

# 仿鹰鸽捕食逃逸行为的多无人机分组对抗博弈方法

仝秉达<sup>1</sup>, 段海滨<sup>1,2†</sup>, 魏晨<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院 仿生自主飞行系统研究组, 北京 100083;

2. 鹏城实验室, 广东 深圳 518055)

**摘要:** 针对多无人机对抗问题, 本文提出了一种三维空间中仿鹰鸽捕食逃逸行为的多无人机分组对抗博弈方法。在分析鹰鸽捕食逃逸行为的基础上, 文章构建了多无人机博弈对抗系统模型, 并定义了微分博弈中的连续可微值函数, 证明了值函数满足Hamilton-Jacobi-Isaacs(HJI)方程, 从而保证鞍点策略存在。使用最优分配方法, 为仿鹰无人机一方设计了分组对抗分配策略, 以解决多无人机追逐场景中的任务分配问题。本文对比仿真实验结果验证了所提出方法的有效性。

**关键词:** 多无人机对抗; 微分博弈; 任务分配; 捕食逃逸; 鞍点策略

**引用格式:** 仝秉达, 段海滨, 魏晨. 仿鹰鸽捕食逃逸行为的多无人机分组对抗博弈方法. 控制理论与应用, 2024, 41(5): 855 – 865

DOI: 10.7641/CTA.2023.20194

## Multi-UAV grouping confrontation game method imitating the pursuit evasion behavior of eagles and pigeons

TONG Bing-da<sup>1</sup>, DUAN Hai-bin<sup>1,2†</sup>, WEI Chen<sup>1</sup>

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering,

Bio-inspired Autonomous Flight Systems Research Group, Beihang University, Beijing 100083, China;

2. Peng Cheng Laboratory, Shenzhen Guangdong 518055, China)

**Abstract:** In this paper, to solve the problem of multi-unmanned aerial vehicle (UAV) confrontation, a multi-UAV confrontation game system is established and a multi-UAV grouping confrontation game method is proposed in three-dimensional space. The multi-UAV confrontation game system model and the continuous differentiable value function in the differential games are defined, and it is proved that the value function satisfies the Hamiltonian-Jacobi-Isaacs (HJI) equation ensuring that the saddle point strategy exists. For the problem of multi-UAV confrontation, a grouping assignment strategy is designed to solve the task assignment problem in the scenario. Comparative simulation results verified the effectiveness of the proposed method in solving the multi-UAV confrontation game problem.

**Key words:** multi-UAV confrontation; differential games; task allocation; pursuit evasion; saddle point strategy

**Citation:** TONG Bingda, DUAN Haibin, WEI Chen. Multi-UAV grouping confrontation game method imitating the pursuit evasion behavior of eagles and pigeons. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(5): 855 – 865

## 1 引言

在多智能体对抗场景中, 攻防双方智能体需要分别完成拦截或者突防任务, 例如无人机集群空战、无人机协同打击、多无人机动态航路规划等任务<sup>[1-2]</sup>。这些问题通常使用微分博弈理论进行分析解决, 该理论建立了一个框架来分析追逃、拦截突防和多智能体对抗等问题。另外, 自然界中的群集捕食-逃逸行为通常可以通过简单、可重复的规则描述总结, 这些规则为

多智能体对抗问题提供了新的解决思路和方法, 其中, 典型的捕食-逃逸行为是自然界中的鹰群捕食与鸽群逃逸行为。因此, 可以利用自然界中的鹰鸽智能行为和微分博弈方法解决一类多无人机对抗问题。

由Isaacs<sup>[3]</sup>建立的微分博弈理论利用了博弈论、变分法和控制理论, 解决涉及到多个智能体之间的博弈问题, 并引入开关曲面、散射曲面、泛曲面和等值策略曲面, 来描述博弈过程中的奇异曲面, 并推导出博弈

收稿日期: 2022-03-18; 录用日期: 2023-03-31.

†通信作者. E-mail: hbduan@buaa.edu.cn; Tel.: +86 10-82317318.

本文责任编辑: 侯增广.

科技创新2030-“新一代人工智能”重大项目(2018AAA0100803), 国家自然科学基金项目(U20B2071, 91948204, T2121003)资助.

Supported by the Science and Technology Innovation 2030-Key Project of “New Generation Artificial Intelligence” (2018AAA0100803) and the National Natural Science Foundation of China (U20B2071, 91948204, T2121003).

问题的最优鞍点策略. 解决微分博弈问题的关键在于求解博弈中的 Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) 偏微分方程, 该方程为纳什均衡的存在性提供了一个充分条件. 无论博弈中的值函数  $V(\boldsymbol{x})$  是如何获得的, HJI 方程都可以用来验证该最优性条件. 在微分博弈解决基础追逃博弈问题场景中, 一组逃跑者试图从另一组追捕者的追捕中逃脱, 不考虑博弈场景中博弈对抗双方可能存在的胜利区域. 而更一般的多智能体攻防问题考虑了更复杂的情况, 其中逃脱者的目标是抵达设定的目标集合区域内, 同时, 防止被追捕者拦截. 因此, 这种对抗博弈问题是一类定性博弈问题, 存在两种不同的博弈结果, 即逃脱者能够到达目标集合区域, 或者逃脱者在抵达目标集合之前被追捕者所拦截. Imado 和 Kuroda<sup>[4]</sup> 研究了一类导弹与飞机之间追逃的微分博弈问题, 其中, 非线性脱靶量被用作博弈的价值函数, 但是提出的方法不能实时获得微分博弈问题的解. Fuchs 和 Khargonekar<sup>[5]</sup> 研究了一类双人微分博弈问题, 设置了一个操纵性能函数约束来求解最优防御控制策略. 以上结果仅仅考虑了单个追捕者、单个逃脱者的情况, 或者博弈双方具有唯一的性能指标函数, 不适用于具有多个性能指标函数情况下的多无人机博弈对抗问题.

在实际的多无人机对抗问题中, 对抗双方的性能指标函数通常有多个, 此类问题有单逃跑者多追捕者、多逃跑者单追捕者和多逃跑者多追捕者等几种任务想定场景. 在单逃跑者多追捕者场景下, Fang 等人<sup>[6]</sup> 研究了单个逃跑者和多个追捕者的成功捕获条件问题, 其中追捕者的最大速度小于逃跑者的最大速度. 在多逃跑者单追捕者场景下, Garcia 等人<sup>[7]</sup> 研究了两个追捕者与一个逃跑者的微分博弈问题中, 追捕者的速度要大于逃跑者的速度的情况. Von 等人<sup>[8]</sup> 研究了两个合作的逃跑者突破单个追捕者守卫的圆形目标区域的问题, 其中一个逃跑者起到干扰追捕者的作用, 而另外一个逃跑者的任务是到达圆形目标区域. 但在其模型中追捕者的位置始终在目标区域的中心, 不符合无人机博弈对抗的场景的要求. 在更一般的情况下, 当微分博弈问题存在多个追捕者时, 则需要解决追捕者之间的任务分配问题. Bakolas 和 Tsiotras<sup>[9]</sup> 使用 Voronoi 图对博弈区域进行划分, 使得分区中的每个集合与特定的目标唯一对应, 以解决多个追捕者的任务分配问题. 但其只考虑所有逃跑者都采用相同的逃脱策略这种特殊情况, 而实际博弈中逃跑者各自的策略和运动路线可能并不相同. 若微分博弈问题中只有一个追捕者, 但存在多个逃跑者时, 追捕者的运动速度应当大于逃跑者或具有其他的性能优势. 在这种情况下, 追捕者应当选择合适的顺序进行拦截, 使得任务时间最短. Liu 等人<sup>[10]</sup> 提出了一种涉及单追捕者和多逃跑者的追逃博弈的开环方法, 其中, 追捕者试图最小化

拦截所有逃跑者的总时间. 最复杂的情况是当微分博弈问题中同时存在多个追捕者和多个逃跑者. Chen 等人<sup>[11]</sup> 研究了在有限大且存在障碍物的区域内多个攻击者和防御者之间的微分博弈问题, 提出了一种使用最大匹配方法来近似求解, 以避免直接求解高维偏微分方程. Zhou 等人<sup>[12]</sup> 提出了一种开环方法解决多人微分博弈问题的方法, 并讨论了现有的求解算法. 刘坤等人<sup>[13]</sup> 设计了基于线性二次型微分博弈的多个攻击者和防御者以及单个目标的追逃问题最优策略. 以上研究大部分都假设博弈双方在二维平面内运动, 且追捕者位置与逃跑者位置重合时才视为捕获成功, 不符合多无人机对抗的实际情况, 因此, 本文将无人机博弈对抗问题推广到三维笛卡尔空间中, 且无人机可以在一定距离内使用携带的武器干扰或破坏敌方无人机.

参与对抗的攻防双方无人机一般使用比较简单的规则作为己方拦截或逃逸的策略, 例如防御无人机一方通常会使用纯追踪法等类似于制导的方法拦截攻击无人机, 而攻击无人机一方可能会采用向目标边界以最短路径运动的策略. 以上策略在生物界中非常常见. 尤其与自然界中猛禽捕猎采用的策略<sup>[14]</sup> 和鸽型目、雀形目等小型鸟类逃避捕食者时采用的急转弯、俯冲等逃逸策略极为相似. 因此, 自然界中的鹰鸽捕食-逃逸行为为实际的多无人机对抗方法提供了各种不同的博弈策略, 基于猛禽捕猎策略, 段海滨等人<sup>[15]</sup> 提出了一种仿鹰群智能的无人机集群协同对抗方法并进行了外场飞行验证. 本文以鹰鸽捕食逃逸行为为背景, 研究了多无人机微分博弈问题的求解方法, 该方法可以实时计算, 因此, 能够对敌方无人机的非最优策略进行响应, 并基于自然界中的鹰鸽捕食逃逸行为仿真验证了非最优策略对双方无人机博弈结果的影响. 另外, 防御者无人机在执行拦截任务前进行任务分配以优化团队的博弈价值.

本文结构如下: 第2节对鹰鸽智能捕猎逃逸行为进行了建模; 第3节对多无人机对抗博弈系统进行分析与建模, 并构造博弈问题的价值函数, 确定博弈双方无人机的最优运动轨迹; 第4节讨论了2对2无人机对抗博弈的最优分配策略和最优状态反馈策略; 第5节考虑了  $M$  个攻击者对  $N$  个防御者 ( $M \leq N$ ) 的情况; 第6节给出了仿真实例; 第7节为结论与展望.

## 2 鹰鸽智能捕猎逃逸行为建模

### 2.1 鹰捕猎行为策略

鹰的空中捕猎行为受到飞行形态和生态环境的影响, 其采用复杂的觅食行为模式来拦截目标. Hein 等人<sup>[16]</sup> 以自然界中的追逃行为为模型, 研究了动物产生的灵活且目标驱动的行为如何体现在算法中, 有助于对不同种群、运动模式和时空尺度的行为进行严格的

比较分析. Brighton和Taylor<sup>[17]</sup>研究了哈里斯鹰群的捕猎轨迹, 可以通过名为比例追踪 (proportional pursuit, PP)+比例导引 (proportional navigation, PN) 的混合制导律进行模拟, 鹰鸽双方捕食逃逸位置关系如图1所示.

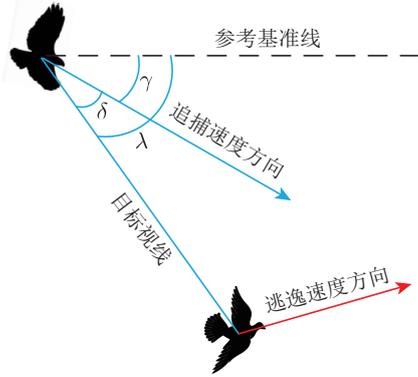


图1 鹰鸽捕食逃逸位置关系

Fig. 1 The relationship between eagle and pigeon predation and escape

鹰在捕猎时使用的PP+PN混合制导律的表达式如下:

$$\dot{\gamma}(t) = N\dot{\lambda}(t) - K\delta(t), \quad (1)$$

式中:  $\gamma$ 为鹰的速度倾角;  $\lambda$ 为目标视线角;  $\delta = \gamma - \lambda$ 为鹰的速度矢量与视线的偏离角;  $N = 0.7$ 和 $K = 1.2$ 为自然界中哈里斯鹰使用该制导律的制导常数. 在三维空间中常用矢量形式定义上述角度, 其中视线矢量定义为

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_E - \mathbf{x}_P, \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{x}_E$ 为鸽的位置;  $\mathbf{x}_P$ 为鹰的位置. 双方速度矢量之差为

$$\mathbf{u}_C = \dot{\mathbf{x}}_P - \dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{u}_P - \mathbf{u}_E, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{u}_P$ ,  $\mathbf{u}_E$ 为鹰鸽双方以矢量形式定义的偏离角

$$\delta = (\arccos \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{u}_P}{|\mathbf{r}| |\mathbf{u}_P|}) (\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{u}_P}{|\mathbf{r} \times \mathbf{u}_P|}), \quad (4)$$

以矢量形式定义的视线角速率 $\omega$ 为

$$\omega = \frac{\mathbf{r} \times (-\mathbf{u}_C)}{|\mathbf{r}|^2}, \quad (5)$$

在PP+PN混合制导律下, 鹰的加速度 $\mathbf{a}_P$ 为

$$\mathbf{a}_P = N\omega \times \mathbf{u}_P - K\delta \times \mathbf{u}_P, \quad (6)$$

在仿真实验中, 通过以下公式更新鹰的状态和控制量:

$$\mathbf{x}_P(t + \Delta t) = \mathbf{x}_P(t) + \Delta t \times \mathbf{u}_P(t), \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_P(t + \Delta t) = \frac{\mathbf{u}_P(t) + \Delta t \times \mathbf{a}_P(t)}{|\mathbf{u}_P(t) + \Delta t \times \mathbf{a}_P(t)|}, \quad (8)$$

式中 $\Delta t$ 为仿真步长.

## 2.2 鸟类逃逸行为策略

对于自然界的鸟类而言, 采取适当的飞行机动策

略逃脱捕食者是获得生存的重要手段. 作为猎物的小型鸟类在自然演化的过程中进化出了适应能力, 能够最大限度地提高逃脱捕食者攻击的概率. 鸟类中的捕食者通常要比猎物的体型大, 体型对于鸟类的空气动力学性能有着重要的影响, 因此, 小型鸟类在选择最优逃逸策略时往往会利用体型差异带来的机动性能优势. 当被捕食者攻击时, 猎物只有一个生存目标, 即在被捕食者抓住之前到达一个安全地点. Hedenstrom和Rosén<sup>[18]</sup>研究了3种理想的被捕食鸟类受到威胁时的逃逸策略: 爬升逃逸、水平加速、转弯和俯冲逃逸. 可能影响猎物逃逸策略选择的因素包括捕食者的种类、性别、体型、猎物和捕食者之间的相对位置、逃逸开始时猎物和捕食者的状态等. 一般来说, 体型较小的鸟类(例如鸽子等鸽形目或者雀形目鸟类)对于大型猛禽(例如游隼)的爬升和俯冲效率要高, 因此, 爬升和俯冲逃逸可以作为仿鸽无人机躲避拦截的策略之一.

假设猎物的安全地点为一个无限大的平面(目标平面), 因此, 仿鸽无人机优先选择使用俯冲逃逸策略, 即平行于目标平面的法线向目标平面逃逸. 在仿真分析中同样分析了仿鸽无人机采取该种策略时的性能与价值差异.

## 3 仿鹰鸽多无人机对抗博弈

设定多无人机对抗博弈问题存在攻击者(仿鸽)和防御者(仿鹰)两方, 每方有两架无人机, 仿鸽无人机试图突破仿鹰无人机的防御到达目标区域, 而仿鹰无人机试图拦截仿鸽无人机以阻止其到达目标区域. 当仿鹰无人机成功拦截目标或者仿鸽无人机成功到达目标区域时, 博弈结束. 仿鹰无人机的任务是拦截敌方目标, 并使拦截点距离目标区域最大化, 而仿鸽无人机的任务是到达目标区域, 或者缩短拦截点到目标区域的距离.

### 3.1 多无人机系统建模

考虑具有 $M$ 个攻击者(仿鸽无人机)和 $N$ 个防御者(仿鹰无人机)的对抗博弈问题, 其中 $N \geq M$ , 且双方无人机的速度不同. 攻击者无人机用 $E_1, E_2, \dots, E_M$ 表示, 防御者无人机用 $P_1, P_2, \dots, P_N$ 表示, 为方便分析与推导, 本文考虑 $M = N = 2$ 这种情况. 仿鸽无人机各自选择策略突破防御到达目标平面 $\Pi$ , 而仿鹰无人机进行分组合作, 以捕获仿鸽无人机, 同时防御该目标平面. 为不失一般性, 定义目标平面为

$$\Pi = \{(x, y, z) | z = 0\}, \quad (9)$$

双方无人机对抗博弈初始位置设定在欧氏三维空间 $\Omega = \{(x, y, z) | z > 0\}$ 中.

无人机的运动学和动力学方程 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{P_i},$

$\mathbf{u}_{Ej}$ )由以下常微分方程组定义:

$$\begin{cases} \dot{x}_{Pi} = u_{xPi}, \dot{y}_{Pi} = u_{yPi}, \dot{z}_{Pi} = u_{zPi}, \\ \dot{x}_{Ej} = u_{xEj}, \dot{y}_{Ej} = u_{yEj}, \dot{z}_{Ej} = u_{zEj}, \end{cases} \quad (10)$$

两架仿鹰无人机的状态由 $\mathbf{x}_{Pi} = (x_{Pi}, y_{Pi}, z_{Pi})$ ,  $i = 1, 2$ 表示, 两架仿鸽无人机的状态由 $\mathbf{x}_{Ej} = (x_{Ej}, y_{Ej}, z_{Ej})$ ,  $j = 1, 2$ 表示. 以上建立的无人机对抗微分博弈系统的完整状态由 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{P1}, \mathbf{x}_{P2}, \mathbf{x}_{E1}, \mathbf{x}_{E2}) \in \mathbb{R}^{12}$ 表示. 仿鹰无人机的控制量表示为 $U_{Pi} = \{\mathbf{u}_{Pi} \in \mathbb{R}^3 | \|\mathbf{u}_{Pi}\|_2 = 1\}$ , 其中 $\mathbf{u}_{Pi} = (u_{xPi}, u_{yPi}, u_{zPi})$ ,  $i = 1, 2$ . 仿鸽无人机的控制量为 $U_{Ej} = \{\mathbf{u}_{Ej} \in \mathbb{R}^3 | \|\mathbf{u}_{Ej}\|_2 = \beta\}$ , 其中 $\mathbf{u}_{Ej} = (u_{xEj}, u_{yEj}, u_{zEj})$ ,  $j = 1, 2$ .  $\beta$ 为仿鸽无人机与仿鹰无人机速度之比. 假设仿鹰无人机的速度比仿鸽无人机的速度快, 因此, 速度比 $\beta < 1$ . 其中:  $x_{Pi}(0) = x_{Pi0}$ ,  $y_{Pi}(0) = y_{Pi0}$ ,  $z_{Pi}(0) = z_{Pi0}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $x_{Ej}(0) = x_{Ej0}$ ,  $y_{Ej}(0) = y_{Ej0}$ ,  $z_{Ej}(0) = z_{Ej0}$ ,  $j = 1, 2$ . 在不失一般性的前提下, 双方无人机的速度被归一化. 该微分博弈系统的初始状态为 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_{P10}, \mathbf{x}_{P20}, \mathbf{x}_{E10}, \mathbf{x}_{E20})$ . 另外, 假设初始状态 $z_{E10} > 0$ ,  $z_{E20} > 0$ , 即仿鸽无人机的初始状态均位于 $\Omega$ 中.

上面构建的多无人机对抗博弈模型(式(10))受文献[3]的启发, 并在其基础上扩展为三维形式, 其本质为一阶动力学系统, 且没有角速度和加速度约束, 目的是方便后面博弈双方最优状态反馈策略的推导, 博弈双方无人机之间可以在最高水平上进行合作, 并利用对方无人机的非最优策略取胜. 实际上的无人机对抗博弈模型具有复杂的动力学与运动学约束形式, 本文所构建的模型所推导出的策略可以用于近似计算, 降低计算复杂度, 可以几乎实时地给出双方无人机的最优策略, 方便本文后面的数值仿真分析.

### 3.2 博弈终止条件和价值函数

二元变量 $\mu_{ij}$ 表示仿鹰无人机拦截任务分配情况, 如果仿鹰无人机 $P_i$ 被分配执行拦截仿鸽无人机 $E_j$ 的任务, 则 $\mu_{ij} = 1$ , 否则,  $\mu_{ij} = 0$ . 在本文研究的多无人机对抗博弈问题中, 假设一架仿鹰无人机最多可以被分配到拦截一架仿鸽无人机的任务, 即 $\sum_{j=1}^M \mu_{ij} \leq 1$ , 且每架仿鸽无人机都至少被一架仿鹰无人机拦截.

本文研究的无人机对抗博弈问题是一个具有两个终端状态集合的微分博弈, 且在Garcia等人<sup>[9]</sup>工作的基础上进行了改进, 其中博弈终止条件的改进是所有仿鸽无人机均能被仿鹰无人机在一定距离内拦截(圆捕获), 仿鹰无人机在距离仿鸽无人机一定距离内即可发射自身携带的武器将对方拦截和击落, 在这种情况下, 博弈终止的集合为

$$T_{P1} = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}_{P1} - \mathbf{x}_{E1}\|_2 \leq R_c\} \cap \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}_{P2} - \mathbf{x}_{E2}\|_2 \leq R_c\}, \quad (11)$$

或者

$$T_{P2} = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}_{P2} - \mathbf{x}_{E1}\|_2 \leq R_c\} \cap \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}_{P1} - \mathbf{x}_{E2}\|_2 \leq R_c\}, \quad (12)$$

式中仿鹰无人机具有正的拦截半径 $R_c > 0$ . 如果系统状态在集合 $T_{P1}$ 和 $T_{P2}$ 中, 则表示所有的仿鸽无人机均被仿鹰无人机拦截. 当系统状态在集合 $T_{P1}$ 中时, 有 $\mu_{11} = \mu_{22} = 1$ ,  $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$ ; 相应地, 当系统状态在集合 $T_{P2}$ 中时, 有 $\mu_{11} = \mu_{22} = 0$ ,  $\mu_{12} = \mu_{21} = 1$ 成立. 第3.1节定义了仿鸽无人机需要到达的目标平面和仿鹰无人机防御的任务平面为式(9). 因此, 博弈的另外一个终止条件为

$$T_E = \{\mathbf{x} | z_{E1} = 0\} \cup \{\mathbf{x} | z_{E2} = 0\}, \quad (13)$$

集合 $T_E$ 表示只要有一架仿鸽无人机到达目标平面 $\Pi$ , 则鸽方获胜. 因此, 多无人机对抗博弈终止目标集合为

$$T = T_{P1} \cup T_{P2} \cup T_E, \quad (14)$$

终端时间 $t_f$ 为该博弈系统状态第1次满足式(14)的时刻, 此时, 系统终端状态定义为 $\mathbf{x}_f = (\mathbf{x}_{P1f}, \mathbf{x}_{P2f}, \mathbf{x}_{E1f}, \mathbf{x}_{E2f}) = \mathbf{x}(t_f)$ . 在 $M = N = 2$ , 且二元变量 $\mu_{ij}$ 满足 $\sum_{j=1}^M \mu_{ij} = 1$ 的条件下, 如果仿鹰无人机总能够成功拦截仿鸽无人机, 则该微分博弈问题是一类定量博弈问题, 其终端性能指标泛函定义如下:

$$J(\mathbf{u}_{Pi}, \mathbf{u}_{Ej}; \mathbf{x}_0) = z_{Ejf} = z_{Ej}(t_f), \quad (15)$$

该微分博弈问题的支付函数定义为

$$V(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_{Ej}(\cdot)} \max_{\mathbf{u}_{Pi}(\cdot)} J(\mathbf{u}_{Ej}(\cdot), \mathbf{u}_{Pi}(\cdot); \mathbf{x}_0), \quad (16)$$

根据式(10)–(11)(或者式(12)), 取决于仿鹰无人机任务分配情况, 其中 $\mathbf{u}_{Ej}(\cdot)$ 和 $\mathbf{u}_{Pi}(\cdot)$ 是仿鸽和仿鹰无人机的状态反馈策略, 即我方无人机只能访问该微分博弈系统的当前状态, 无法获得对方无人机的当前或者未来的控制量. 因此, 后续推导出的策略只是博弈当前状态的函数.

支付函数(16)是衡量无人机对抗效果的重要指标, 代表了目标区域所受到的威胁程度. 该威胁程度与拦截位置和目标区域的距离成反比. 当仿鸽无人机在到达目标平面 $\Pi$ 之前, 即被仿鹰无人机拦截的条件下, 仿鸽无人机的目标是尽量在被拦截的时刻 $t_f$ 缩短自身与目标平面的距离. 而仿鹰无人机的目标是拦截所有敌方无人机, 同时, 最大限度地增加 $t_f$ 时刻仿鸽无人机与目标平面 $\Pi$ 之间的距离. 如果仿鹰无人机没有做出最优决策, 仿鸽无人机的鞍点状态反馈策略可以利用此机会, 尽量接近目标平面 $\Pi$ , 最终可能在被拦截之前到达目标平面. 类似地, 仿鹰无人机的鞍点状态反馈策略将提供一个鲁棒性的策略来拦截仿鸽无人机, 不管其采取怎样的制导律, 当仿鸽无人机没有做出最

优决策时, 仿鹰无人机同样可以利用机会增加捕获位置到目标平面之间的距离.

### 3.3 无人机最优轨迹的确定

根据前面建立的多无人机博弈对抗系统动力学模型以及终端性能指标函数和终端流形, 可以对博弈双方无人机运动的最优轨迹进行分析.

**定理 1** 在式(10)(15)所构成的微分博弈系统中,  $P_i$ 和 $E_j$ 的最优控制量 $u_{P_i}$ 和 $u_{E_j}$ 是恒定值, 双方无人机的最优轨迹均为直线.

**证** 该微分博弈系统的协态变量设为

$$\lambda^T = [\lambda_{xP_i} \ \lambda_{yP_i} \ \lambda_{zP_i} \ \lambda_{xE_j} \ \lambda_{yE_j} \ \lambda_{zE_j}] \in \mathbb{R}^6, \quad (17)$$

微分博弈的哈密顿量表示如下:

$$H = \lambda_{xP_i} u_{xP_i} + \lambda_{yP_i} u_{yP_i} + \lambda_{zP_i} u_{zP_i} + \lambda_{xE_j} u_{xE_j} + \lambda_{yE_j} u_{yE_j} + \lambda_{zE_j} u_{zE_j}. \quad (18)$$

根据式(10)(15), 该系统的最优控制输入(由协态变量)可以从 $\min_{u_{E_j}} \max_{u_{P_i}} H$ 得到. 此外, 由于代价函数是Mayer类型, 该微分博弈系统的协态方程如下:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

因此, 所有的协态变量都是常数, 最优控制量也是恒定值, 故双方无人机的最优轨迹是直线. 证毕.

上述定理说明, 在构建的多无人机微分博弈系统中, 若博弈双方均是理性的, 则双方无人机的最优状态反馈控制策略均为恒定值, 最终体现为双方无人机的最优运动轨迹均为直线. 若任意一方无人机采用非最优策略, 则双方无人机控制输入和运动轨迹将不再是直线.

### 3.4 Apollonius球面及其扩展结论

Apollonius球面定义为在三维欧氏空间中与两个给定的点(称为焦点)具有固定的距离之比的点所构成的集合. 设仿鹰无人机和仿鹰无人机的初始位置分别为 $x_{E_0} = (0, 0, 0)$ 和 $x_{P_0} = (d, 0, 0)$ , 当仿鹰无人机的速度与仿鹰无人机的速度之比为 $\beta < 1$ 时, 考虑点捕获的情况, 即当两架无人机位置重合时拦截成功, 则拦截点构成的集合是一个球面, 且球心坐标为

$$x_c = \left( \frac{\beta^2 d}{\beta^2 - 1}, 0, 0 \right), \quad (20)$$

半径为

$$r = -\frac{\beta d}{\beta^2 - 1}. \quad (21)$$

如图2所示, 设仿鹰和仿鹰无人机的速度大小分别为 $u_E$ 和 $u_P$ , 其速度之比为 $\beta$ , 则有

$$u_E = \beta u_P, \quad (22)$$

将式(22)两边平方, 有

$$u_E^2 = \beta^2 u_P^2, \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} u_E^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ u_P^2 = (d - x)^2 + y^2 + z^2, \end{cases} \quad (24)$$

将式(24)代入式(23)中, 有

$$x^2 + y^2 + z^2 = \beta^2((d - x)^2 + y^2 + z^2), \quad (25)$$

展开式(25)并整理, 可得

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + \\ (1 - \beta^2)z^2 - \beta^2 d^2 + 2d\beta^2 x = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

将式(26)两边同时除以 $1 - \beta^2$ , 有

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{\beta^2 d^2}{1 - \beta^2} + \frac{2d\beta^2 x}{1 - \beta^2} = 0, \quad (27)$$

对式(27)进行配方, 可得

$$\left(x + \frac{\beta^2 d}{1 - \beta^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{\beta d}{1 - \beta^2}\right)^2, \quad (28)$$

因此, 拦截点构成的集合是一个球面.

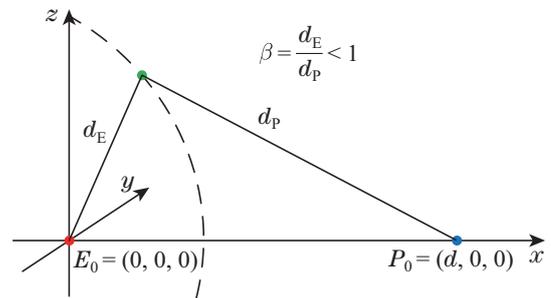


图2 Apollonius球面示意图

Fig. 2 Apollonius sphere

考虑圆捕获的情况, 即仿鹰无人机在距离仿鹰无人机 $R_c$ 即可发射自身携带的武器成功拦截对方, 则拦截点构成的集合构成的曲面可由下面的隐函数表示:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \beta R_c - \\ \beta \sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

仿鹰无人机 $E$ 的最优目标点 $x_E^* = (x_E^*, y_E^*, z_E^*)$ 的坐标由式(29)对 $x$ 和 $y$ 和求偏导构成如下的非线性方程组确定:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \beta \frac{x - d}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \beta \frac{y}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2}} = 0, \quad (31)$$

若  $d > R_c$ , 则拦截点构成的曲面可近似为球面, 球心坐标为

$$\mathbf{x}_c = \left(-\frac{\beta^2(d - R_c)}{1 - \beta^2}, 0, 0\right), \quad (32)$$

半径为

$$r = \frac{\beta(d - R_c)}{1 - \beta^2}. \quad (33)$$

## 4 无人机对抗博弈的最优分配策略及状态反馈策略

本节讨论鹰鸽双方均有两架无人机, 即  $M = N = 2$  这种情况. 首先, 通过一定的任务分配策略将该微分博弈问题分解成两个子问题, 并分别对子问题进行求解. 以下给出了微分博弈的最优分配策略, 并为鹰鸽双方每架无人机提供了最优状态反馈控制律.

### 4.1 最优任务分配策略

在无人机2对2对抗博弈问题中, 假设仿鹰无人机在分配拦截目标后不会中途切换, 则只有两种可能的任务分配方式, 即

$$A_1: \mu_{11} = \mu_{22} = 1, \mu_{12} = \mu_{21} = 0, \quad (34)$$

任务分配方式  $A_1$  表示无人机  $P_1$  分配拦截无人机  $E_1$ , 无人机  $P_2$  分配拦截无人机  $E_2$ . 定义这种任务分配的成本/回报为博弈终止时仿鹰无人机在被全部拦截时与目标平面  $\Pi$  的最近距离  $z_1(t_f) = \min(z_{E1}(t_f), z_{E2}(t_f))$ . 或者有另外一种任务分配方式  $A_2$  为

$$A_2: \mu_{12} = \mu_{21} = 1, \mu_{11} = \mu_{22} = 0, \quad (35)$$

表示无人机  $P_1$  分配拦截无人机  $E_2$ , 无人机  $P_2$  分配拦截无人机  $E_1$ . 此种任务分配的成本/回报为  $z_2(t_f) = \min(z_{E1}(t_f), z_{E2}(t_f))$ . 如果  $z_1(t_f) > z_2(t_f)$ , 说明采取  $A_1$  分配方式对仿鹰无人机更有利, 拦截点与目标平面的距离相对较远, 如果  $z_1(t_f) < z_2(t_f)$ , 说明采取  $A_2$  分配方式对仿鹰无人机更有利, 如果  $z_1(t_f) = z_2(t_f)$ , 则仿鹰在初始时刻可以任意选择一种任务分配方式.

当任务分配方式确定后, 原来的微分博弈问题拆分为两个子博弈问题, 即分别拦截  $E_1$  和  $E_2$  两架无人机, 使得拦截点距离目标平面尽可能远. 这两个子博弈问题本质上是相同的, 故下一小节的仿鹰无人机下标均以  $\mathbf{P}$  表示, 仿鸽无人机下标均以  $\mathbf{E}$  表示.

虽然在本文考虑的情况中仿鹰无人机在任务分配后就不会切换拦截目标, 但是实际情况下仿鹰无人机可以通过不断计算  $z_1(t_f)$  和  $z_2(t_f)$ , 对仿鸽无人机的非最优策略做出判断并实时切换分配方式, 使得终端状态的成本/收益增加, 让博弈朝着对仿鹰无人机更有利的方向发展.

### 4.2 最优状态反馈策略

本小节通过证明支付函数满足HJI方程, 进而, 求解出博弈双方无人机的最优状态反馈策略. 设  $d$  表示仿鹰无人机  $\mathbf{P}$  与仿鸽无人机  $\mathbf{E}$  之间的距离, 即

$$d = \sqrt{(x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2 + (z_E - z_P)^2}, \quad (36)$$

标量  $d_E$  表示仿鸽无人机  $\mathbf{E}$  与最优目标点  $\mathbf{x}_E^* = (x_E^*, y_E^*, z_E^*)$  之间的距离, 即

$$d_E = \sqrt{(x_E^* - x_E)^2 + (y_E^* - y_E)^2 + (z_E^* - z_E)^2}, \quad (37)$$

标量  $d_P$  表示仿鹰无人机  $\mathbf{P}$  与最优目标点  $\mathbf{x}_P^* = (x_P^*, y_P^*, z_P^*)$  之间的距离, 即

$$d_P = \sqrt{(x_P^* - x_P)^2 + (y_P^* - y_P)^2 + (z_P^* - z_P)^2}. \quad (38)$$

考虑式(10)–(16)所描述的无人机对抗博弈系统, 且满足  $d > R_c$ , 其中式(16)表示的价值函数是连续可微的, 并且满足HJI方程, 价值函数  $V(\mathbf{x}) = \min(z_1(t_f), z_2(t_f))$ .  $P$  和  $E$  的最优状态反馈策略由下式给出:

$$\mathbf{u}_E^* = \beta \left( \frac{x_E^* - x_E}{d_E}, \frac{y_E^* - y_E}{d_E}, \frac{z_E^* - z_E}{d_E} \right), \quad (39)$$

$$\mathbf{u}_P^* = \left( \frac{x_P^* - x_P}{d_P}, \frac{y_P^* - y_P}{d_P}, \frac{z_P^* - z_P}{d_P} \right), \quad (40)$$

最优拦截目标点的位置坐标为

$$x_E^* = x_P^* = \frac{x_E - \beta^2 x_P}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2 R_c (x_E - x_P)}{(1 - \beta^2)d}, \quad (41)$$

$$y_E^* = y_P^* = \frac{y_E - \beta^2 y_P}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2 R_c (y_E - y_P)}{(1 - \beta^2)d}, \quad (42)$$

$$z_E^* = z_P^* = \frac{z_E - \beta^2 z_P - \beta d + \beta R_c}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2 R_c (z_E - z_P)}{(1 - \beta^2)d}. \quad (43)$$

由第3.4小节可知, 无人机  $P$  和  $E$  的位置能够近似确定一个球面, 设球心坐标为  $\mathbf{x}_c = (x_c, y_c, z_c)$ , 半径为  $r$ . 则最优拦截点对应于球面上距离目标平面  $\Pi$  最近的点, 其坐标为  $\mathbf{x}_P^* = \mathbf{x}_E^* = (x_c, y_c, z_c - r)$ , 即为式(41)–(43), 价值函数为  $V(\mathbf{x}) = z_c - r$ .

为了说明价值函数  $V(\mathbf{x})$  是连续可微且满足HJI方程, 下面计算  $V(\mathbf{x})$  对  $\mathbf{x}_E$  和  $\mathbf{x}_P$  的偏导数, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_E} &= -\frac{\beta(x_E - x_P)}{(1 - \beta^2)d} + \frac{\beta^2 R_c (z_E - z_P)(x_E - x_P)}{(1 - \beta^2)d^3}, \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y_E} &= -\frac{\beta(y_E - y_P)}{(1 - \beta^2)d} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_E} &= \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 R_c + \beta(z_E - z_P)}{(1-\beta^2)d} + \frac{\beta^2 R_c(z_E - z_P)^2}{(1-\beta^2)d^3}, \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_P} &= \frac{\beta(x_E - x_P)}{(1-\beta^2)d} - \frac{\beta^2 R_c(z_E - z_P)(x_E - x_P)}{(1-\beta^2)d^3}, \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y_P} &= \frac{\beta(y_E - y_P)}{(1-\beta^2)d} - \frac{\beta^2 R_c(z_E - z_P)(y_E - y_P)}{(1-\beta^2)d^3}, \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_P} &= -\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{\beta^2 R_c + \beta(z_E - z_P)}{(1-\beta^2)d} - \frac{\beta^2 R_c(z_E - z_P)^2}{(1-\beta^2)d^3}. \end{aligned} \quad (44)$$

当时间  $t < t_f$  时, 有  $d > 0$ , 即在子博弈结束之前无人机  $P$  和  $E$  之间的距离为正值. 下面计算最优目标点与无人机位置之间的位置关系为

$$\left\{ \begin{aligned} x^* - x_E &= \frac{\beta^2(x_E - x_P)}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 R_c(x_E - x_P)}{(1-\beta^2)d}, \\ y^* - y_E &= \frac{\beta^2(y_E - y_P)}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 R_c(y_E - y_P)}{(1-\beta^2)d}, \\ z^* - z_E &= \frac{\beta^2(z_E - z_P) - \beta d + \beta R_c}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 R_c(z_E - z_P)}{(1-\beta^2)d}, \\ x^* - x_P &= \frac{x_E - x_P}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 R_c(x_E - x_P)}{(1-\beta^2)d}, \\ y^* - y_P &= \frac{y_E - y_P}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 R_c(y_E - y_P)}{(1-\beta^2)d}, \\ z^* - z_P &= \frac{z_E - z_P - \beta d + \beta R_c}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 R_c(z_E - z_P)}{(1-\beta^2)d}, \end{aligned} \right. \quad (45)$$

HJI 方程的形式由以下公式给出:

$$-\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E^*, \mathbf{u}_P^*) + g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_E^*, \mathbf{u}_P^*), \quad (46)$$

在本文所讨论的微分博弈问题中, 由于支付函数不会随着时间变化, 且终端性能指标函数的值只与博弈终止时刻的位置有关, 故有  $-\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} = 0$  和  $g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_E^*, \mathbf{u}_P^*) = 0$  成立. 将式(10)(39)-(40)代入式(46)后, 可得

$$\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E^*, \mathbf{u}_P^*) =$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_E} \times \frac{\beta(x_E^* - x_E)}{d_E} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y_E} \times \frac{\beta(y_E^* - y_E)}{d_E} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_E} \times \frac{\beta(z_E^* - z_E)}{d_E} + \\ &\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_P} \times \frac{x_P^* - x_P}{d_P} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y_P} \times \frac{y_P^* - y_P}{d_P} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_P} \times \frac{z_P^* - z_P}{d_P}, \end{aligned} \quad (47)$$

因为  $d_E = \beta d_P$ , 且  $x_E^* = x_P^*$ , 故下面将  $x_E^*$  和记为  $x^*$ , 故式(47)可写为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E^*, \mathbf{u}_P^*) = \\ &\frac{1}{d_P} \times \left( \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_E} \times (x^* - x_E) + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y_E} \times (y^* - y_E) + \right. \\ &\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_E} \times (z^* - z_E) + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_P} \times (x^* - x_P) + \\ &\left. \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y_P} \times (y^* - y_P) + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_P} \times (z^* - z_P) \right) = \\ &\frac{1}{d_P} \times \left( \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_E} \times (x_P - x_E) + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y_E} \times (y_P - y_E) + \right. \\ &\left. \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_E} \times (z^* - z_E) + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial z_P} \times (z^* - z_P) \right), \end{aligned} \quad (48)$$

代入式(44)-(45), 又有条件  $d > R_c$ , 可得  $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E^*, \mathbf{u}_P^*) = 0$  近似成立. 因此, 价值函数  $V(\mathbf{x})$  满足 HJI 方程.

本文设定每架无人机可以通过机上传感器获取参与博弈的所有无人机在三维空间中的位置, 这样友方无人机之间就不需要额外的通信. 若无人机只能获取到自身和对方无人机的位置, 无法获得友方无人机位置, 则需要友方无人机之间进行通信交换各自位置信息. 另外, 本文研究的微分博弈问题的常规鞍点解可以由参与对抗博弈的每架无人机单独计算, 即仿鹰无人机的最优分配策略与双方无人机的最优目标点. 双方无人机经过计算获取到鞍点解之后, 可以通过状态反馈的方式执行各自的策略.

### 5 无人机数量 $N \geq M > 2$ 时的推广

本节将多无人机对抗博弈系统中仿鹰无人机与仿鸽无人机的数量扩展到  $N \geq M > 2$  的情况. 对于  $N = M > 2$ , 本文使用最优分配策略将无人机对抗博弈问题分解为多个子问题, 每个子问题为 1 对 1 博弈. 然后, 讨论  $N > M > 2$  的更一般情况, 此时两个或以上的仿鹰无人机需要相互合作拦截某架仿鸽无人机. 当仿鹰无人机与仿鸽无人机数量相等时, 首先, 列出所有可行任务分配方式  $A_i$ , 每架仿鹰无人机有且只有一个拦截目标, 每架仿鸽无人机都会被唯一一架仿鹰无人机拦截, 且仿鸽无人机均在目标平面上方被拦截. 当仿鹰无人机一方使用最优分配方式时, 仿鸽无人机被

拦截的目标点与目标平面的距离取最大值. 设仿鸽无人机  $E_i (i=1, 2, \dots, M)$  被仿鹰无人机  $P_j (j=1, 2, \dots, N)$  拦截, 则有  $\mu_{ij}^* = 1$ , 此时对抗双方最优状态反馈策略分别为

$$\mathbf{u}_{E_i}^* = \beta \left( \frac{x_{E_i}^* - x_{P_j}}{d_{E_i}}, \frac{y_{E_i}^* - y_{P_j}}{d_{E_i}}, \frac{z_{E_i}^* - z_{P_j}}{d_{E_i}} \right), \quad (49)$$

$$\mathbf{u}_{P_j}^* = \left( \frac{x_{P_j}^* - x_{P_j}}{d_{P_j}}, \frac{y_{P_j}^* - y_{P_j}}{d_{P_j}}, \frac{z_{P_j}^* - z_{P_j}}{d_{P_j}} \right), \quad (50)$$

式中对抗双方的最优目标点为

$$\begin{aligned} x_{E_i}^* &= x_{P_j}^* = \\ & \frac{x_{E_i} - \beta^2 x_{P_j}}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2 R_c (x_{E_i} - x_{P_j})}{(1 - \beta^2) d_{ij}}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} y_{E_i}^* &= y_{P_j}^* = \\ & \frac{y_{E_i} - \beta^2 y_{P_j}}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2 R_c (y_{E_i} - y_{P_j})}{(1 - \beta^2) d_{ij}}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} z_{E_i}^* &= z_{P_j}^* = \frac{z_{E_i} - \beta^2 z_{P_j} - \beta d_{ij} + \beta R_c}{1 - \beta^2} - \\ & \frac{\beta^2 R_c (z_{E_i} - z_{P_j})}{(1 - \beta^2) d_{ij}}, \end{aligned} \quad (53)$$

其中:  $d_{E_i}$  与  $d_{P_j}$  分别为仿鸽无人机  $E_i$  与仿鹰无人机  $P_j$  到最优目标点的距离;  $d_{ij}$  为仿鸽无人机  $E_i$  与仿鹰无人机  $P_j$  之间的距离.

当仿鹰无人机的数量大于仿鸽无人机的数量时, 可将博弈对抗问题拆分为  $M$  个子问题, 其中至少有一个子问题中至少有两架以上仿鹰无人机合作拦截一架仿鸽无人机. 受文献 [20] 的启发, 可分别求出仿鸽无人机对每架负责拦截的仿鹰无人机所构成的拦截点曲面, 找出曲面的交集并确定与目标平面最近的点为最优拦截点. 此时对抗双方最优状态反馈策略均为向最优拦截点运动.

## 6 仿真分析

在本节中, 选择仿鹰无人机和仿鸽无人机数量为  $N = 2, M = 2$ , 首先, 画出了拦截点所构成的曲面, 并给出鹰鸽均选择最优策略和目标点时双方的目标点及运动轨迹, 并分析两种不同的任务分配方式对最优目标点(最优拦截点)的影响. 进一步, 考虑仿鹰无人机采取非最优拦截策略时仿鸽无人机应当采用对应的策略以达到目标平面取胜. 此时仿鹰无人机采用哈里斯鹰群捕猎时使用的比例追踪+比例导引(PP+PN)制导律. 最后, 考虑仿鸽无人机采取非最优策略(垂直俯冲逃逸策略)时, 仿鹰无人机应当使用的最优状态反馈策略, 以增加捕获点与防御平面之间的距离.

### 6.1 鹰鸽双方均采用最优策略

设仿鹰两架无人机的初始位置为  $\mathbf{x}_{P_1}(0) = (2, 1, 6)$  和  $\mathbf{x}_{P_2}(0) = (1, 2, 1)$ , 仿鸽两架无人机的初始位置为  $\mathbf{x}_{E_1}(0) = (5, 1, 6)$  和  $\mathbf{x}_{E_2}(0) = (3, 4, 7)$ . 设定鹰鸽双方无人机之间的速度比为  $\beta = 0.7$ , 仿鹰无人机的截

半径  $R_c = 1.2$ .

首先, 分别计算  $A_1$  或者  $A_1$  两种不同任务分配方式得到的最优拦截点与目标平面的最近距离. 当采用  $A_1: \mu_{11} = \mu_{22} = 1, \mu_{12} = \mu_{21} = 0$  分配方式时,  $z_{E_1}(t_f) = 3.7769, z_{E_2}(t_f) = 4.3833$ , 故  $z_1(t_f) = \min(z_{E_1}(t_f), z_{E_2}(t_f)) = 3.7769$ . 而当采用  $A_2: \mu_{12} = \mu_{21} = 1, \mu_{11} = \mu_{22} = 0$  分配方式时,  $z_{E_1}(t_f) = 2.6663, z_{E_2}(t_f) = 4.7080$ , 故  $z_2(t_f) = \min(z_{E_1}(t_f), z_{E_2}(t_f)) = 2.6663$ . 因此, 仿鹰两架无人机应当选择  $A_1$  方式进行任务分配, 以保证博弈的价值函数最大.

当仿鹰无人机确定好分组对抗方式后, 鹰鸽双方无人机均采用最优状态反馈策略进行拦截对抗博弈. 双方无人机最优飞行轨迹如图3所示, 其中, 拦截曲面1和拦截曲面2分别以在图中以黄色和蓝色标出. 最优拦截点1和最优拦截点2的坐标分别为  $x_1^* = x_{E_1}^* = (6.8309, 1, 3.7769)$  和  $x_2^* = x_{E_2}^* = (4.2653, 5.2653, 4.3833)$ . 鹰鸽双方无人机的控制量均为常数, 即  $\mathbf{u}_{E_1} = (0.4450, 0, -0.5403)$ ,  $\mathbf{u}_{P_1} = (0.9082, 0, -0.4185)$ ,  $\mathbf{u}_{E_2} = (0.2794, 0.2794, -0.5778)$ ,  $\mathbf{u}_{P_2} = (0.5702, 0.5702, 0.5914)$ , 因此, 双方无人机的运动轨迹均为直线. 两个子博弈的终端时间分别为  $t_{f_1} = 4.13$  s,  $t_{f_2} = 4.53$  s. 双方无人机之间的距离变化曲线如图4所示.

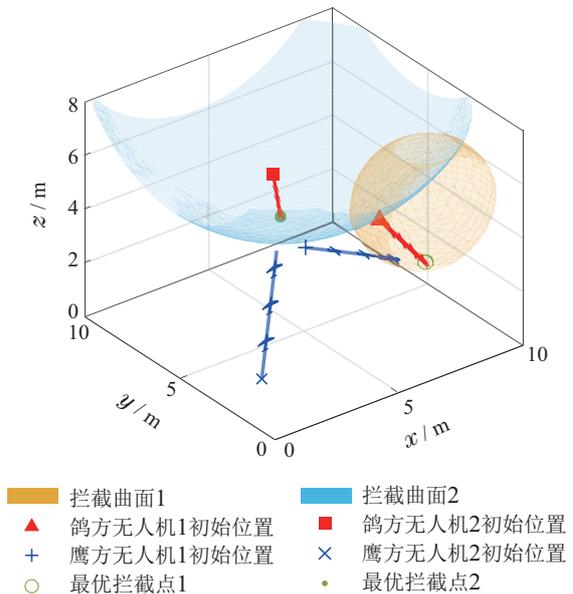


图3 鹰鸽双方无人机采用最优策略时轨迹图

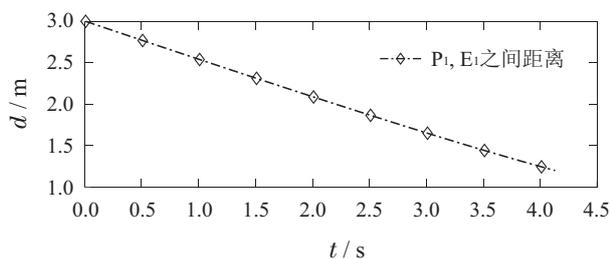
Fig. 3 Trajectories of UAVs adopt optimal strategy

### 6.2 仿鹰无人机采用PP+PN混合制导策略

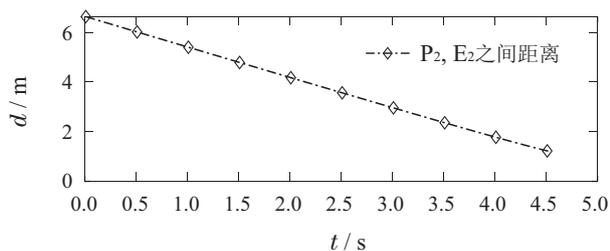
考虑鹰鸽双方无人机的初始位置与第5.1小节相同的条件, 但仿鹰无人机  $P_1$  和  $P_2$  采用第2.2小节中哈里斯鹰捕猎时使用的PP+PN混合制导策略, 制导常数为  $N = 0.7$  和  $K = 1.2$ , 仿鸽无人机使用最优状态反馈策略.

PP+PN并非仿鹰无人机在该微分博弈的最优策略, 双方无人机飞行轨迹如图5所示, 拦截点1和截

截点2的坐标分别为  $x_1(t_{f_1}) = (6.7032, 1, 3.6172)$ ,  $x_2(t_{f_2}) = (4.7676, 5.7676, 4.0728)$ .



(a) P<sub>1</sub>和E<sub>1</sub>的距离变化曲线



(b) P<sub>2</sub>和E<sub>2</sub>的距离变化曲线

图4 鹰鸽双方无人机之间的距离变化曲线

Fig. 4 Distance change between UAVs

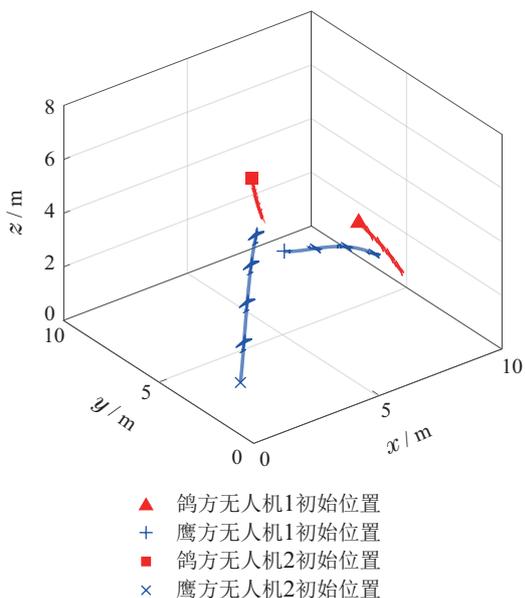
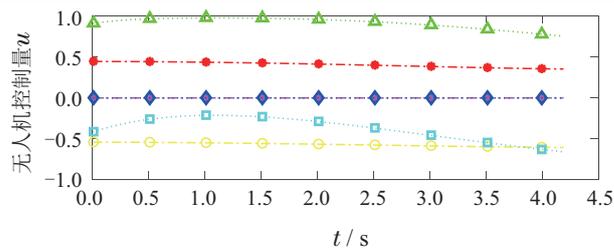


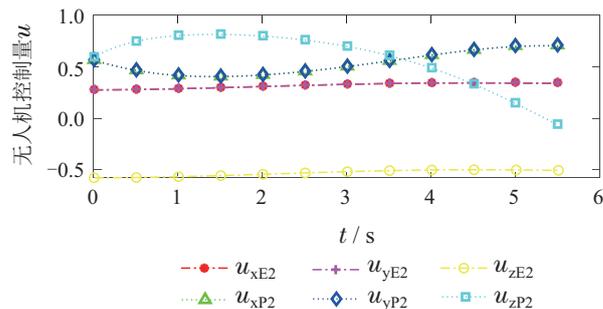
图5 仿鹰无人机采用PP+PN制导律时飞行轨迹曲线

Fig. 5 Trajectories of eagle UAVs adopt PP+PN guidance law

鹰鸽双方无人机的控制量变化曲线如图6所示,此时,无人机控制量已不再是常数值.双方无人机之间的距离变化曲线如图7所示.两个子博弈的终端时间分别为  $t_{f_1} = 4.19$  s,  $t_{f_2} = 5.51$  s.仿真结果显示仿鹰无人机采用PP+PN制导策略实际上是一种非最优的对抗博弈策略,仿鸽无人机使用的鞍点状态反馈策略可以利用此机会,在博弈结束时尽可能靠近目标平面  $\Pi$ .因此,对于仿鹰无人机而言,该策略的效果相比最优策略要差.



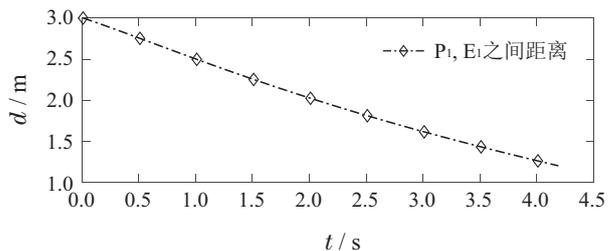
(a) P<sub>1</sub>和E<sub>1</sub>的控制量变化曲线



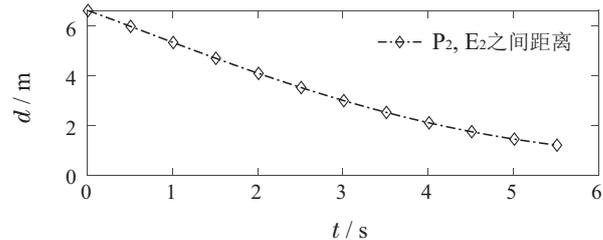
(b) P<sub>2</sub>和E<sub>2</sub>的控制量变化曲线

图6 鹰鸽双方无人机的控制量变化曲线

Fig. 6 Control values of UAVs



(a) P<sub>1</sub>和E<sub>1</sub>的距离变化曲线



(b) P<sub>2</sub>和E<sub>2</sub>的距离变化曲线

图7 鹰鸽双方无人机之间的距离变化曲线

Fig. 7 Distance change between UAVs

### 6.3 仿鸽无人机采用垂直俯冲策略

最后考虑与第6.2小节相反的情况,仿鹰无人机以闭环方式执行最优状态反馈策略(式(40)),而仿鸽无人机以非最优策略执行两个子博弈任务.初始条件与第5.1小节相同.仿鸽无人机使用俯冲策略,试图垂直于目标平面  $\Pi$  以最短距离到达,鹰方无人机无法得知该策略,只根据博弈的当前状态来执行自身的最优策略.因此,仿鹰无人机初始的目标点为第6.1小节中的最优拦截点,随着仿鸽无人机的运动逐渐改变.

双方无人机的飞行轨迹如图8所示,拦截点1和拦截点2的坐标分别为 $x_1(t_{f_1}) = (5, 1, 4.4810)$ ,  $x_2(t_{f_2}) = (3, 4, 4.3890)$ .

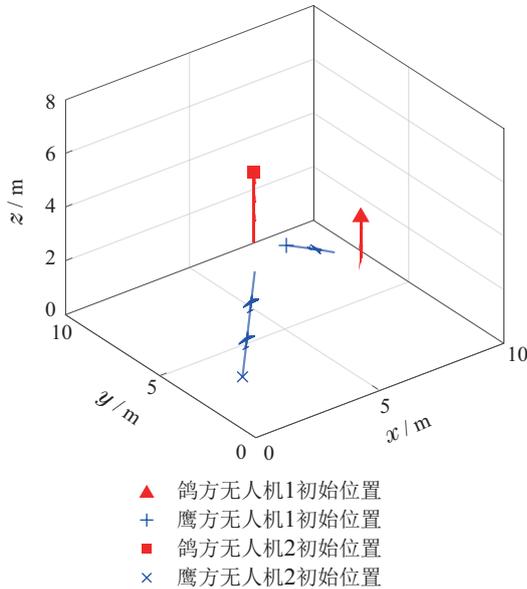
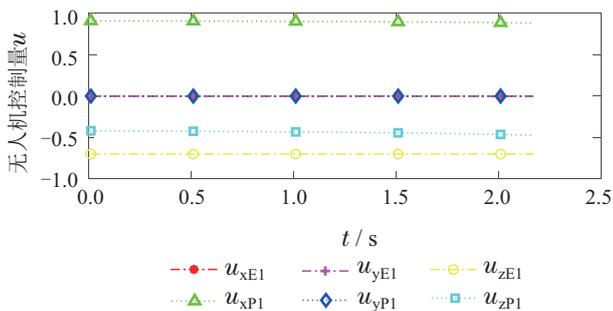
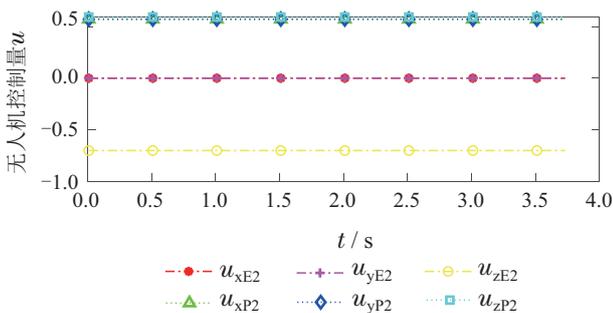


图8 仿鸽无人机采用垂直俯冲策略时的飞行轨迹曲线  
Fig. 8 Trajectories of pigeon UAVs adopt vertical dive strategy

鹰鸽双方无人机的控制量变化曲线如图9所示,两个子博弈的终端时间分别为 $t_{f_1} = 2.17$  s,  $t_{f_2} = 3.73$  s. 双方无人机之间的距离变化曲线如图10所示. 仿真结果显示此时仿鸽无人机采用的垂直俯冲策略实际上也是一种非最优的博弈策略,对于仿鸽无人机而言,该策略的效果相比最优策略要差.



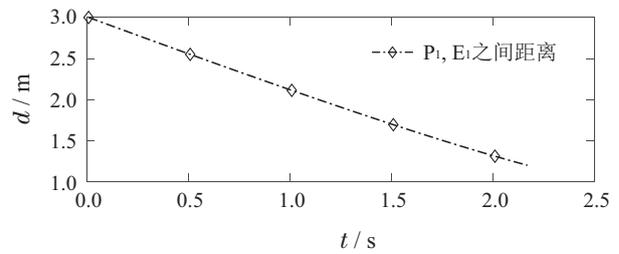
(a)  $P_1$ 和 $E_1$ 的控制量变化曲线



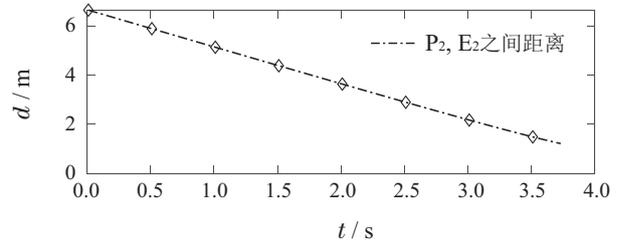
(b)  $P_2$ 和 $E_2$ 的控制量变化曲线

图9 鹰鸽双方无人机的控制量变化曲线  
Fig. 9 Control values of UAVs

由上述仿真结果可见,当鹰鸽双方无人机均采用最优状态反馈策略时,仿鹰无人机一方采用不同的任务分配方式确定的最优拦截目标点是不同的. 当博弈双方中任意一方使用其他策略(混合制导、垂直俯冲)进行拦截或者逃逸时,结果会偏离采取最优策略时的鞍点解,且采用最优状态反馈策略的一方将更为有利.



(a)  $P_1$ 和 $E_1$ 的距离变化曲线



(b)  $P_2$ 和 $E_2$ 的距离变化曲线

图10 鹰鸽双方无人机之间的距离变化曲线  
Fig. 10 Distance change between UAVs

### 7 结论

本文研究了三维空间中多无人机分组对抗微分博弈问题. 首先,采用分组对抗策略为每架仿鸽无人机分配仿鹰无人机,将鹰鸽双方无人机的对抗博弈问题转化为多个零和微分博弈问题. 其次,求出了每个定量博弈的解,并得到双方无人机的最优状态反馈策略. 最后,数值仿真比较了鹰鸽双方无人机使用最优或者非最优策略对博弈对抗结果产生的影响,验证了所提出方法的有效性.

本文在分析鹰鸽双方无人机之间的对抗问题时,假设仿鸽无人机的目标集合 $\mathcal{I}$ 为无限大的平面. 下一步将研究当仿鸽无人机的目标集合为有限大的曲面时鹰鸽双方无人机所采取的最优策略.

### 参考文献:

[1] DUAN Haibin, QIU Huaxin. *Unmanned Aerial Vehicle Swarm Autonomous Control Based on Swarm Intelligence*. Beijing: Science Press, 2018.  
(段海滨, 邱华鑫. 基于群体智能的无人机集群自主控制. 北京: 科学出版社, 2018)

[2] DUAN Haibin, HE Hangxuan, ZHAO Yanjie, et al. Review of technological hotspots of unmanned aerial vehicle in 2021. *Science & Technology Review*, 2022, 40(1): 215 – 227.

- (段海滨, 何杭轩, 赵彦杰, 等. 2021年无人机热点回眸. 科技导报, 2022, 40(1): 215 – 227.)
- [3] ISAACS R. *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965.
- [4] IMADO F, KURODA T. A method to solve missile-aircraft pursuit-evasion differential games. *IFAC Proceedings Volumes*, 2005, 38(1): 176 – 181.
- [5] FUCHS Z E, KHARGONEKAR P P. Generalized engage or retreat differential game with escort regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(2): 668 – 681.
- [6] FANG B F, PAN Q S, HONG B, et al. Research on high speed evader vs. multi lower speed pursuers in multi pursuit-evasion games. *Information Technology Journal*, 2012, 11(8): 989 – 997.
- [7] GARCIA E, FUCHS Z E, MILUTINOVIC D, et al. A geometric approach for the cooperative two-pursuer one-evader differential game. *IFAC-PapersOnline*, 2017, 50(1): 15209 – 15214.
- [8] VON M A, SHISHIKA D, FUCHS Z, et al. Turret-runner-penetrator differential game with role selection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, DOI: 10.1109/TAES.2022.3176599.
- [9] BAKOLAS E, TSIOTRAS P. Optimal pursuit of moving targets using dynamic Voronoi diagrams. *Proceedings of the 49th IEEE conference on decision and control (CDC)*. Atlanta, GA, USA: IEEE, 2010: 7431 – 7436.
- [10] LIU S Y, ZHOU Z, TOMLIN C, et al. Evasion as a team against a faster pursuer. *Proceedings of 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: IEEE, 2013: 5368 – 5373.
- [11] CHEN M, ZHOU Z, TOMLIN C J. Multiplayer reach-avoid games via pairwise outcomes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(3): 1451 – 1457.
- [12] ZHOU Z, DING J, HUANG H, et al. Efficient path planning algorithms in reach-avoid problems. *Automatica*, 2018, 89: 28 – 36.
- [13] LIU Kun, ZHENG Xiaoshuai, LIN Yeming, et al. Design of optimal strategies for the pursuit-evasion problem based on differential game. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(8): 1840 – 1854. (刘坤, 郑晓帅, 林业若, 等. 基于微分博弈的追逃问题最优策略设计. 自动化学报, 2021, 47(8): 1840 – 1854.)
- [14] HAGLER S J, GIBBONS A, BEDNARZ J C, et al. Nest provisioning and sociality at Harris's hawk nests in south Texas. *Journal of Raptor Research*, 2022, DOI: 10.3356/JRR-21-39.
- [15] DUAN Haibin, HUO Mengzhen, FAN Yanming. Flight verification of multiple UAVs collaborative air combat imitating the intelligent behavior in hawks. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(12): 1812 – 1819. (段海滨, 霍梦真, 范彦铭. 仿鹰群智能的无人机集群协同对抗飞行验证. 控制理论与应用, 2018, 35(12): 1812 – 1819.)
- [16] HEIN A M, ALTSHULER D L, CADE D E, et al. An algorithmic approach to natural behavior. *Current Biology*, 2020, 30(11): R663 – R675.
- [17] BRIGHTON C H, TAYLOR G K. Hawks steer attacks using a guidance system tuned for close pursuit of erratically manoeuvring targets. *Nature Communications*, 2019, 10(1): 1 – 10.
- [18] HEDENSTROM A, ROSÉN M. Predator versus prey: On aerial hunting and escape strategies in birds. *Behavioral Ecology*, 2001, 12(2): 150 – 156.
- [19] GARCIA E, CASBEER D W, VON M A, et al. Multiple pursuer multiple evader differential games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 66(5): 2345 – 2350.
- [20] VON M A, GARCIA E, CASBEER D, et al. Multiple-pursuer, single-evader border defense differential game. *Journal of Aerospace Information Systems*, 2020, 17(8): 407 – 416.

#### 作者简介:

**全秉达** 博士研究生, 主要研究方向为无人机集群自主控制, E-mail: tongbingda@buaa.edu.cn;

**段海滨** 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为无人飞行器集群仿生自主控制、计算机仿生视觉和仿生智能计算, E-mail: hbduan@buaa.edu.cn;

**魏晨** 博士, 副教授, 主要研究方向为多智能体控制和非线性控制, E-mail: weichen@buaa.edu.cn.