

# 非平衡有向网络下带约束的连续时间分布式优化算法设计

杨正全<sup>1†</sup>, 杨秀伟<sup>2</sup>, 陈增强<sup>3</sup>

(1. 中国民航大学 交通科学与工程学院, 天津 300300; 2. 中国民航大学 理学院, 天津 300300;

3. 南开大学 人工智能学院, 天津 300350)

**摘要:** 本文基于权重不平衡有向网络, 对一类分布式约束优化问题进行研究, 其中全局目标函数等于具有李普希兹梯度的强凸目标函数之和, 并且每个智能体的状态都有一个局部约束集. 每个智能体仅知道自身的局部目标函数和非空约束集. 本文的目标是用分布式方法求解该问题的最优解. 针对优化问题, 提出了一种新的分布式投影梯度连续时间协调算法, 利用拉普拉斯矩阵的零特征值对应的左特征向量消除了图的不平衡性. 在某些假设下, 结合凸分析理论和李雅普诺夫稳定性理论, 证明了算法能够获得问题的最优解. 最后, 通过仿真验证了算法的有效性.

**关键词:** 分布式算法; 连续时间系统; 凸优化; 多智能体系统; 非平衡有向网络

**引用格式:** 杨正全, 杨秀伟, 陈增强. 非平衡有向网络下带约束的连续时间分布式优化算法设计. 控制理论与应用, 2023, 40(6): 1053 – 1060

DOI: 10.7641/CTA.2022.20233

## Continuous time with constraints in general directed networks distributed optimization algorithm design

YANG Zheng-quan<sup>1†</sup>, YANG Xiu-wei<sup>2</sup>, CHEN Zeng-qiang<sup>3</sup>

(1. College of Transportation Science and Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;

2. College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;

3. College of Artificial Intelligence, Nankai University, Tianjin 300350, China)

**Abstract:** This paper studies a class of distributed constrained optimization problems on weighted unbalanced directed networks, in which the global objective function is equal to the sum of strongly convex objective functions with the global Lipschitz gradient, and the state of each node is limited to a local constraint set. Each agent only knows its own local objective function and the non-empty constraint set. The goal of this paper is to solve the optimal solution of the problem by using a distributed method. For the optimization problem, a new distributed projection gradient continuous-time coordination algorithm is proposed, in which the imbalance of the graph is eliminated by using the left eigenvector corresponding to the zero eigenvalue of the Laplace matrix. Under some assumptions, combined with the convex analysis theory and Lyapunov stability theory, it is proved that the algorithm can obtain the optimal solution of the problem. Finally, the effectiveness of the algorithm is verified by simulations.

**Key words:** distributed algorithms; continuous time systems; convex optimization; multi-agent systems; unbalanced directed network

**Citation:** YANG Zhengquan, YANG Xiuwei, CHEN Zengqiang. Continuous time with constraints in general directed networks distributed optimization algorithm design. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(6): 1053 – 1060

## 1 引言

近年来, 随着科技的蓬勃发展和网络化系统的不断更新, 基于多智能体系统的分布式协调问题已成为复杂性控制科学领域的重要研究内容之一. 分布式优化是一种网络优化决策方式, 每个智能体在只知道自己的目标函数和局部约束等局部数据的情况下, 借助网络通信拓扑通过与其邻居智能体之间的协同合作

完成特定的全局任务, 实现最优决策. 由于具有“去中心化”的特点和优势, 分布式优化可以解决很多集中式算法无法解决的大规模复杂系统优化问题, 并且分布式优化理论和应用逐渐渗透到科学研究、工程应用和社会生活的各个方面<sup>[1]</sup>. 例如解决资源分配问题和智能电网的经济调度问题等, 而这类问题都可以转化为求目标函数之和最小的凸优化问题, 国内外的研究

收稿日期: 2022-04-02; 录用日期: 2022-08-20.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: zquanyang@163.com; Tel.: +86 22-24092054.

本文责任编辑: 孙长银.

国家自然科学基金项目(62173332)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62173332).

者设计了很多种算法来解决这类凸优化问题。

对于分布式优化算法,其网络拓扑结构主要可以分为无向图和有向图两大类。无向图要求智能体之间的信息传输是对称的和双向的。有向图还可以分为平衡有向图和非平衡有向图。平衡有向图必须保证每个节点的出邻居和入邻居个数一致;非平衡有向图则仅要求图的连通性。对于无向网络下的无约束分布式优化问题, Nedic等人<sup>[2]</sup>突破性地提出了分布式次梯度算法来求解此类优化问题。文献[3-4]进一步将研究推广到了带有集合约束的情况下,分别提出了分布式一致投影算法和针对参数未知的欧拉-拉格朗日系统的分布式连续时间算法。另外,针对无向连通图下带一般约束的凸优化问题,文献[5]提出了一种基于有限时间一致协议的分布式连续时间原始对偶算法。文献[6]考虑自适应性和有限时间收敛性,研究了一个分布式连续时间优化问题。

在实际情况中,由于通讯线路设置或信号衰减等原因,智能体之间的通信经常是单向的,对于有向图下的分布式优化问题,国内外的研究也在不断增加。文献[7]研究了时变有向图上具有伪凸和代价函数的在线分布式优化问题,设计了一种基于辅助优化方案的在线分布式算法。实际中的分布式优化问题往往带有特定的约束条件<sup>[8]</sup>。无约束的优化问题往往存在于理想状态下,在实际应用中,决策变量往往会受到多重限制,所以很多优化问题是带有约束的,在解决这类优化问题时,决策变量必须满足约束条件。文献[9-11]研究了带不等式约束的分布式优化问题。文献[12]提出一种分布式连续时间算法来解决强连通和权重平衡有向图上具有全局耦合等式约束和局部不等式约束的凸优化问题。文献[13]提出了一种新的无投影动力学方法来求解带约束的分布式优化问题。在系统网络中,决策变量往往会产生耦合的情况,文献[14-17]解决了一类带等式线性耦合约束的分布式优化问题。对于更多的分布式优化算法的工作,读者可参考一些文献综述<sup>[18-19]</sup>。

从上述工作中可以发现,带约束的分布式优化问题的连续时间算法研究主要针对无向图和平衡有向图。当网络拓扑的平衡性被破坏时,原有的适用于无向图和平衡有向图的分布式算法可能会失效。因此,不平衡有向网络下的分布式约束优化问题有待进一步探讨研究。值得指出的是,文献[20-21]提出了比投影次梯度更好的方法,但文献[20]要求通信网络是无向图,文献[21]研究的问题无约束。文献[7,20]中的工作要求智能体的通信图是权重平衡的,虽然文献[22-23]考虑了不平衡有向图,但其中假设有向图的加权邻接矩阵是列随机的,并要求每个智能体知道其内邻居的出度。

本文的贡献主要在以下方面:首先,受文献[24]工作的启发,本文研究了在不平衡有向图上具有局部约束集的分布式优化问题。提出了一种新的分布式投影梯度连续时间协调算法,使智能体仅基于局部目标函数和局部约束集就可以找到相同的最优解;其次,与文献[7,20]中智能体的通信图是平衡的假设不同,本文考虑了不平衡有向图,提出的算法利用有向图的拉普拉斯矩阵的零特征值对应的左特征向量消除了图的不平衡性。与同样利用此方法处理非平衡性的文献[25-26]不同,本文在最小化目标函数的同时考虑了集合约束,在现有的考虑非平衡图的无约束优化问题中,利用的方法无法使得智能体在集合约束所限制的可行集的交集内寻求全局的一致最优解。本文所设计的算法更具普适性,在实际中应用场景更加广泛。最后,与文献[27-28]不同,本文不要求每个智能体同时知道外邻居和入度或内邻居和出度信息。与文献[24]相比,本文所提出的算法不需要给智能体赋予额外的辅助变量,算法具有更加简洁直观的形式,使得本文提出的算法更加简单并且容易实现。与文献[29]相比,本文提出的算法不需要对初始值进行假设,不需要任何特殊的初始化过程。

本文其余部分结构如下:第2部分给出了相关概念及基本符号说明;第3部分描述了需要分布式解决的问题;第4部分提出了一种新的分布式投影梯度连续时间协调算法,并证明了智能体的状态渐近收敛到全局最优点;最后,利用仿真实例说明了结论的有效性。

## 2 预备知识

本节给出论文中使用的数学符号、图论、微分包含及凸分析中的相关概念和投影算子等相关理论知识。

### 2.1 符号说明

$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 分别表示实数域和维欧氏空间, $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维实矩阵集, $I_n$ 表示 $n$ 维单位矩阵,对于给定的向量 $x \in \mathbb{R}^n$ , $x$ 的欧氏范数为 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ ;矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的欧氏范数表示为 $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ ,其中 $\lambda_{\max}$ 表示矩阵的最大特征值。给定 $N$ 个列向量 $x_1, x_2, \dots, x_N$ , $\text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 表示按照从 $x_1$ 到 $x_N$ 的顺序堆叠的列向量。 $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵, $\otimes$ 表示克罗内克(Kronecker)积。 $1_N$ 和 $0_N$ 分别表示元素全是1的 $N$ 维列向量和元素全是0的 $N$ 维列向量。

### 2.2 图论

网络中 $N$ 个智能体之间的通信拓扑可以表示为一个有向图 $G = \{\nu, \varepsilon, A\}$ ,其中 $\nu = 1, 2, \dots, N$ 是智能体的集合, $\varepsilon \subset \nu \times \nu$ 是边的集合,而 $A = (a_{ij})_{N \times N}$ 是 $G$ 的邻接矩阵。一个边 $(j, i) \in \varepsilon$ 意味着智能体 $i$ 可以从智能体 $j$ 接收信息,同时,称智能体 $j$ 为智能体 $i$ 的邻居。对于智能体 $i$ 和 $j$ ,如果存在一系列边 $(j, i_1), (i_1, i_2), \dots,$

$(i_{l-1}, i_l), (i_l, i)$  全部属于  $\varepsilon$ , 那么称从智能体  $j$  至智能体  $i$  存在一条有向通路. 在有向图中, 如果从任意一个节点到任意另外一个节点存在一条有向通路, 则称有向图是强连通的. 邻接矩阵  $A = (a_{ij})_{N \times N}$  的定义如下:  $a_{ii} = 0$ ; 若  $(j, i) \in \varepsilon$ , 则  $a_{ij} > 0$ ; 否则  $a_{ij} = 0$ .  $N_{in}^i = \{j \in \nu | a_{ij} > 0\}$  和  $N_{out}^i = \{j \in \nu | a_{ji} > 0\}$  分别表示智能体  $\nu_i$  的内邻居和外邻居的集合,  $d^{in}(\nu_i) = \sum_{j \in N_{in}^i} a_{ij}$  和  $d^{out}(\nu_i) = \sum_{j \in N_{out}^i} a_{ji}$  表示  $\nu_i$  的入度和出度, 有向网络  $G$  是权重平衡的当且仅当  $d^{in}(\nu_i) = d^{out}(\nu_i)$ , 定义图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $L_N = (l_{ij})_{N \times N}$  为  $L_N = D^{in} - A$ , 其中  $L_N$  的特征值可以排序为  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$ .  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$  是  $L_N$  的零特征值对应的左特征向量.  $E = \text{diag}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$  是以  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  为对角线元素的对角矩阵.

### 2.3 凸函数与投影算子

给定集合  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , 若  $\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega$  和  $a \in (0, 1)$ , 都有  $ax + (1-a)y \in \Omega$ , 则  $\Omega$  为凸集. 连续可微函数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  是  $c$ -强凸函数 ( $c > 0$ ) 当且仅当  $(x-y)^T (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \geq c \|x-y\|^2, \forall x, y \in \Omega$ . 函数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  是  $C$ -Lipschitz 连续的当且仅当  $\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x-y\|, \forall x, y \in \Omega$ , 其中  $C > 0$ . 若  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  是一个凸集, 对于  $x \in \Omega$ , 集合  $\Omega$  在  $x$  上的法锥为  $N_\Omega(x) = \{v \in \mathbb{R}^m | v^T(y-x) \leq 0, \forall y \in \Omega\}$ . 对于任意向量  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $x$  在闭凸集  $\Omega$  上的投影为  $P_\Omega(x) = \arg \min_{y \in \Omega} \|x-y\|$ . 根据投影的定义, 可得如下不等式:

$$(x - P_\Omega(x))^T (y - P_\Omega(x)) \leq 0, \forall y \in \Omega. \quad (1)$$

### 2.4 微分包含

考虑微分方程

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(x(t)), x(0) = x_0, t \geq 0, \quad (2)$$

其中  $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个集值映射. 考虑问题(2), 设  $V$  是一个局部李普希兹连续的函数,  $\partial V(x)$  是  $V$  在  $x$  处的Clarke广义梯度.  $V$  的集值李导可以定义为

$$\mathcal{L}_\mathcal{F} V(x) \triangleq \{a \in \mathbb{R}, a = p^T v, p \in \partial V(x), v \in \mathcal{F}(x)\}.$$

### 3 问题描述

考虑一组由  $N$  个智能体组成的如下分布式问题:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x), x \in \Omega = \bigcap_{i=1}^N \Omega_i \subset \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

其中:  $x$  是所有智能体共同享有的决策变量,  $f_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是智能体的局部决策函数,  $\Omega_i$  是每个智能体的凸闭集合约束,  $i = 1, \dots, N$ . 在这种情况下, 所有智能体都需要以分布式方式协作地找到问题(3)的最优解. 为求解优化问题(3), 给出以下必要假设:

**假设 1** 对于  $i \in \nu$ ,  $f_i(x): \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$  是  $m_i$ -强凸函数, 其中  $m_i > 0$ .

**假设 2** 对于  $i \in \nu$ , 梯度  $\nabla f_i: \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$  是  $M_i$ -Lipchitz的, 其中  $M_i > 0$ .

**假设 3** 存在一个内点  $x$ , 使得  $x \in \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$ .

**注 1** 假设1-3保证了问题(3)解的存在性和唯一性.

**假设 4** 有向图  $G$  是强连通的.

下面的引理将在主要结果中使用.

**引理 1**  $\forall u \in K, w \in N_K(u)$ , 当且仅当  $P_K(u+w) = u$ .<sup>[24]</sup>

**引理 2** 假设  $G$  是带有Laplace矩阵的强连通图, 则存在一个与零特征值相关的左特征向量, 满足两个等式:  $\xi^T L_N = 0_N^T$  和  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ .

基于假设1和假设2, 并利用文献[30]中的结果, 可以通过引理3得出问题(3)的最优性条件.

**引理 3** 在假设1-3成立的条件下,  $x^* \in \Omega$  是问题(3)的最优解, 当且仅当存在  $x^* = 1_N \otimes x^* \subset \mathbb{R}^{Nn}$  和  $y^* \subset \mathbb{R}^{Nn}$  使得下式成立<sup>[31]</sup>:

$$0_n \in \nabla f(x^*) + N_\Omega(x^*). \quad (4)$$

**引理 4** 假设  $f = f_1 + f_2$ , 其中  $f_1: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$  和  $f_2: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数, 如果存在一个点  $x_0 \in \text{dom} f$ , 使得  $f_1$  在  $x_0$  处是连续的, 则对于任意  $x \in \text{dom} f$ , 都有  $\partial f(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$ <sup>[31]</sup> ( $\text{dom} f$  是  $f$  的定义域).

**引理 5** 假设  $X = X_1 \cap \dots \cap X_m$ , 其中  $X_i$  是闭凸集,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 令  $x \in X$  如果  $\text{int} X_1 \cap \text{int} X_2 \cap \dots \cap \text{int} X_m \neq \emptyset$ , 则  $N_X(x) = N_{X_1}(x) + N_{X_m}(x)$ .

### 4 算法设计和收敛性分析

本节提出了一种连续时间分布式投影梯度算法来解决(3). 有向通信网络是非平衡的, 每个智能体都可以获得来自其邻居的状态信息. 目标是使目标函数  $\min f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x)$  最小化的同时, 所有的智能体达到一致状态.

对智能体实施以下算法:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) \in P_{\Omega_i}(x_i(t) - \sum_{j \in N_{in}^i} a_{ij}(y_j(t) - x_j(t)) - \xi_i^{-1} \nabla f_i(x_i(t))) - x_i(t), \\ \dot{y}_i(t) = \sum_{j \in N_{in}^i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)), \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\nabla f_i(x_i(t))$  是  $f_i(x_i(t))$  的梯度,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$  满足  $\xi^T L_N = 0_N^T$  和  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ ,  $\xi_i$  是  $\xi$  的第  $i$  个分量.  $\Omega_i$  是智能体  $i$  的约束集. 令  $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $E = \text{diag}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ ,  $\nabla f(x) = \text{col}(\nabla f_1(x_1), \nabla f_2(x_2), \dots, \nabla f_N(x_N))$ ,  $L =$

$L_N \otimes I_n$ , 然后可以把系统(5)重写为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)), \quad (6)$$

其中

$$\mathcal{F}(x, y) = \begin{bmatrix} P_\Omega(\mathbf{x} - Ly - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x})) - \mathbf{x} \\ Lx \end{bmatrix}.$$

**注 2** 文献[32-33]要求每个智能体同时获取其内邻居和出度信息, 本文提出的算法(5)避免了这个限制; 与文献[7,20]不同, 本文不要求有向通信网络一定是权重平衡的,  $\xi_i$ 的加入是为了消除有向网络的不平衡性.

为了证明系统(6)的有效性, 第1步是刻画它的平衡点集与问题(3)的最优解集之间的关系. 下面的引理给出了系统(6)的平衡点与问题(3)的最优解之间的关系.

**引理 6** 在假设1-4成立的条件下,  $\text{col}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  是系统(6)的一个平衡点, 当且仅当  $\mathbf{x}^*$  是问题(3)的最优解, 其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ .

**证** 由于  $\text{col}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  是系统(6)的一个平衡点, 因此有下式成立:

$$0_{Nn} \in \{p : p = \mathbf{x}^* - P_\Omega(\mathbf{x}^* - Ly^* - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*))\}, \quad (7a)$$

$$Lx^* = 0_{Nn}. \quad (7b)$$

由引理3可知,  $x^*$  是问题(3)的最优解当且仅当下式成立:

$$0_n \in \nabla f(\mathbf{x}^*) + N_\Omega(\mathbf{x}^*). \quad (8)$$

由假设1可知  $f_i(\cdot), i=1, 2, \dots, N$  是强凸函数, 且  $x \in \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$ , 由引理4-5可知,  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^N \nabla f_i(x^*)$  并且  $N_\Omega(x^*) = \sum_{i=1}^N N_{\Omega_i}(x^*)$ , 所以只需证明式(7)成立当且仅当式(8)成立.

假设式(7)成立, 因图  $G$  是强连通的, 由式(7b)成立可知存在  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^* \in \mathbb{R}^{Nn}$ . 由引理1可知  $0_{Nn} = \mathbf{x}^* - P_\Omega(\mathbf{x}^* - Ly^* - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*))$  成立, 当且仅当下式成立:

$$-Ly^* - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*) \in N_\Omega(\mathbf{x}^*), \quad (9)$$

即式(7a)成立当且仅当存在  $\nabla f_i(x^*) \in \nabla f(x^*)$  使得

$$\begin{aligned} & -\sum_{j \in N_{in}^i} a_{ij} (y_i^* - y_j^*) - \\ & (\xi_i^{-1} \otimes I_n) \nabla f_i(x^*) \in N_{\Omega_i}(x^*). \end{aligned} \quad (10)$$

给式(9)的左侧乘以  $(E \otimes I_n)$ , 因为  $(E \otimes I_n) Ly^* = 0$ , 所以下式成立:

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) \in N_\Omega(\mathbf{x}^*), \quad (11)$$

则  $0_n \in \nabla f(\mathbf{x}^*) + N_\Omega(\mathbf{x}^*)$  成立.

相反地, 假设式(8)成立, 令  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ , 因为  $\mathbf{1}_N^T L_N = \mathbf{0}_N^T$ , 则式(7b)成立. 由式(8)可知, 存在  $\nabla f_i(x^*)$ , 使得

$$-\sum_{i=1}^N \nabla f_i(x^*) \in \sum_{i=1}^N N_{\Omega_i}(x^*). \quad (12)$$

给上式左乘  $\xi_i^{-1}$  有下式成立:

$$-\sum_{i=1}^N (\xi_i^{-1}) \nabla f_i(x^*) \in \sum_{i=1}^N N_{\Omega_i}(x^*). \quad (13)$$

选择向量  $p_i(x^*) \in N_{\Omega_i}(x^*), i=1, 2, \dots, N$ , 使得

$$-\sum_{i=1}^N (\xi_i^{-1}) \nabla f_i(x^*) = \sum_{i=1}^N p_i(x^*). \quad (14)$$

定义向量

$$m_i(x^*) = p_i(x^*) + \xi_i^{-1} \nabla f_i(x^*), \quad (15)$$

则

$$\sum_{i=1}^N m_i(x^*) = \mathbf{0}_n. \quad (16)$$

由引理2可知,  $L$  的特征值可以排序为  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$ , 因此存在正交向量  $\mathbf{1}_N$  和  $\eta_i, i=2, 3, \dots, N$ , 使得  $L\mathbf{1}_N = 0, L\eta_i = \lambda_i \eta_i$ . 集合  $\ker(L)$  和  $\text{range}(L)$  形成了  $\mathbb{R}^{Nn}$  的正交分解, 其中  $\ker(L)$  是矩阵  $L$  的核,  $\text{range}(L)$  是矩阵  $L$  的值域.

定义向量  $m(x^*) = [m_1(x^*)^T \dots m_N(x^*)^T]^T \in \mathbb{R}^{Nn}$ , 对于任意  $\mathbf{x} = \mathbf{1}_N \otimes x \in \ker(L)$ , 有

$$m(x^*)^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N m_i(x^*)^T x = 0, \quad (17)$$

因此存在  $m(x^*) \in \text{range}(L)$ , 即存在  $y^* \in \mathbb{R}^{Nn}, x^* \in \mathbb{R}^{Nn}$ , 使得以下两个式子成立:

$$m(x^*) = -Ly^*, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & -(\xi_i^{-1}) \nabla f_i(x^*) - \sum_{j \in N_{in}^i} a_{ij} (y_i^* - y_j^*) = \\ & -(\xi_i^{-1}) \nabla f_i(x^*) + m(x^*) = p_i(x^*) \in N_{\Omega_i}(x^*), \end{aligned} \quad (19)$$

即存在  $((E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*)) \in \nabla f(\mathbf{x}^*), y^* = ((y_1^*)^T, \dots, (y_N^*)^T)^T \in \mathbb{R}^{Nn}$ , 使得下式成立:

$$-(E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*) - Ly^* \in N_\Omega(\mathbf{x}^*). \quad (20)$$

由引理1可得

$$\mathbf{x}^* = P_\Omega(\mathbf{x}^* - Ly^* - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*)), \quad (21)$$

由此易得式(7a)成立. 证毕.

根据引理3, 从系统(6)的平衡点可以得到问题(3)的最优解. 因此, 只需要证明系统(6)的收敛性.

**定理 1** 在假设1-4成立的条件下, 如果存在参数  $c$  满足如下不等式:

$$\frac{c}{\xi_{\max}} \geq \lambda_{\max}(L^T L), \quad (22)$$

其中  $c$  是  $c_i (i \in \nu)$  中的最小值. 则  $\text{col}(\mathbf{x}, y)$  渐近收敛到系统(6)的平衡点  $\text{col}(\mathbf{x}^*, y^*)$ , 其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ,  $x^*$  是问题(3)的最优解.

**证** 构造如下Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, y) = & (E^{-1} \otimes I_n)^T (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) - \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}^*)) + \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L(y - y^*) + \\ & \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \frac{1}{2} \|y - y^*\|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

令  $\nabla f(\mathbf{x})$  满足  $\dot{\mathbf{x}} = P_{\Omega}(\mathbf{x} - Ly - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x})) - \mathbf{x}$ , 结合式(21)可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = P_{\Omega}(\mathbf{x} - Ly - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x})), \\ \mathbf{x}^* = P_{\Omega}(\mathbf{x}^* - Ly^* - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*)). \end{cases} \quad (24)$$

由引理1可得

$$\begin{cases} -Ly - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}} \in N_{\Omega}(\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}), \\ -Ly^* - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*) \in N_{\Omega}(\mathbf{x}^*), \end{cases} \quad (25)$$

有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T (-Ly - (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}) - \\ & \dot{\mathbf{x}} + Ly^* + (E^{-1} \otimes I_n) \nabla f(\mathbf{x}^*)) \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

令  $g(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}^*)$ , 经过对上式的一些简单计算, 可以得到

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^* + (E^{-1} \otimes I_n)g(\mathbf{x}) + L(y - y^*)) \dot{\mathbf{x}} \leq \\ & -\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T (E^{-1} \otimes I_n)^T g(\mathbf{x}) - \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L(y - y^*). \end{aligned} \quad (27)$$

由  $f$  的强凸性

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T (E^{-1} \otimes I_n)^T g(\mathbf{x}) \geq \\ & \frac{c}{\xi_{\max}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

所以式(27)可以简化为

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^* + (E^{-1} \otimes I_n)g(\mathbf{x}) + L(y - y^*)) \dot{\mathbf{x}} \leq \\ & -\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - \frac{c}{\xi_{\max}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 - \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L(y - y^*). \end{aligned} \quad (29)$$

$V(\mathbf{x}, y)$  关于  $\mathbf{x}$  的广义梯度为

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, y) = & \{p : p = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* + (E^{-1} \otimes I_n)g(\mathbf{x}) + \\ & L(y - y^*), g(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}^*)\}. \end{aligned} \quad (30)$$

$V(\mathbf{x}, y)$  关于  $y$  的梯度为

$$\nabla_y V(\mathbf{x}, y) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L + (y - y^*), \quad (31)$$

则  $V$  关于系统(6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, y) = & p^T \dot{\mathbf{x}} + \nabla_y V(\mathbf{x}, y) \dot{y}, \\ \forall p \in & \partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, y), \end{aligned} \quad (32)$$

其中  $p = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* + (E^{-1} \otimes I_n)g(\mathbf{x}) + L(y - y^*)$ . 因此,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, y) = & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^* + (E^{-1} \otimes I_n)g(\mathbf{x}) + \\ & L(y - y^*)) \dot{\mathbf{x}} + ((\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L + \\ & (y - y^*)) L(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T. \end{aligned} \quad (33)$$

由式(29)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, y) \leq & -\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - \frac{c}{\xi_{\max}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 - \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L(y - y^*) + \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L^T L(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L(y - y^*) \leq \\ & -\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - \frac{c}{\xi_{\max}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T L^T L(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq \\ & -\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - \left(\frac{c}{\xi_{\max}} - \lambda_{\max}(L^T L)\right) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

由不等式(22)可知  $\dot{V} \leq 0$ . 记  $\varphi = \text{col}(\mathbf{x}, y)$ , 因此, 对于  $t \geq 0$ , 可以得到  $0 \leq V(\varphi(t)) \leq V(\varphi(0)) \leq +\infty$ , 可以注意到,  $V$  是无界的, 那么对于任何初始点  $\varphi(0)$ , 状态  $\varphi(t)$  都是有界的, 这意味着对于  $t \in [0, +\infty]$ ,  $\varphi(t)$  是存在的. 由LaSalle不变集原理, 对于任意初始点  $(x_0, y_0)$ , 系统(5)的轨迹将收敛于包含在集合  $S_0 = \{\varphi \in \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn} | \dot{V} = 0\}$  中的最大不变集  $M$ .  $\dot{V} = 0$  表示  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  和  $L\mathbf{x} = 0$ . 因此, 任意点  $(x, y) \in M$  都是系统(6)的平衡点,  $x^*$  是问题(3)的最优解. 定理1的结论成立. 证毕.

**注 3** 在收敛性分析中, 采用了向量的直和运算和克罗内克矩阵代数的性质, 为处理权重不平衡有向网络生成的非对称拉普拉斯矩阵提供了新的思路. 这与文献[34]中采用的正交变换不同.

**注 4** 如不等式(22)所示, 算法的有效性依赖于左特征向量的最大值  $\xi_{\max}$ , 最小的强凸常数  $c$  和矩阵  $L^T L$  的最大的特征值  $\lambda_{\max}(L^T L)$ . 在运行算法(5)之前, 可以采用一些分布式算法<sup>[35-36]</sup>对其进行估计.

**注 5** 本文利用左零特征向量消除有向图的不平衡性, 对于左特征向量还可以进行以下分布式计算和估计说明:

令

$$v_i = - \sum_{j \in N_{in}^i} a_{ij} (v_i - v_j), \quad (35)$$

其中  $v_i \in \mathbb{R}^N, i = 1, 2, \dots, N$ , 可以用  $\nabla f_i(x)/v_{ii}(t)$  这一项代替算法(5)中的  $\xi_i^{-1} \nabla f_i(x)$  最小化目标函数, 其中  $v_{ii}(t)$  是  $v_i(t) \in \mathbb{R}^N$  的第  $i$  个分量,  $v_{ii}(t)$  的作用是用来估计左特征向量. 令  $\xi = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_N)^T \in \mathbb{R}^N$  是拉普拉斯矩阵的左零特征向量, 令  $\bar{v}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i v_i(t)$ , 由式(35)可知  $\dot{\bar{v}}(t) = 0$ , 这表明  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $v_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \xi_i v_i(0)$ , 因此,  $v_{ii}(t) \rightarrow \xi_i$ .

### 5 数值仿真

本节将给出两个数值例子验证所提算法的有效性. 考虑由10个智能体构成的通信网络. 假设有向图的邻接矩阵  $A$  如下:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**例 1** 智能体的10个局部目标函数  $f_i(x) \in \mathbb{R}^2$  给定如下:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5e^{-0.5x_1} + 0.4e^{0.3x_2}, \\ f_2(x) = (x_2 - 4)^2, \quad f_4(x) = x_1^2 + e^{0.1x_2}, \\ f_3(x) = 0.5x_1^2 \ln(1 + x_1^2) + x_2^2, \\ f_5(x) = \ln(e^{-0.1x_1} + e^{0.3x_1}) + 0.1x_2^2, \\ f_6(x) = \frac{x_1^2}{\ln(2+x_1^2)}, \quad f_9(x) = \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2+1}} + 0.1x_2^2, \\ f_7(x) = 0.2e^{-0.2x_1} + 0.4e^{0.4x_2}, \\ f_8(x) = x_1^4 + 2x_2^2 + 2, \quad f_{10}(x) = (x_1 + 2)^2. \end{cases} \quad (36)$$

上述局部目标函数参考文献[37], 智能体的局部闭凸集给定为  $\Omega = \{x_i \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 - 4 \leq 0\}, i = 1, \dots, 10$ . 显然,  $f_i(x)$  是二次连续可微的,  $f(x)$  也是二次连续可微的. 仿真中所有智能体的初始值都是随机设置的. 系统的状态轨迹由图1和图2给出, 可以看出, 智能体的10条轨道一致收敛到优化问题(3)的全局最优解  $x^* = (x_{i1}^* \ x_{i2}^*)^T = (3.047 \ 4.569)^T$ , 从而验证了算法(5)的有效性.

**例 2** 有向图的网络拓扑结构和智能体的局部闭凸约束同例1, 本文给定智能体的局部目标函数如下:

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \\ f_2(x) = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \\ f_3(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2, \\ f_4(x) = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2, \\ f_5(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}x_2^4, \\ f_6(x) = \frac{1}{4}(x_1 + 1)^4 + \frac{1}{4}x_2^4, \\ f_7(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}(x_2 + 1)^4, \\ f_8(x) = \frac{1}{4}(x_1 + 1)^4 + \frac{1}{4}x_2^4, \\ f_9(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \\ f_{10}(x) = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2. \end{cases} \quad (37)$$

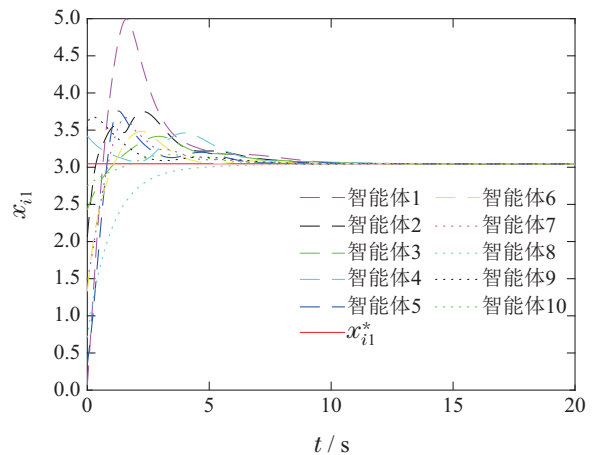


图 1 例1中的系统状态轨迹  $x_{i1}$

Fig. 1 Trajectory of states  $x_{i1}$  in Example 1

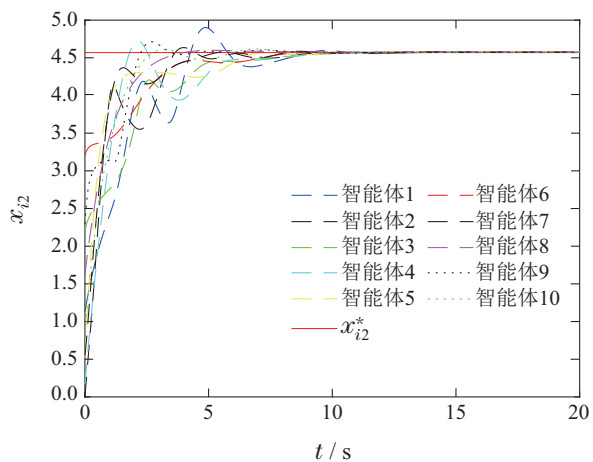


图 2 例1中的系统状态轨迹  $x_{i2}$

Fig. 2 Trajectory of states  $x_{i2}$  in Example 1

上述局部目标函数参考文献[25]. 显然  $f(x) =$

$\sum_{i=1}^N f_i(x)$  是二次连续可微的, 容易得出凸优化问题(3)的全局最优解  $x^* = (3.624 \ 3.587)^T$ , 仿真中所有智能体的初始值都是随机设置的. 系统的状态轨迹由图3和图4给出, 可以看出, 智能体的10条轨迹一致收敛到上述优化问题的最优解, 从而验证了算法(5)的有效性.

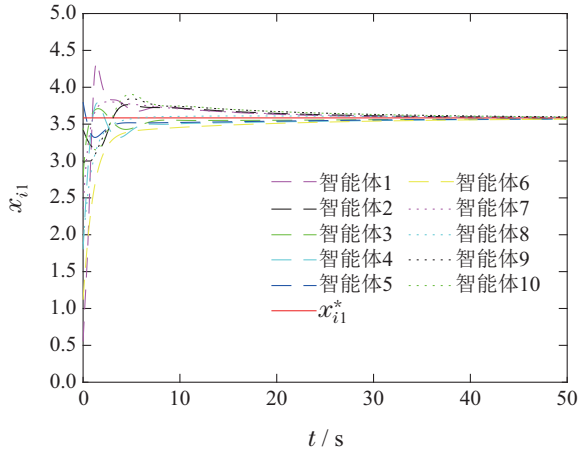


图3 例2中的系统状态轨迹  $x_{i1}$

Fig. 3 Trajectory of states  $x_{i1}$  in Example 2

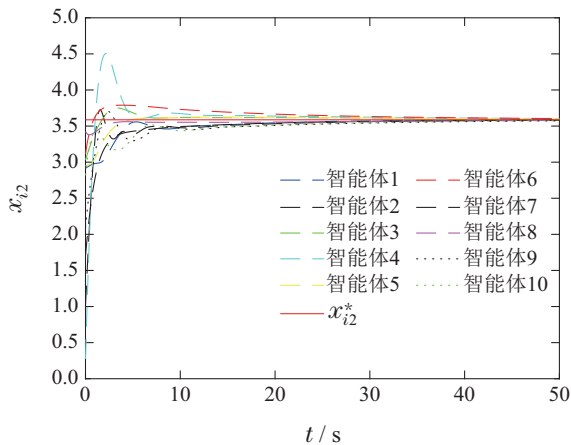


图4 例2中的系统状态轨迹  $x_{i2}$

Fig. 4 Trajectory of states  $x_{i2}$  in Example 2

## 6 结论

本文提出了一种分布式投影梯度连续时间协调算法, 解决了权重不平衡网络在局部集约束下的分布式优化问题. 通过适当的参数选择, 在局部目标函数具有利普希茨梯度的强凸性假设下时, 利用李亚普诺夫函数的稳定性理论和拉萨尔不变集原理, 证明了该算法的渐近收敛性. 最后, 通过数值仿真进一步验证了该算法的有效性. 未来将进一步探讨有向网络下带等式或不等式约束的分布式连续时间优化算法设计. 寻找更好的方法代替投影算子和拉普拉斯矩阵的左零特征向量设计算法来消除有向图的不平衡性也是笔者未来的研究方向.

## 参考文献:

- [1] HONG Yiguang, ZHANG Yanqiong. Distributed optimization: Algorithm design and convergence analysis. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 850 – 857. (洪奕光, 张艳琼. 分布式优化: 算法设计和收敛性分析. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 850 – 857.)
- [2] NEDIC A, OZDAGLAR A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48 – 61.
- [3] NEDIC A, OZDAGLAR A, PARRILO P. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 922 – 938.
- [4] ZOU Y, HUANG B, MENG Z. Distributed continuous-time algorithm for constrained optimization of networked Euler-Lagrange systems. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8(2): 1034 – 1042.
- [5] LIU H, ZHENG W, YU W. Continuous-time algorithms based on finite-time consensus for distributed constrained convex optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 67(5): 2552 – 2559.
- [6] PENG L, WEI R, SONG Y, et al. Distributed optimization with the consideration of adaptivity and finite-time convergence. *American Control Conference*. Portland, Oregon(US): IEEE, 2014: 3177 – 3182.
- [7] LU K, JING G, WANG L. Online distributed optimization with strongly pseudoconvex-sum cost functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 65(1): 426 – 433.
- [8] LONG Yushan, LIU Shuai, XIE Lihua. Distributed stochastic convex optimization with set constraints. *Chinese Science: Mathematics*, 2016, 46(10): 1487 – 1498. (龙昱岫, 刘帅, 谢立华. 带集合约束的分布式随机凸优化. *中国科学: 数学*, 2016, 46(10): 1487 – 1498.)
- [9] ZHU M, MARTINEZ S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 151 – 164.
- [10] WANG J, ELIA N. A control perspective for centralized and distributed convex optimization. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, FL, USA: IEEE, 2011: 3800 – 3805.
- [11] YI P, HONG Y, LIU F. Distributed gradient algorithm for constrained optimization with application to load sharing in power systems. *Systems & Control Letters*, 2015, 83(9): 45 – 52.
- [12] YANG Q, CHEN G, REN J. Continuous-Time algorithm For distributed constrained optimization over directed Graphs. *International Conference on Control and Automation*. Edinburgh, UK: IEEE, 2019: 1020 – 1025.
- [13] CHEN G, YANG M, HONG Y, et al. Distributed algorithm for epsilon-generalized Nash equilibria with uncertain coupled constraints. *Automatica*, 2021, 123: 109313.
- [14] CHERUKURI A, CORTES J. Distributed generator coordination for initialization and anytime optimization in economic dispatch. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2015, 2(3): 226 – 237.
- [15] CHERUKURI A, CORTES J. Initialization-free distributed coordination for economic dispatch undervarying loads and generator commitment. *Automatica*, 2016, 74: 183 – 193.
- [16] YI P, HONG Y, LIU F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems. *Automatica*, 2016, 74(12): 259 – 269.
- [17] ZHANG Z, CHOW M. Convergence analysis of the incremental cost consensus algorithm under different communication network topologies in a smart grid. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2012, 27(4): 1761 – 1768.



- [18] YI Peng, HONG Yiguang. Distributed cooperative optimization and its application. *Chinese Science: Mathematics*, 2016, 46(10): 1547 – 1564.  
(衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用. 中国科学: 数学, 2016, 46(10): 1547 – 1564.)
- [19] XIE Pei, YOU Keyou, HONG Yiguang, et al. Research progress of networked distributed convex optimization algorithms. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 918 – 927.  
(谢佩, 游科友, 洪奕光, 等. 网络化分布式凸优化算法研究进展. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 918 – 927.)
- [20] ZHOU H, ZENG X, HONG Y. Adaptive exact penalty design for constrained distributed optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4661 – 4667.
- [21] LI Z, DING Z, SUN J, et al. Distributed adaptive convex optimization on directed graphs via continuous-time algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(5): 1434 – 1441.
- [22] BESBES O, GUR Y, ZEEVI A. Non-stationary stochastic optimization. *Operations Research*, 2015, 63(5): 1227 – 1244.
- [23] JADBABAIE A, RAKHLIN A, SHAHRAMPOUR S. Online optimization: competing with dynamic comparators. *Proceedings of Artificial Intelligence and Statistics*. San Diego, California, USA: IEEE, 2015: 398 – 406.
- [24] ZHU Y, WEN G, YU W, et al. Continuous-time distributed proximal gradient algorithms for nonsmooth resource allocation over general digraphs. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2021, 8(2): 1733 – 1744.
- [25] CHEN Z, MA J, WANG X, et al. Distributed optimization of continuous-time multi-agent systems over directed graph. *IEEE 14th International Conference on Control and Automation*. Anchorage, AK, USA: IEEE, 2018: 1 – 6.
- [26] GUO Z, CHEN G. Fully distributed optimal position control of networked uncertain Euler-Lagrange systems under unbalanced digraphs. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(10): 10592 – 10603.
- [27] NEDIC A, OLSHEVSKY A. Distributed optimization over time-varying directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 601 – 615.
- [28] NEDIC A, OLSHEVSKY A, SHI W. Achieving geometric convergence for distributed optimization over time-varying graphs. *SIAM Journal on Optimization*, 2016, 27(4): 1 – 29.
- [29] LI H, LU Q, HUANG T. Distributed projection subgradient algorithm over time-varying general unbalanced directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(3): 1309 – 1316.
- [30] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [31] ANDRZEJ R. *Nonlinear Optimization*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2006.
- [32] XI C, XIN R, KHAN U A. ADD-OPT: Accelerated distributed directed optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(5): 1329 – 1337.
- [33] TOURI B, GHAREISFARD B. Continuous-time distributed convex optimization on time-varying directed networks. *IEEE 55th Conference on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada: IEEE, 2016: 862 – 866.
- [34] KIA S, CORTES J. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication. *Automatica*, 2015, 55(5): 254 – 264.
- [35] REN W, BEARD R W. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control*. London, U.K: Springer-Verlag, 2008.
- [36] CHARALAMBOUS T, RABBAT M G, JOHANSSON M, et al. Distributed finite-time computation of digraph parameters: Left-eigenvector, out-degree and spectrum. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2016, 3(2): 137 – 148.
- [37] ZHU Y, YU W, WEN G. Continuous-time coordination algorithm for distributed convex optimization over weight-unbalanced directed networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 66(7): 1202 – 1206.

#### 作者简介:

**杨正全** 副教授, 目前研究方向为多智能体系统控制与分布式优化, E-mail: zquanyang@163.com;

**杨秀伟** 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统控制与分布式优化, E-mail: 17862664510@163.com;

**陈增强** 博士生导师, 目前研究方向为多智能体系统控制、智能预测控制与智能优化计算, E-mail: chenzq@nankai.edu.cn.