rightarrow \infty$ , 此时, 协议(5)实际上变成了一个脉冲一致性协议.

为进一步突出协议(5)的优势, 这里采用传统脉冲控制方案, 给出如下一致性协议:

$$u_i = \sum_{l=0}^{\infty} k' \phi_i \delta(t - t_l), \quad (17)$$

其中:  $k' > 0$  为待设计常数,  $\delta(t)$  表示Dirac函数.

**定理2** 考虑多自主体系统(1), 如果假设1和2成立, 且有  $\ln \lambda_{\max}(\Theta) + \alpha_2 T < 0$ , 那么在协议(17)的作用下, 多自主体系统可实现渐近领导跟随一致性, 其中  $\Theta = [I - k'(L+B)]^T [I - k'(L+B)]$ .

**证** 选取如式(6)的Lyapunov函数. 由于

$$\phi(t_l^+) = \phi(t_l^-) - k'(L+B)\phi(t_l^-), \quad (18)$$

那么有

$$V(t_l^+) \leq \lambda_{\max}(\Theta) V(t_l^-). \quad (19)$$

根据定理1的证明, 可得当  $t \in (t_l, t_{l+1})$  时,

$$V(t) \leq e^{\alpha_2(t-t_l)} V(t_l^+). \quad (20)$$

由式(19)–(20)可得

$$\begin{aligned} V(t_l^+) &\leq \lambda_{\max}(\Theta) V(t_l^-) \leq \\ &\lambda_{\max}(\Theta) e^{\alpha_2(t_l - t_{l-1})} V(t_{l-1}^+) \leq \\ &\dots \leq \\ &\lambda_{\max}^l(\Theta) e^{\alpha_2(t_l - t_0)} V(t_0^+). \end{aligned} \quad (21)$$

由式(21)和  $\ln \lambda_{\max}(\Theta) + \alpha_2 T < 0$  可得

$$\lim_{l \rightarrow \infty} V(t_l^+) \leq e^{l(\ln \lambda_{\max}(\Theta) + \alpha_2 T)} V(t_0^+) = 0, \quad (22)$$

进一步可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_0| = 0, \forall i \in \mathcal{V}$ .

证毕.

相比协议(17), 协议(5)有一些明显的优点. 首先, 如引言所述, 协议(5)更易实现, 能更好地指导工程实践; 其次, 就参数选取方面而言, 协议(5)中增益  $k$  的选取规则相对简单. 当  $k$  足够大时, 定理条件总能得到满足. 而协议(17)中增益  $k'$  的选取规则相对复杂, 需求解或验证非线性矩阵不等式; 最后, 协议(5)能更好地满足收敛速率方面的性能要求, 通过调大增益  $k$ , 可以不断提高多自主体系统的一致性收敛速率. 若采取协议(17), 系统的一致性收敛速率将遭受严格约束, 只能通过恰当地选取增益  $k'$ , 使系统收敛速率尽可能地快.

**注2** 如注1所述, 若  $\Delta t \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , 协议(5)实际上变成了一个脉冲一致性协议. 那么自然会考虑到以下问题: 当  $k\Delta t = k', \Delta t \rightarrow 0$  时, 定理1能否退化为定理2, 这个问题的本质在于形如式(17)的脉冲一致性协议是否是形如式(5)的连续一间歇型实用脉冲协议的特例. 实际上, 由于自主体输入在控制作用区间连续, 并且  $V(t_l + \Delta t)$  和  $V(t_l)$  满足  $V(t_l + \Delta t) \leq e^{-\alpha_1 \Delta t} V(t_l)$ . 若  $\Delta t \rightarrow 0$ , 有  $V(t_l^+) \leq e^{-2k' \lambda_{\min}(L+B)} V(t_l^-)$ , 这难以转化为式(19)的形式. 那么, 如何设计可以囊括脉冲协议(17)的实用脉冲协议, 将在下一节进行讨论.

### 3.2 采样一间歇型实用脉冲协议

本小节将给出一种采样一间歇型实用脉冲协议, 协议设计为如下形式:

$$u_i = \sum_{l=0}^{\infty} k \phi_i(t_l) \bar{\delta}(t - t_l), \quad (23)$$

其中  $k > 0$  是一个待设计的常数. 变量  $\phi_i$  和函数  $\bar{\delta}(t)$  的定义与第3.1节相同.  $t_l = lT, l = 0, 1, 2, \dots$  为脉冲起始时刻,  $\Delta t$  为脉冲宽度,  $T > \Delta t$  为控制周期. 可以看出, 仅在区间  $[t_l, t_l + \Delta t)$ , 存在输入作用于系统.

与协议(5)相比, 协议(23)的实施仅依赖于脉冲起始时刻自主体和邻居的状态. 在每个控制作用区间, 自主体的输入是一个常量. 当  $\Delta t = T$  时, 协议(23)退化为一个周期采样一致性协议. 显然地, 协议(23)相较于协议(5)是更易实现的.

**定理3** 考虑多自主体系统(1), 如果假设1和2成立, 且有  $q^2(\Delta t) e^{\alpha_2(T-\Delta t)} < 1$ , 那么在协议(23)的作用下, 多自主体系统可实现渐近领导跟随一致性, 其中

$$\begin{cases} q(t) = e^{-\frac{\sigma_1}{2}t} + \frac{\sigma_2(1 - e^{-\frac{\sigma_1}{2}t})}{\sigma_1} (e^{\mu\Delta t} - 1), \\ \mu = k\lambda_{\max}(L+B) + \rho \frac{\lambda_{\max}(L+B)}{\lambda_{\min}(L+B)}, \\ \sigma_1 = 2(k\lambda_{\min}(L+B) - \rho \frac{\lambda_{\max}(L+B)}{\lambda_{\min}(L+B)}), \\ \sigma_2 = 2k\lambda_{\max}(L+B). \end{cases} \quad (24)$$

证 选取如式(6)的Lyapunov函数.

当  $t \in [t_i, t_i + \Delta t)$  时, 可得  $V$  对时间  $t$  的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k\phi^T(L+B)\phi(t_i) - \phi^T(L+B)\bar{f} = \\ & -k\phi^T(L+B)\phi - \phi^T(L+B)\bar{f} + \\ & k\phi^T(L+B)(\phi - \phi(t_i)). \end{aligned} \quad (25)$$

根据系统动态(1)和协议(23), 易得

$$\dot{\phi} = -k(L+B)\phi(t_i) - (L+B)\bar{f}. \quad (26)$$

结合式(8), 有

$$\begin{aligned} \|\dot{\phi}\| \leq & k\lambda_{\max}(L+B)\|\phi(t_i)\| + \rho \frac{\lambda_{\max}(L+B)}{\lambda_{\min}(L+B)} \|\phi\| \leq \\ & k\lambda_{\max}(L+B)\|\phi(t_i)\| + \\ & \rho \frac{\lambda_{\max}(L+B)}{\lambda_{\min}(L+B)} (\|\phi - \phi(t_i)\| + \|\phi(t_i)\|) \leq \\ & \mu(\|\phi - \phi(t_i)\| + \|\phi(t_i)\|). \end{aligned} \quad (27)$$

由式(27)可得  $\forall t \in [t_i, t_i + \Delta t)$ ,

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi(t_i)\| \leq & \int_{t_i}^t \|\dot{\phi}\| d\tau \leq \\ & \int_{t_i}^t \mu(\|\phi - \phi(t_i)\| + \|\phi(t_i)\|) d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

结合引理2可得

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi(t_i)\| \leq & \int_{t_i}^t \|\dot{\phi}\| d\tau \leq \\ & \int_{t_i}^t \mu(\|\phi - \phi(t_i)\| + \|\phi(t_i)\|) d\tau \leq \\ & \mu\|\phi(t_i)\|(t-t_i) + \int_{t_i}^t \mu\|\phi - \phi(t_i)\| d\tau \leq \\ & \mu\|\phi(t_i)\|(t-t_i) + \\ & \int_{t_i}^t \mu^2\|\phi(t_i)\|(\tau-t_i)e^{\mu(t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^t \mu^2\|\phi(t_i)\|(\tau-t_i)e^{\mu(t-\tau)} d\tau = \\ -\mu\|\phi(t_i)\|(t-t_i) - \|\phi(t_i)\|e^{\mu(t-\tau)}\Big|_{t_i}^t = \\ -\mu\|\phi(t_i)\|(t-t_i) + \|\phi(t_i)\|(e^{\mu(t-t_i)} - 1). \end{aligned} \quad (30)$$

结合式(29)–(30), 能够得到  $\forall t \in [t_i, t_i + \Delta t)$ ,

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi(t_i)\| \leq & \|\phi(t_i)\|(e^{\mu(t-t_i)} - 1) = \\ & \sqrt{2}(e^{\mu(t-t_i)} - 1)\sqrt{V(t_i)}. \end{aligned} \quad (31)$$

将式(8)和式(31)代入式(25), 可得  $\forall t \in [t_i, t_i + \Delta t)$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(k\lambda_{\min}(L+B) - \rho \frac{\lambda_{\max}(L+B)}{\lambda_{\min}(L+B)})\phi^T\phi + \\ & 2k\lambda_{\max}(L+B)(e^{\mu(t-t_i)} - 1)\sqrt{V(t_i)}\sqrt{V} = \\ & -\sigma_1 V + \sigma_2\sqrt{V}\sqrt{V(t_i)}(e^{\mu(t-t_i)} - 1). \end{aligned} \quad (32)$$

令  $\chi = \sqrt{V}$ , 式(32)可写为

$$\dot{\chi} \leq -\frac{\sigma_1}{2}\chi + \frac{\sigma_2}{2}\chi(t_i)(e^{\mu(t-t_i)} - 1). \quad (33)$$

通过比较原理, 易得

$$\begin{aligned} \chi \leq & \frac{\sigma_2(1 - e^{-\frac{\sigma_1}{2}(t-t_i)})}{\sigma_1}(e^{\mu\Delta t} - 1)\chi(t_i) + \\ & e^{-\frac{\sigma_1}{2}(t-t_i)}\chi(t_i) = \\ & q(t-t_i)\chi(t_i), \end{aligned} \quad (34)$$

这意味着

$$V(t_i + \Delta t) \leq q^2(\Delta t)V(t_i). \quad (35)$$

当  $t \in [t_i + \Delta t, t_{i+1})$ , 根据定理1的证明思路, 容易得到  $\dot{V} \leq \alpha_2 V$ , 进一步易得

$$V(t_{i+1}) \leq e^{\alpha_2(T-\Delta t)}V(t_i + \Delta t). \quad (36)$$

结合式(35)–(36), 可得

$$V(t_{i+1}) \leq q^2(\Delta t)e^{\alpha_2(T-\Delta t)}V(t_i), \quad (37)$$

其中  $q^2(\Delta t)e^{\alpha_2(T-\Delta t)} < 1$ , 因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$  并且  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_0| = 0, \forall i \in \mathcal{V}$ . 证毕.

**注 3** 若  $\Delta t \rightarrow 0$ , 即  $T - \Delta t \rightarrow T$ , 由定理条件易得  $k \rightarrow \infty$ . 此时有

$$\begin{aligned} q(\Delta t) = & \frac{\lambda_{\max}(L+B)(1 - e^{-k\Delta t\lambda_{\min}(L+B)})}{\lambda_{\min}(L+B)} \times \\ & (e^{k\Delta t\lambda_{\max}(L+B)} - 1) + e^{-k\Delta t\lambda_{\min}(L+B)}. \end{aligned} \quad (38)$$

则由  $q(\Delta t) < 1$  可以求出  $k \Delta t$  容许范围. 再结合  $q^2(\Delta t) \times e^{\alpha_2(T-\Delta t)} < 1$ , 即可得到  $T$  的容许范围. 由以上分析, 不难估计得到符合定理条件的实用脉冲一致性协议. 在第4节数值算例中, 协议参数的选取将详细演示. 另外值得说明的是, 若  $\Delta t < \frac{1}{\mu} \ln(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2})$ , 则有  $q(\Delta t) < 1$ , 根据式(37)可得能令  $q^2(\Delta t)e^{\alpha_2(T-\Delta t)} < 1$  的  $T$  总是存在的, 其取值范围为  $[\Delta t, \Delta t + \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{1}{q^2(\Delta t)})$ .

**推论 1** 考虑多自主体系统(1), 如果假设1和2成立, 且  $\Delta t = T, T < \frac{1}{\mu} \ln(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2})$ , 那么在协议(23)的作用下, 多自主体系统可实现渐近领导跟随一致性.

证 选取如式(6)的Lyapunov函数. 根据定理3的分析思路, 可得

$$V(t_{i+1}) \leq q^2(T)V(t_i). \quad (39)$$

因为  $T < \frac{1}{\mu} \ln(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2})$ , 所以  $q(T) < 1$ , 则不难得出  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_0| = 0, \forall i \in \mathcal{V}$ . 证毕.

为进一步揭示采样—间歇型实用脉冲控制同脉冲控制机制之间的关系, 给出如下结果.

**定理 4** 考虑多自主体系统(1), 如果假设1和2成立, 协议参数 $k$ 和 $\Delta t$ 满足 $k\Delta t = k'$ ,  $k'$ 和 $T$ 满足定理2中的不等式约束, 那么当 $\Delta t \rightarrow 0$ , 也即 $k \rightarrow \infty$ 时, 在协议(23)的作用下, 多自主体系统可实现渐近领导跟随一致性.

**证** 若 $t \in [t_l, t_l + \Delta t)$ , 可以求得 $\phi$ 对时间 $t$ 的导数满足

$$\dot{\phi} = -k(L + B)\phi(t_l) - (L + B)\bar{f}, \quad (40)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ , 也即 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \phi(t_l + \Delta t) &= \phi(t_l) - k\Delta t(L + B)\phi(t_l) = \\ &= (I - k'(L + B))\phi(t_l). \end{aligned} \quad (41)$$

选取如式(6)的Lyapunov函数, 可得

$$V(t_l + \Delta t) \leq \lambda_{\max}(\Theta)V(t_l). \quad (42)$$

在 $t \in [t_l + \Delta t, t_{l+1})$ 时, 可得到 $\dot{V} \leq \alpha_2 V$ , 根据定理2的证明思路, 容易得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ 以及 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_0| = 0, \forall i \in \mathcal{V}$ . 证毕.

**注 4** 定理3, 推论1和定理4深入地揭示了采样-间歇型实用脉冲控制, 脉冲控制和周期采样控制之间的关系. 对于实用脉冲一致性协议(23), 当 $\Delta t = T$ 时, 其特殊化为一个周期采样一致性协议; 而当 $\Delta t \rightarrow 0$ , 也即 $k \rightarrow \infty$ 时, 其特殊化为一个周期脉冲一致性协议.

### 4 仿真算例

在本节中, 脉冲一致性协议(17)、实用脉冲一致性协议(5)、(23)将分别应用于由1个领导自主体和4个跟随自主体构成的多自主体系统. 自主体间通信拓扑在图1中给出, 其中节点1-4分别表示4个跟随自主体, 节点0表示领导自主体. 自主体的系统动态由式(1)描述, 其中 $f(t, x) = 0.1 \cos x + 0.01 \sin t$ . 设置自主体的初始状态为

$$\begin{aligned} x_0(0) &= 1, x_1(0) = 3, x_2(0) = -0.5, \\ x_3(0) &= -2, x_4(0) = 0.45. \end{aligned}$$

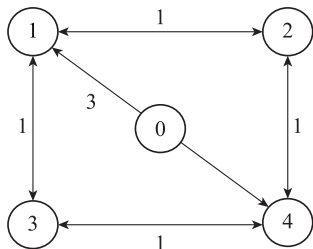


图1 通信拓扑  
Fig. 1 The communication topology

首先将脉冲一致性协议(17)应用于系统. 根据通信拓扑得到矩阵 $L + B$ 如下:

$$L + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

由 $f(\cdot)$ 的形式获知 $\rho = 0.1$ , 结合 $L + B$ , 可求得 $\alpha_2 = 1.2$ . 将 $\ln \lambda_{\max}(\Theta)$ 与 $k'$ 的关系绘制于图2. 由图2可看出, 当 $0 < k' \leq 0.333$ 时, 定理中的参数选取要求能得到满足, 特别地, 当 $k = 0.285$ 时,  $\ln \lambda_{\max}(\Theta)$ 取最小值 $-0.6709$ . 由 $\ln \lambda_{\max}(\Theta) + \alpha_2 T < 0$ 求得可容许的控制周期上界为 $0.559$  s. 这里选取 $k = 0.285, T = 0.15$  s, 将自主体状态轨线绘制于图3.

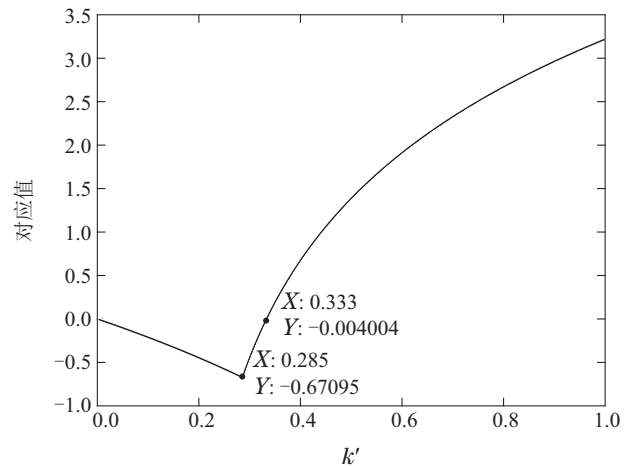


图2  $\ln \lambda_{\max}(\Theta)$ 与 $k'$ 关系图  
Fig. 2 The relationship between  $\ln \lambda_{\max}(\Theta)$  and  $k'$

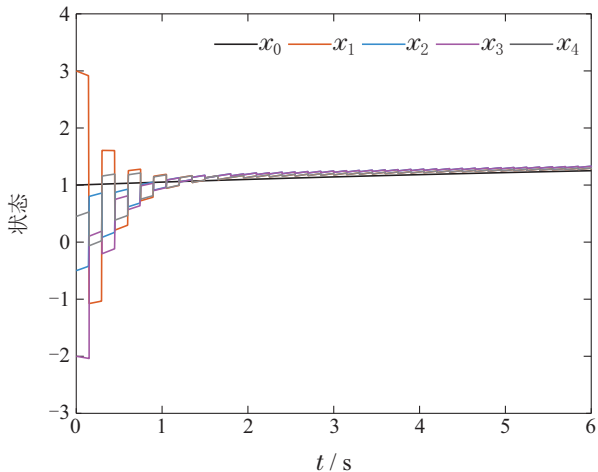


图3 脉冲协议(17)下自主体状态  
Fig. 3 States of agents under protocol (17)

下面采用连续-间歇型实用脉冲协议(5). 选取 $T = 0.15$  s,  $\Delta t = 0.001$  s, 如第3.1节所述, 与脉冲协议相比, 此处参数选取规则相对简单, 通过调大增益 $k$ , 可以不断提高多自主体系统的一致性收敛速率. 选取 $k = 1000$ , 绘制仿真结果于图4中, 可以看到, 多自主体系统很快地实现了一致性.

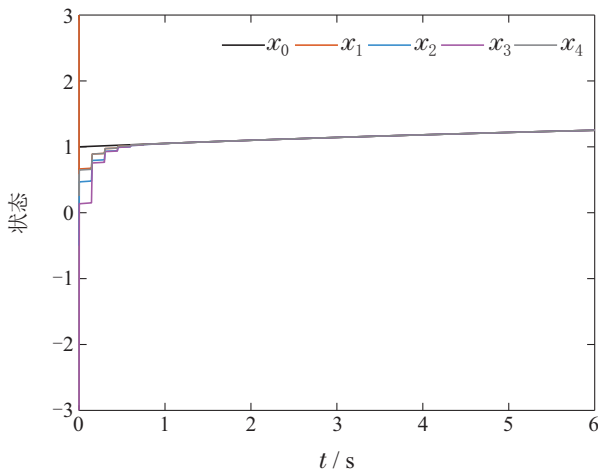


图4 实用脉冲协议(5)下自主体状态

Fig. 4 States of agents under protocol (5)

最后,应用采样-间歇型实用脉冲一致性协议于多自主体系统.选取  $k = 14$ ,  $\Delta t = 0.001$  s, 易求得  $q(\Delta t) = 0.9934$ ,  $q^2(\Delta t) = 0.9868$ . 根据定理条件  $q^2(\Delta t)e^{\alpha_2(T-\Delta t)} < 1$ , 易得可容许的控制周期  $T < \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{1}{q^2(\Delta t)} + \Delta t = 0.012$  s. 选取  $T = 0.01$  s, 将自主体状态绘制于图5. 可以看出,在协议(23)下,多自主体系统仍能实现一致性. 相比协议(5),协议(23)的参数选取规则相对复杂. 且对比图4与图5可发现协议(5)带来了更快的收敛速率. 而协议(23)的优势在于其实施不依赖于连续通信.

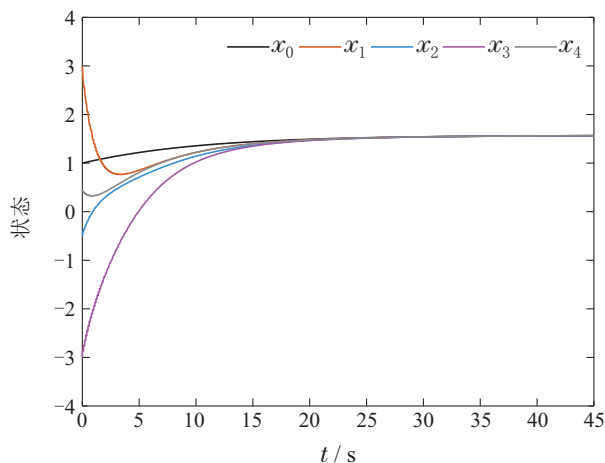


图5 实用脉冲协议(23)下自主体状态

Fig. 5 States of agents under protocol (23)

## 5 结论

本文通过引入PMIC策略,为一类非线性多自主体系统设计了两种实用脉冲一致性协议. 两种协议分别命名为连续-间歇型实用脉冲协议和采样-间歇型实用脉冲协议. 通过李雅普诺夫函数方法,代数图论,以及采样控制和间歇控制理论,证明了在设计协议作用下,所考虑的多自主体系统可以实现渐进领导跟随

一致性. 此外,本文严格证明了给出的周期采样一致性协议和脉冲一致性协议都是采样-间歇型实用脉冲一致性协议的特例. 最后,通过一个数值例子验证了设计协议的有效性.

## 参考文献:

- [1] MA Dan, ZHANG Baofeng, WANG Luyao. Controller and topology co-optimization for consensus of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 720 – 727. (马丹, 张宝峰, 王璐瑶. 多智能体系统一致性问题的控制器与拓扑协同优化设计. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 720 – 727.)
- [2] YU W, WANG H, HONG H, et al. Distributed cooperative anti-disturbance control of multi-agent systems: An overview. *Science China-Information Sciences*, 2017, 60(11): 110202.
- [3] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [4] ZOU W, HUANG Y, AHN C, et al. Containment control of linear multiagent systems with stochastic disturbances via event-triggered strategies. *IEEE Systems Journal*, 2020, 14(4): 4810 – 4819.
- [5] DONG X, HU G. Time-varying formation control for general linear multi-agent systems with switching directed topologies. *Automatica*, 2016, 73: 47 – 55.
- [6] TANG Jiayu, LI Xiangmin, DAI Jinjin, et al. Coalition task allocation of heterogeneous multiple agents with complex constraints. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11): 2414 – 2422. (唐嘉钰, 李相民, 代进进, 等. 复杂约束条件下异构多智能体联盟任务分配. 控制理论与应用, 2020, 37(11): 2414 – 2422.)
- [7] ZHANG W, YU Z, LI S. Adaptive output consensus for heterogeneous nonlinear multi-agent systems with multi-type input constraints under switching-directed topologies. *Control Theory and Technology*, 2021, 19(2): 260 – 272.
- [8] GONG P, LAN W, HAN Q. Robust adaptive fault-tolerant consensus control for uncertain nonlinear fractional-order multi-agent systems with directed topologies. *Automatica*, 2020, 117: 109011(1 – 7).
- [9] ZHAO L, LIU Y, LI F, et al. Fully distributed adaptive finite-time consensus for uncertain nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(7): 6972 – 6983. DOI: 10.1109/T-CYB.2020.3035752.
- [10] LI K, HUA C, YOU X, et al. Output feedback predefined-time bipartite consensus control for high-order nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, 68(7): 3069 – 3078.
- [11] TANG Y, WANG X. Optimal output consensus for nonlinear multiagent systems with both static and dynamic uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(4): 1733 – 1740.
- [12] ZOU W, GUO J, XIANG Z. Sampled-data leader-following consensus of second-order nonlinear multiagent systems without velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(17): 5634 – 5651.
- [13] CUI Y, LIU Y, ZHANG W, et al. Sampled-based consensus for nonlinear multiagent systems with deception attacks: The decoupled method. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(1): 561 – 573.
- [14] WANG Z. *Sampled-data output feedback control for a class of uncertain nonlinear systems*. Nanjing: Southeast University, 2015.
- [15] SU Bo, WANG Hongbin, GAO Jing. Anti-disturbance fixed-time formation control of multi-AUVs via event-triggered strategy. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(7): 1113 – 1123. (苏博, 王洪斌, 高静. 事件触发策略下多AUV抗干扰固定时间编队控制. 控制理论与应用, 2021, 38(7): 1113 – 1123.)

- [16] LIU W, HUANG J. Cooperative global robust output regulation for a class of nonlinear multi-agent systems by distributed event-triggered control. *Automatica*, 2018, 93: 138 – 148.
- [17] YOU X, HUA C, GUAN X. Event-triggered leader-following consensus for nonlinear multiagent systems subject to actuator saturation using dynamic output feedback method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(12): 4391 – 4396.
- [18] GUO X, ZHANG D, WANG J, et al. Adaptive memory event-triggered observer-based control for nonlinear multi-agent systems under DoS attacks. *IEEE-CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, 8(10): 1644 – 1656.
- [19] AYEPAH K, SUN M, JIA Q. Event-triggered synchronization of switching dynamical networks with periodic sampling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2021, 68(6): 2172 – 2176.
- [20] QI Y, MU R, ZHANG X. Periodic event-triggered bipartite consensus for multi-agent systems with partial information transmission. *Asian Journal of Control*, 2022, 24(5): 2778 – 2786. DOI: 10.1002/asjc.2648.
- [21] ZHANG Z. *Research on impulsive consensus of several kinds of nonlinear multi-agent systems under different control mechanisms*. Guangzhou: Guangdong University of Technology, 2021.
- [22] KE C, LI C, ZHANG Q. Distributed adaptive fault-tolerant consensus of nonlinear multi-agent systems via state-constraint impulsive protocols with time-delay. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2020, 7(4): 3112 – 3121.
- [23] LIU X, CHEN D, LIU Z, et al. Distributed leaderless impulsive consensus of non-linear multi-agent systems with input saturation. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, 36: 100855.
- [24] MA T, LI T, CUI B. Adaptive-impulsive consensus of multiagent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(6): 2031 – 2046.
- [25] WEN G, ZHAI X, PENG Z, et al. Fault-tolerant secure consensus tracking of delayed nonlinear multi-agent systems with deception attacks and uncertain parameters via impulsive control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, 82: 105043.
- [26] XU Z, LI C, HAN Y. Impulsive consensus of nonlinear multi-agent systems via edge event-triggered control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(6): 1995 – 2004.
- [27] CHEN T, PENG S, ZHANG Z. Finite-time consensus of leader-following non-linear multi-agent systems via event-triggered impulsive control. *IET Control Theory and Applications*, 2021, 15(7): 926 – 936.
- [28] TAN X, CAO J, RUTKOWSKI L, et al. Distributed dynamic self-triggered impulsive control for consensus networks: The case of impulse gain with normal distribution. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(2): 624 – 634.
- [29] LI Y, LI C, YOU L, et al. Exponential synchronisation of nonlinear multi-agent systems via distributed self-triggered hybrid control with virtual linked agents. *International Journal of Control*, 2021, DOI: 10.1080/00207179.2021.1967453.
- [30] LIU Z, YU X, GUAN Z, et al. Pulse-modulated intermittent control in consensus of multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 41(5): 783 – 793.
- [31] TANG Q, ZHOU H, LIU Z, et al. Distributed consensus tracking with stochastic quantization via pulse-modulated intermittent control. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(8): 3485 – 3501.
- [32] LIU T, JIANG Z. Distributed control of multi-agent systems with pulse-width-modulated controllers. *Automatica*, 2020, 119: 109020.
- [33] DU H, CHENG Y, HE Y, et al. Second-order consensus for nonlinear leader-following multi-agent systems via dynamic output feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26 (2): 329 – 344.
- [34] HONG Y, HU J, GAO L. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 2006, 42 (7): 1177 – 1182.
- [35] APOSTOL T. *Mathematical Analysis*. New Jersey: Addison-Wesley, 1974.

#### 作者简介:

**邹文成** 博士, 目前研究方向为非线性系统和多自主体系统协同控制, E-mail: gongchan00@163.com;

**王荣浩** 博士, 副教授, 目前研究方向为切换系统、智能控制和多自主体系统协同控制, E-mail: wrh@893.com.cn;

**向峥嵘** 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为切换系统、非线性系统、网络控制系统、鲁棒控制及采样控制, E-mail: xiangzr@nj-ust.edu.cn.