

# 具有量化输入和边界扰动的柔性臂边界振动滑模控制

马艺飞, 楼旭阳<sup>†</sup>, 吴炜

(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 本文针对量化输入和有界扰动下柔性臂系统的振动抑制和边界滑模控制器设计问题开展研究. 柔性臂的动态特性由偏微分方程表示的分布参数模型描述. 对于具有未知有界干扰的柔性臂系统, 其主要控制目标是减小干扰的影响, 使柔性臂到达期望角度并同时抑制系统的振动. 首先, 利用边界输出信号构造滑模函数和滑模面. 其次, 结合所构造的滑模面, 设计一种边界滑模控制器, 并利用算子半群理论证明了闭环系统的适应性. 所提出的边界滑模控制策略保证了系统状态能够在有限时间内到达滑模面, 并且系统状态在滑模面上是指数收敛的. 最后, 通过物理实验验证了所提出控制策略的有效性.

**关键词:** 柔性臂; 滑模控制; 边界控制; 扰动; 量化输入

**引用格式:** 马艺飞, 楼旭阳, 吴炜. 具有量化输入和边界扰动的柔性臂边界振动滑模控制. 控制理论与应用, 2023, 40(7): 1190 – 1198

DOI: 10.7641/CTA.2022.20259

## Boundary vibration sliding mode control of a flexible arm with quantized input and boundary disturbance

MA Yi-fei, LOU Xu-yang<sup>†</sup>, WU Wei

(School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** In this paper, the problems of vibration suppressing and boundary sliding mode control of a flexible arm system with quantized input and bounded disturbance are addressed. The dynamic characteristic of the flexible arm is described by a distributed parameter model in the form of partial differential equations. For a flexible arm system with unknown bounded disturbance, the main control objective is to reduce the influence of the disturbance such that the flexible arm can reach the desired angular position and suppress the vibration of the system, simultaneously. Firstly, the sliding mode function and the sliding surface are constructed by using the boundary signals. Then, a boundary sliding mode controller is proposed and the well-posedness of the closed-loop system is proven through the operator semigroup theory. Under the proposed boundary sliding mode controller, the system state can reach the sliding surface in finite time and the exponential convergence of the system state is guaranteed on the sliding surface. Finally, the effectiveness of the proposed control strategy is verified through physical experiments.

**Key words:** flexible arm; sliding mode control; boundary control; disturbance; input quantization

**Citation:** MA Yifei, LOU Xuyang, WU Wei. Boundary vibration sliding mode control of a flexible arm with quantized input and boundary disturbance. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(7): 1190 – 1198

## 1 引言

近年来, 由于柔性结构系统具有质量轻、精度高、耗能低、操作空间大等优点, 被广泛应用于机器人领域<sup>[1]</sup>、航天领域<sup>[2]</sup>、工业领域<sup>[3]</sup>. 在这些领域, 对于精度的要求较高. 然而, 柔性系统由于本身的振动特性存在, 运动过程中极易引起弹性振动, 使得柔性系

统在运动过程中的定位精度下降, 甚至降低系统的可靠性. 因此针对柔性系统的振动控制问题研究是目前研究的热点.

柔性臂是一类典型的柔性结构系统. 目前, 越来越多的学者都参与到柔性臂系统的建模与振动控制方面的研究. 关于用偏微分方程(partial differential equa-

收稿日期: 2022-04-12; 录用日期: 2022-08-18.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: Louxy@jiangnan.edu.cn.

本文责任编辑: 李世华.

江苏省自然科学基金项目(BK20201340), 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX20.1768)资助.

Supported by the the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20201340) and the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Province (KYCX20.1768).

tions, PDEs)描述的柔性臂系统的边界控制已有很多研究结果. 在文献[4]中, 采用自适应边界控制对具有参数不确定性的柔性臂系统进行了研究. 在文献[5]中, 考虑了柔性臂的输入非线性, 并设计了一个边界控制器来处理输入齿隙. 此外, 还研究了移动双柔性臂的协同控制, 同时文献[6]还讨论了输出限制和执行器故障. 随后, 基于神经网络<sup>[7-8]</sup>和滤波控制<sup>[9]</sup>的柔性臂控制方法也逐渐被探索. 虽然这些研究在偏微分方程描述的柔性臂系统的振动控制方面做出了一些重要的成果, 但在鲁棒边界振动控制方面还没有取得多少进展.

实际应用中常常存在外部干扰, 它可能会破坏系统的稳定性. 对于应用精度要求很高的柔性臂来说, 处理外部干扰是非常必要的. 近几年, 学者们提出了一些很好的方法来处理未知干扰. 在文献[10]中, 针对柔性臂系统的输入饱和和外部干扰, 提出了一种边界控制器并采用扰动观测器方法估计未知边界扰动. 在文献[11-12]中, 针对含有末端扰动的柔性臂系统, 通过设计的干扰观测器来估计边界干扰, 并且控制器也作用在末端. 滑模控制作为一种有效的鲁棒控制方法, 对系统不确定性和干扰抑制具有很强的鲁棒性. 有关柔性系统的滑模控制已经有较多的成果<sup>[13-14]</sup>. 在文献[15]中, 针对具有干扰的柔性梁系统, 考虑了模糊滑模控制. 在文献[16]中, 分别利用干扰观测器和滑模控制研究了柔性梁系统的边界反馈控制, 此时控制器仍然作用在末端. 对于柔性臂的固定端控制, 滑模控制也被研究了用来处理扰动<sup>[13]</sup>. 文献[17]针对柔性臂系统提出了一种新的自适应滑模控制. 然而, 上述结果中关于柔性臂的模型是由常微分方程(ordinary differential equations, ODEs)所描述的. 有限维模型会导致建模误差和控制溢出问题.

在实际控制系统中, 由于传感器和执行器的精度的限制, 所采集到的信号必须通过量化才能传输到被控系统中, 这就需要量化器解决以上问题. 量化器可以看作是一个将连续信号转换为离散信号的算子. 在量化控制系统中, 需要对控制输入和测量输出进行量化. 当控制输入信号经过量化器时, 相当于在控制器的设计中引入了强非线性, 这不利于系统性能, 甚至可能导致系统不稳定. 因此许多研究者对控制系统各种不同量化方法分析和设计进行了研究. 值得注意的是, 近年来, 针对具有量化输入的柔性臂系统已存在较多的研究成果. 文献[18]针对具有量化输入的双连杆柔性臂的稳定性问题进行了研究. 文献[19]进一步与事件触发控制结合, 研究了柔性臂的事件触发量化控制问题, 并保证了系统状态是一致有界的. 文献[20]针对具有输入信号量化的三维柔性梁系统, 设计了一种自适应边界控制方案, 以抑制梁的振动. 在以上针对柔性臂系统的研究中, 文献[19-20]未考虑边界

扰动的影响, 同时虽然考虑了自由端负载, 但固定端与自由端同时施加控制力, 尤其是文献[20], 控制力仅仅作用在自由端. 在实际应用中, 自由端施加控制力是较难实现的.

受上述研究成果的启发, 本文的目的是针对具有量化输入和边界扰动的柔性臂系统设计边界滑模控制器, 以抑制具有未知有界干扰的柔性臂的振动. 本文的贡献包括以下3点:

- 1) 针对具有量化输入和边界扰动的柔性臂系统, 提出了边界滑模控制器来处理量化误差和边界扰动;
- 2) 在所设计的边界滑模控制器下, 证明了滑模面的可达性, 并分别通过算子半群理论和Lyapunov稳定性理论证明了闭环系统的适定性以及指数收敛;
- 3) 所设计的边界滑模控制器是基于PDE模型并不是有限维ODE模型, 只需测量边界信号, 与文献[2, 9]相比, 模型更精确, 并且控制力不是作用于自由端, 与文献[19-20]相比, 更实用.

**符号说明:** 为了描述方便, 本文用 $(\cdot)_t = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$ 和 $(\cdot)_x = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ 分别表示对时间 $t$ 和位置 $x$ 的偏导;  $\mathcal{H}^n(\omega)$ 表示一类Sobolev空间并且函数本身及其 $n$ 阶导数在区域 $\omega$ 是平方可积的;  $\mathcal{L}^p(0, L)$ 表示一类Lebesgue可测空间范数定义为 $\|g\|_{\mathcal{L}^p} = (\int_0^\infty |g|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ ;  $\mathcal{R}^n$ 表示 $n$ 维Euclidean空间;  $\mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{X})$ 表示从 $[0, +\infty)$ 到 $\mathcal{X}$ 的连续函数空间; 此外,  $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^+$ 分别表示实数集和正实数集.

## 2 问题描述

图1展示的是柔性臂的简单示意图, 由图可以看出, 柔性臂的左端是固定的, 右端可以自由振动. 柔性臂的横向位移 $\omega(x, t)$ 由两部分组成: 在 $t$ 时刻轮毂的角位置 $\theta(t)$ 和在位置 $x$ 处,  $t$ 时刻柔性臂的弹性挠度 $z(x, t)$ . 当角度 $\theta(t)$ 相对较小时, 柔性臂总横向位移表达为 $\omega(x, t) = x\theta(t) + z(x, t)$ .

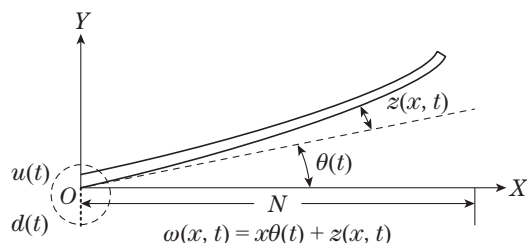


图1 柔性臂简单示意图

Fig. 1 A simplified diagram of a flexible arm

柔性臂系统被建模为一个四阶PDE方程以及对应的固定端和自由端边界条件<sup>[5]</sup>. 具有边界扰动的柔性臂系统方程及边界条件表达如下:

$$\rho\omega_{tt}(x, t) + E_I\omega_{xxxx}(x, t) + cz_t(x, t) = 0, \quad (1)$$

$$E_1\omega_{xx}(0, t) - I_h\ddot{\theta}(t) + v(t) + d(t) = 0, \quad (2)$$

$$z(0, t) = z_x(0, t) = \omega_{xx}(L, t) = \omega_{xxx}(L, t) = 0, \quad (3)$$

其中:  $(x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty)$ ,  $L, \rho, E_1, I_h, c$ 分别表示柔性臂的长度、密度、弯曲刚度、轮毂的转动惯量以及阻尼系数,  $v(t)$ 表示期望的连续控制输入,  $d(t)$ 表示柔性臂轮毂端的边界扰动.

经过量化器后的控制输入表达为

$$v(t) = Q(u(t)).$$

定义量化误差为

$$e(t) = Q(u(t)) - u(t). \quad (4)$$

本文所考虑的边界扰动是连续且光滑的并根据能量有限原则, 对边界扰动 $d(t)$ 做如下假设:

**假设 1**<sup>[11, 21-22]</sup> 考虑受到边界扰动的柔性臂系统, 假设边界扰动 $d(t) \in \mathbb{R}$ 是可积的并且存在一个正常数 $\bar{d} \in \mathbb{R}^+$ , 对于任意 $t \in [0, \infty)$ , 使得 $|d(t)| \leq \bar{d}$ 成立. 进一步假设边界扰动 $d(t)$ 是可导的并且其导数是有界的.

对于量化误差 $e(t)$ 文章做出如下假设:

**假设 2**<sup>[23]</sup> 假设量化误差 $e(t)$ 是有界的, 即存在一个正常数 $\Delta$ , 对于任意的 $t \in [0, \infty)$ , 使得 $|e(t)| \leq \Delta$ 成立.

为了方便之后的分析和推导, 文章给出以下引理:

**引理 1**<sup>[24]</sup> 考虑微分方程形式如下:

$$\beta\dot{\eta}(t) + \eta(t) = f(t) + g(t)\dot{s}(t),$$

其中:  $\beta$ 为常数,  $\eta(t), f(t), s(t)$ 表示 $n$ 维向量. 如果下列条件成立:

1) 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 属于 $\mathcal{H}^1(0, \infty)$ , 也就是函数本身及其一阶导数都是有界的;

2) 若 $s(t)$ 满足 $\|s(t)\| \leq \Lambda$ ,  $\Lambda$ 为正常数, 则可得到

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \Lambda/\beta \rightarrow 0}} \eta(t) = f(t).$$

**引理 2**<sup>[25]</sup> 令 $\kappa_1(x, t), \kappa_2(x, t) \in \mathbb{R}, (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty)$ , 则存在以下不等式:

$$\begin{aligned} \kappa_1(x, t)\kappa_2(x, t) &\leq |\kappa_1(x, t)| |\kappa_2(x, t)| \leq \\ &\frac{\sigma}{2}\kappa_1^2(x, t) + \frac{1}{2\sigma}\kappa_2^2(x, t), \end{aligned}$$

其中 $\sigma$ 为正数.

**引理 3**<sup>[26]</sup> 令 $\kappa(x, t) \in \mathbb{R}, (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty)$ , 并满足 $\kappa(0, t) = 0, t \in [0, +\infty)$ , 则以下不等式成立:

$$\kappa^2(x, t) \leq L \int_0^L [\kappa_x(x, t)]^2 dx,$$

$$\int_0^L [\kappa(x, t)]^2 dx \leq \frac{4L^2}{\pi^2} \int_0^L [\kappa_x(x, t)]^2 dx.$$

本文中, 控制目标是通过构造滑模面和边界滑模控制器, 减少边界扰动对系统的影响, 在量化输入下使得柔性臂系统能够达到期望的角度同时抑制振动.

### 3 主要结果

本节中, 为了处理边界扰动 $d(t)$ , 提出了边界滑模控制策略, 控制目标是使柔性臂达到期望的角度并抑制振动. 具体的控制策略如图2所示.

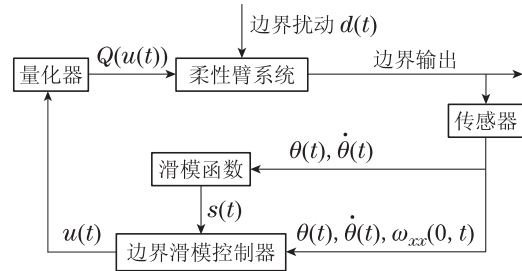


图2 边界滑模控制框图

Fig. 2 Block diagram of sliding mode boundary control

首先, 利用边界信号构造滑模函数和滑模面, 即

$$s(t) = I_h\dot{\theta}(t) + a_1(\theta(t) - \theta_d) + \int_0^t [a_2(\theta(\tau) - \theta_d)] d\tau, \quad (5)$$

其中:  $a_1$ 和 $a_2$ 是正常数. 滑模面表示为 $s(t) = 0$ .

边界滑模控制器设计为

$$u(t) = -a_1\dot{\theta}(t) - a_2(\theta(t) - \theta_d) - E_1\omega_{xx}(0, t) - a_s s(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t), \quad (6)$$

其中:  $a_s, a$ 为正常数,  $\bar{D} = \bar{d} + \Delta$ ,  $\bar{d}$ 表示边界扰动 $d(t)$ 的上界满足假设1,  $\Delta$ 表示量化误差 $e(t)$ 的上界满足假设2,  $\eta(t)$ 为低通滤波器的输出, 形式如下:

$$\beta\dot{\eta}(t) + \eta(t) = \text{sgn } s(t), \quad (7)$$

其中 $\beta$ 为给定的一个较小的正常数, 并且给定滤波器输出的初始值为 $\eta(0) = \text{sgn } s(0)$ .

首先, 讨论在边界滑模控制器(6)下闭环系统的稳定性. 闭环系统可写成

$$\begin{cases} \rho\omega_{tt}(x, t) + E_1\omega_{xxxx}(x, t) + cz_t(x, t) = 0, \\ -I_h\ddot{\theta}(t) + e(t) - a_1\dot{\theta}(t) - a_2(\theta(t) - \theta_d) - \\ a_s s(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t) + d(t) = 0, \\ \dot{s}(t) = I_h\ddot{\theta}(t) + a_1\dot{\theta}(t) + a_2(\theta(t) - \theta_d), \\ \beta\dot{\eta}(t) + \eta(t) = \text{sgn } s(t), \\ z(0, t) = z_x(0, t) = \omega_{xx}(L, t) = \omega_{xxx}(L, t) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

求解上述闭环系统的低通滤波器部分可得

$$\eta(t) = e^{-\frac{t}{\beta}}\eta(0) + \frac{1}{\beta}e^{-\frac{t}{\beta}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{\beta}} \text{sgn } s(\tau) d\tau, \quad (9)$$

其中 $\beta$ 是一个给定的正常数. 从式(9)可以看出 $\eta(t)$ 的解与滑模函数 $s(t)$ 有关, 也就是说当滑模函数 $s(t)$ 存在唯一解时, 低通滤波器的输出 $\eta(t)$ 也存在唯一解. 因

此, 接下来文章主要讨论以下闭环系统的适定性:

$$\begin{cases} \rho\omega_{tt}(x, t) + E_1\omega_{xxxx}(x, t) + cz_t(x, t) = 0, \\ -I_h\ddot{\theta}(t) + e(t) - a_1\dot{\theta}(t) - a_2(\theta(t) - \theta_d) - \\ a_s s(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t) + d(t) = 0, \\ \dot{s}(t) = I_h\ddot{\theta}(t) + a_1\dot{\theta}(t) + a_2(\theta(t) - \theta_d), \\ z(0, t) = z_x(0, t) = \omega_{xx}(L, t) = \omega_{xxx}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

定义 Hilbert 空间为  $\mathcal{X} := \mathcal{H}^2(0, L) \times \mathcal{L}^2(0, L) \times \mathcal{R}^3$ , 在此空间下的内积定义为

$$\begin{aligned} \langle P_1, P_2 \rangle_{\mathcal{X}} = & E_1 \int_0^L \phi_1''(x)\phi_2''(x)dx + \\ & \rho \int_0^L \psi_1(x)\psi_2(x)dx + \\ & \beta_1 \rho \int_0^L \phi_1(x)\psi_2(x)dx + \\ & \beta_1 \rho \int_0^L \psi_1(x)\phi_2(x)dx + \\ & I_h \psi_1'(0)\psi_2'(0) + a_2 p_1 p_2 + q_1 q_2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $P_i = (\phi_i(x) \ \psi_i(x) \ \psi_i'(0) \ p_i \ q_i)^T \in \mathcal{X}, i = 1, 2$ .

定义一个算子  $\mathbf{A}$  为

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} l\phi(x) \\ \psi(x) \\ \psi'(0) \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) - x\psi'(0) \\ -\frac{E_1}{\rho}\phi''''(x) - \frac{c}{\rho}[\psi(x) - x\psi'(0)] \\ \frac{1}{I_h}[-a_1\psi'(0) - a_2p - a_sq] \\ \psi'(0) \\ -a_sq \end{pmatrix}, \quad (12)$$

及其定义域为

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}) = & \{(\phi(x) \ \psi(x) \ \psi'(0) \ p \ q)^T \in \mathcal{H}^4(0, L) \times \\ & \mathcal{H}^2(0, L) \times \mathcal{R}^3, \phi(0) = \psi(0) = \phi'(0) = \\ & \phi''(L) = \phi'''(L) = 0\}, \end{aligned} \quad (13)$$

可以看出算子  $\mathbf{A}$  是一个线性算子并且  $D(\mathbf{A}) \in \mathcal{X}$ . 在线性算子  $\mathbf{A}$  的作用下, 可以把闭环系统(10)重新表达为以下发展方程的形式:

$$\dot{Y}(t) = \mathbf{A}Y(t) + B(t), \quad (14)$$

其中:  $Y(t) = (z(\cdot, t) \ \omega_t(\cdot, t) \ \dot{\theta}(t) \ (\theta(t) - \theta_d) \ s(t))^T \in \mathcal{X}, B(t) = (0, 0, e(t) + d(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t), 0, e(t) + d(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t))^T$ .

下面利用算子半群理论讨论闭环系统(10)的适定性.

**定理 1** 考虑存在边界扰动的柔性臂系统(1)-(3), 在假设1和假设2成立的条件下, 基于边界滑模控制器(6), 若控制器参数满足如下限制条件:

$$(E_1 - \frac{8cL^4}{\beta_2\pi^4})^{-1} \frac{E_1}{\delta_2} < \beta_1 < \min\{1, \frac{c}{\rho}, \frac{\pi^4 E_1}{16L^4 \rho}\}, \beta_2 =$$

$\frac{c - \beta_1 \rho}{c\beta_1}, a_1 \geq \frac{\sigma_1 E_1 + \sigma_2 a_s}{2} + \frac{cL^3 \beta_1 \beta_2}{6}, a_2, a, a_s, \sigma_1, \sigma_2$  为正常数, 则算子  $\mathbf{A}$  在 Hilbert 空间上能产生一个  $C_0$  压缩半群. 进一步, 对于任意给定的初始条件  $(z(\cdot, 0) \ \omega_t(\cdot, 0) \ \dot{\theta}(0) \ (\theta(0) - \theta_d) \ s(0))^T \in \mathcal{X}$ , 闭环系统(10)存在唯一的解  $(z(\cdot, t) \ \omega_t(\cdot, t) \ \dot{\theta}(t) \ (\theta(t) - \theta_d) \ s(t))^T \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{X})$ .

**证** 分3步来证明定理.

**步骤 1** 讨论算子  $\mathbf{A}$  的耗散性.

$$\begin{aligned} \langle P, \mathbf{A}P \rangle_{\mathcal{X}} = & E_1 \int_0^L \phi''(x)\psi''(x)dx + \rho \int_0^L \psi(x)[-\frac{E_1}{\rho}\phi''''(x) - \\ & \frac{c}{\rho}(\psi(x) - x\psi'(0))]dx + \int_0^L \phi(x)[-\frac{E_1}{\rho}\phi''''(x) - \\ & \frac{c}{\rho}(\psi(x) - x\psi'(0))]dx + \int_0^L \psi(x)[\psi(x) - x\psi'(0)]dx + \\ & \psi'(0)(-a_1\psi'(0) - a_2p - a_sq) + p\psi'(0) - a_sq^2 \leq \\ & -(c - \beta_1 \rho - \frac{c\beta_1\beta_2}{2}) \int_0^L \psi^2(x)dx - \frac{a_s}{2\sigma_2} q^2 - \\ & (\beta_1 E_1 - \frac{E_1}{2\sigma_1} - \frac{8cL^4\beta_1}{\beta_2\pi^4}) \int_0^L \phi''^2(x)dx - \\ & (a_1 - \frac{\sigma_1 E_1}{2} - \frac{\sigma_2 a_s}{2} - \frac{cL^3\beta_1\beta_2}{6}) \psi'^2(0). \end{aligned} \quad (15)$$

当满足定理 1 中给出的参数限制条件时, 可以得到  $\langle P, \mathbf{A}P \rangle_{\mathcal{X}} \leq 0$ . 因此, 算子  $\mathbf{A}$  是耗散的.

**步骤 2** 证明算子  $\mathbf{A}$  的逆算子存在且是紧算子.

令  $\Gamma_1 = (f(x) \ g(x) \ h \ v \ w)^T \in \mathcal{X}$ , 通过求解方程  $\mathbf{A}P = \Gamma_1$  可解得唯一解  $P$ . 从而方程  $\mathbf{A}P = \Gamma_1$  的解是存在且唯一的. 因此, 算子  $\mathbf{A}^{-1}$  存在, 进一步通过 Sobolev 嵌入定理可知算子  $\mathbf{A}^{-1}$  在  $\mathcal{X}$  是紧算子.

**步骤 3** 证明存在  $\lambda_0 > 0$  使得算子  $\lambda_0 I - \mathbf{A}$  的值域是  $\mathcal{X}$ .

任意给定  $\Gamma_2 \in \mathcal{X}$ , 证明存在唯一的解使下式成立:

$$(\lambda_0 I - \mathbf{A})Y = \Gamma_2. \quad (16)$$

回顾步骤2可知算子  $\mathbf{A}^{-1}$  是存在的并且是紧的. 因此可以将式(16)重新表达为  $(\lambda_0 I - \mathbf{A})Y = \mathbf{A}(\lambda_0 \times \mathbf{A}^{-1} - I)Y = \Gamma_2$ , 当  $\lambda_0$  满足  $0 < \lambda_0 < \|\mathbf{A}^{-1}\|^{-1}$  时, 可得到  $\|\lambda_0 \mathbf{A}^{-1}\| < 1$ . 根据文献[27, 定理7.3.1]可知算子  $(\lambda_0 \mathbf{A}^{-1} - I)^{-1}$  是存在的, 进一步得到方程(16)存在唯一的解为  $Y = (\lambda_0 \mathbf{A}^{-1} - I)^{-1} \mathbf{A}^{-1} \Gamma_2 \in D(\mathbf{A})$ . 因此可以得到算子  $\lambda_0 I - \mathbf{A}$  的值域是  $\mathcal{X}$ .

基于以上3个步骤的讨论, 根据文献[28, 定理2.27]中的 Lumer-Phillips 定理可知, 算子  $\mathbf{A}$  可产生一个  $C_0$  压缩半群. 由假设1和假设2可知, 对于任意的  $\tau > 0$ ,  $B(t) = (0 \ 0 \ e(t) + d(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t) \ 0 \ e(t) + d(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t))^T \in \mathcal{L}^p(0, \tau)$ ; 根据文献[29, 定理5.1.10], 闭环系统(10)存在唯一的解  $Y(t) \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{X})$ . 证毕.

下面讨论边界滑模控制器下系统的稳定性. 首先给出下述结果说明在所设计的滑模边界控制器下, 系统状态能够在有限时间内到达滑模面.

**定理 2** 考虑存在边界扰动的柔性臂系统(1)–(3), 在假设1成立的条件下, 在所设计的边界滑模控制器下, 滑模函数 $s(t)$ 是单调的并且是指数衰减的, 存在一个时间 $t_0 = \frac{1}{a_s} \ln[\frac{a_s |s(0)|}{a} + 1]$ 使得当 $t \geq t_0$ 时, 系统状态达到滑模面上并且会一直维持在滑模面上.

**证** 构造Lyapunov函数如下:

$$V_s(t) = \frac{1}{2} s^2(t), \quad (17)$$

对Lyapunov函数 $V_s(t)$ 沿时间 $t$ 求导并代入边界条件(2)可得

$$\dot{V}_s(t) = s(t)[E_1 \omega_{xx}(0, t) + Q(u(t)) + d(t) + a_1 \dot{\theta}(t) + a_2(\theta(t) - \theta_d)]. \quad (18)$$

根据量化误差 $e(t)$ 的定义(4), 并代入边界滑模控制器(6)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(t) = & s(t)[-a_s s(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t) + \\ & d(t) + e(t)] = \\ & -a_s s^2(t) - (\bar{D}|\eta(t)| + a)|s(t)|(d(t) + e(t)), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\bar{D} = \bar{d} + \Delta$ . 从上式可看出, 当滑模函数 $s(t) \neq 0$ 时, Lyapunov函数 $V_s(t)$ 是呈指数衰减的, 也就是说滑模函数 $s(t)$ 也是单调并且呈指数衰减的. 根据低通滤波器(7)以及设置的初始值 $\eta(0) = \text{sgn } s(0)$ 可知, 在系统状态到达滑模面之前, 滤波器的输出值 $|\eta(t)| = 1$ . 结合假设1中的 $|d(t)| \leq \bar{d}$ 和假设2中的 $|e(t)| \leq \Delta$ , 进一步可得

$$\dot{V}_s(t) \leq -a_s s^2(t) - a|s(t)|, \quad (20)$$

当 $s(t) \neq 0$ 时, 对上式两边同时除以 $|s(t)|$ 可得

$$\text{sgn } s(t) \dot{s}(t) \leq -a_s s(t) \text{sgn } s(t) - a. \quad (21)$$

对上式两边同时乘以 $e^{a_s t}$ , 并移项可得

$$\text{sgn } s(t) \dot{s}(t) e^{a_s t} - a_s s(t) \text{sgn } s(t) e^{a_s t} \leq -a e^{a_s t}, \quad (22)$$

两边同时从0到 $t$ 对时间积分, 之后不等式两边同时乘以 $e^{-a_s t}$ 可得

$$|s(t)| \leq -\frac{a}{a_s} + (\frac{a}{a_s} + |s(0)|) e^{-a_s t}, \quad (23)$$

通过计算可得, 当 $t \geq t_0 = \frac{1}{a_s} \ln[\frac{a_s |s(0)|}{a} + 1]$ 时, 可以实现 $s(t) = 0$ , 也就是系统状态能够在有限时间到达滑模面.

当系统到达滑模面后, 即 $s(t) = 0$ , 此时,

$$\dot{s}(t) = -(\bar{D}|\eta(t)| + a)\text{sgn } s(t) + d(t) + e(t), \quad (24)$$

移项并代入低通滤波器(7)可得

$$\begin{aligned} \beta \dot{\eta}(t) + \eta(t) = & \\ & -(\bar{D}|\eta(t)| + a)^{-1}(\dot{s}(t) - d(t) - e(t)). \end{aligned} \quad (25)$$

根据引理1可知, 当 $\beta$ 取值较小时, 下式成立:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \eta(t) = \frac{d(t) + e(t)}{\bar{D}|\eta(t)| + a}, \quad (26)$$

由于 $\bar{D}, a$ 都为正常数, 因此 $\eta(t)$ 和 $d(t) + e(t)$ 的符号相同. 接下来分为以下两种情况进行讨论:

$$\begin{cases} \bar{D}\eta^2(t) + a\eta(t) = d(t) + e(t), & \eta(t) \geq 0 \\ -\bar{D}\eta^2(t) + a\eta(t) = d(t) + e(t), & \eta(t) < 0. \end{cases} \quad (27)$$

根据假设1和假设2可知 $|d(t) + e(t)| \leq \bar{D}$ , 通过求解微分方程可得 $\eta(t) < 1$ , 这也说明 $\frac{d(t) + e(t)}{\bar{D}|\eta(t)| + a} < 1$ , 进而可得 $\bar{D}|\eta(t)| + a > d(t) + e(t)$ . 换句话说, 边界滑模控制器(6)中符号函数部分的时变增益总是比 $d(t) + e(t)$ 大. 因此, 即使到达滑模面, 不等式(20)也会一直成立, 说明了系统状态在到达滑模面之后会一直维持在滑模面上. 证毕.

**注 1** 在边界滑模控制器(6)中, 符号函数的增益为时变增益. 与固定增益相比, 相同点在于都需要扰动上界是已知的. 然而, 固定增益会造成系统的抖振, 时变增益可以避免控制器高频切换下造成系统抖振现象.

接下来, 将讨论系统到达滑模面之后的稳定性并给出如下定理.

**定理 3** 考虑受边界扰动的柔性臂系统(1)–(3), 当边界滑模控制器(6)参数满足如下限制条件:

$$\begin{aligned} a_1 > & \sqrt{I_h a_2} + \frac{cL^3 \beta_1 \beta_2}{6} + E_1 \delta_1, \quad a_2 > 0, \\ (E_1 - & \frac{8cL^4}{\beta_2 \pi^4})^{-1} \frac{E_1}{\delta_1} < \beta_1 < \min \left\{ 1, \frac{c}{\rho}, \frac{\pi^4 E_1}{16L^4 \rho} \right\}, \\ \beta_2 = & \frac{c - \beta_1 \rho}{c \beta_1}, \quad a > 0, \quad a_s > 0, \quad \delta_1 \text{ 为正常数, 可以得到如下结论:} \end{aligned}$$

1) 柔性臂的弹性挠度 $z(x, t)$ 是指数收敛的满足

$$|z(x, t)| \leq \sqrt{\frac{8L^3}{\alpha_1 \pi^2 E_1} V(0)} e^{-\lambda t},$$

2) 柔性臂的角度误差 $\theta(t) - \theta_d$ 是指数收敛的满足

$$|\theta(t) - \theta_d| \leq \sqrt{\frac{2\sqrt{I_h}}{a_1 \sqrt{a_2}} V(0)} e^{-\lambda t},$$

其中:  $\alpha_1 = 1 - \beta_1 \max \left\{ 1, \frac{16L^4 \rho}{\pi^4 E_1} \right\}, \lambda > 0$ .

**证** 构造Lyapunov候选函数为

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t), \quad (28)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \frac{1}{2}\rho \int_0^L \omega_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2}E_1 \int_0^L z_{xx}^2(x, t) dx, \\
 V_2(t) &= \beta_1 \rho \int_0^L \omega_t(x, t) z(x, t) dx, \\
 V_3(t) &= \frac{1}{2} [\sqrt{I_h} \dot{\theta}(t) + \sqrt{a_2}(\theta(t) - \theta_d)]^2, \\
 V_4(t) &= \frac{a_1 \sqrt{a_2}}{2\sqrt{I_h}} (\theta(t) - \theta_d)^2.
 \end{aligned}$$

首先, 将讨论所构造Lyapunov候选函数的正定性. 利用引理2、引理3以及边界条件 $z(0, t) = z_x(0, t) = 0$ , 可以得到

$$\begin{aligned}
 |V_2(t)| &\leq \frac{\beta_1 \rho}{2} \int_0^L (\omega_t^2(x, t) + z^2(x, t)) dx \leq \\
 &\frac{\beta_1 \rho}{2} \int_0^L \omega_t^2(x, t) dx + \frac{\beta_1 \rho}{2} \frac{16L^4}{\pi^4} \int_0^L z_{xx}^2(x, t) dx \leq \\
 &\beta_1 \max\{1, \frac{16L^4 \rho}{\pi^4 E_1}\} V_1(t), \tag{29}
 \end{aligned}$$

进一步得出

$$\begin{aligned}
 0 < (1 - \beta_1 \max\{1, \frac{16L^4 \rho}{\pi^4 E_1}\}) V_1(t) &\leq V_1(t) + V_2(t) \leq \\
 (1 + \beta_1 \max\{1, \frac{16L^4 \rho}{\pi^4 E_1}\}) V_1(t).
 \end{aligned}$$

为了保证 $1 - \beta_1 \max\{1, \frac{16L^4 \rho}{\pi^4 E_1}\} > 0$ 成立, 参数 $\beta_1$ 必须满足 $0 < \beta_1 < \min\{1, \frac{\pi^4 E_1}{16L^4 \rho}\}$ . 进一步可以得到

$$\begin{aligned}
 0 < \alpha_1 (V_1(t) + V_3(t) + V_4(t)) &\leq \\
 V(t) &\leq \alpha_2 (V_1(t) + V_3(t) + V_4(t)), \tag{30}
 \end{aligned}$$

其中:  $\alpha_1 = 1 - \beta_1 \max\{1, \frac{16L^4 \rho}{\pi^4 E_1}\}$ ,  $\alpha_2 = 1 + \beta_1 \max\{1, \frac{16L^4 \rho}{\pi^4 E_1}\}$ . 上式说明所构造的Lyapunov函数是正定的.

接下来, 对所构造的Lyapunov函数对时间求导, 并利用分部积分法得

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t), \tag{31}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t) &= -E_1 \omega_{xx}(0, t) \dot{\theta}(t) - \\
 &c \int_0^L \omega_t(x, t) z_t(x, t) dx, \tag{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(t) &= \beta_1 \rho \int_0^L \omega_t(x, t) z_t(x, t) dx - \\
 &\beta_1 E_1 \int_0^L z_{xx}^2(x, t) dx - \\
 &\beta_1 c \int_0^L z(x, t) z_t(x, t) dx, \tag{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3(t) &= I_h \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) + \sqrt{I_h a_2} (\theta(t) - \theta_d) \ddot{\theta}(t) + \\
 &\sqrt{I_h a_2} \dot{\theta}^2(t) + a_2 (\theta(t) - \theta_d) \dot{\theta}(t), \tag{34}
 \end{aligned}$$

$$\dot{V}_4(t) = \frac{a_1 \sqrt{a_2}}{\sqrt{I_h}} (\theta(t) - \theta_d) \dot{\theta}(t). \tag{35}$$

结合式(32)–(35), 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= [-E_1 \omega_{xx}(0, t) + I_h \ddot{\theta}(t) + a_2 (\theta(t) - \theta_d)] \dot{\theta}(t) + \\
 &\frac{a_1 \sqrt{a_2}}{\sqrt{I_h}} (\theta(t) - \theta_d) \dot{\theta}(t) + \sqrt{I_h a_2} \dot{\theta}^2(t) + \\
 &\sqrt{I_h a_2} (\theta(t) - \theta_d) \ddot{\theta}(t) - \beta_1 E_1 \int_0^L z_{xx}^2(x, t) dx - \\
 &\beta_1 c \int_0^L z(x, t) z_t(x, t) dx - \\
 &(c - \beta_1 \rho) \int_0^L \omega_t(x, t) z_t(x, t) dx, \tag{36}
 \end{aligned}$$

由于系统已经到达滑模面, 也就是 $s(t) = 0$ 成立. 根据所设计的滑模函数(5)可知 $I_h \dot{\theta}(t) + a_1 (\theta(t) - \theta_d) + \int_0^t [a_2 (\theta(t) - \theta_d)] dt = 0$ 成立. 对其求时间一阶导可得

$$I_h \ddot{\theta}(t) + a_1 \dot{\theta}(t) + a_2 (\theta(t) - \theta_d) = 0. \tag{37}$$

将上式代入式(36)可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \\
 &[-E_1 \omega_{xx}(0, t) - a_1 \dot{\theta}(t)] \dot{\theta}(t) + \sqrt{I_h a_2} \dot{\theta}^2(t) + \\
 &\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{I_h}} (\theta(t) - \theta_d) [-a_2 (\theta(t) - \theta_d)] - \\
 &\beta_1 E_1 \int_0^L z_{xx}^2(x, t) dx - \beta_1 c \int_0^L z(x, t) z_t(x, t) dx - \\
 &(c - \beta_1 \rho) \int_0^L \omega_t(x, t) z_t(x, t) dx. \tag{38}
 \end{aligned}$$

根据等式 $\omega(x, t) = x\theta(t) + z(x, t)$ , 并利用引理2和 $\beta_2 > 0$ , 再进行简单的推导可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq -\lambda_1 \dot{\theta}^2(t) - \lambda_2 (\theta(t) - \theta_d)^2 - \\
 &\lambda_3 \int_0^L [\omega_t(x, t)]^2 dx - \lambda_4 \int_0^L [z_{xx}(x, t)]^2 dx - \\
 &\lambda_5 \int_0^L x \dot{\theta}(t) \omega_t(x, t) dx, \tag{39}
 \end{aligned}$$

其中参数的具体表达如下:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \lambda_1 &:= a_1 - \sqrt{I_h a_2} - \frac{cL^3 \beta_1 \beta_2}{6} - E_1 \delta_1 > 0, \\
 \lambda_2 &:= \frac{a_2 \sqrt{a_2}}{\sqrt{I_h}} > 0, \\
 \lambda_3 &:= c - \beta_1 \rho - \frac{c\beta_1 \beta_2}{2} > 0, \\
 \lambda_4 &:= \beta_1 E_1 - \frac{8cL^4 \beta_1}{\beta_2 \pi^4} - \frac{E_1}{\delta_1} > 0, \\
 \lambda_5 &:= c\beta_1 \beta_2 - c + \beta_1 \rho = 0
 \end{aligned} \right. \tag{40}$$

以及 $\delta_1$ 为正常数. 通过简单的计算, 可以得出控制器参数的限制条件为



$$\begin{cases} a_1 > \sqrt{I_h a_2} + \frac{cL^3 \beta_1 \beta_2}{6} + E_1 \delta_1, \\ a_2 > 0, \\ (E_1 - \frac{8cL^4}{\beta_2 \pi^4})^{-1} \frac{E_1}{\delta_1} < \beta_1 < \frac{c}{\rho}, \\ \beta_2 = \frac{c - \beta_1 \rho}{c \beta_1}. \end{cases} \quad (41)$$

在以上参数条件都满足的情况下, 以下不等式成立:

$$\dot{V}(t) \leq -\min\left\{\frac{2\lambda_3}{\rho}, \frac{2\lambda_4}{E_1}, \frac{\lambda_1}{I_h}, \frac{\lambda_2}{2a_2}, \frac{\lambda_2 \sqrt{I_h}}{a_1 \sqrt{a_2}}\right\} \times (V_1(t) + V_3(t) + V_4(t)). \quad (42)$$

进一步结合式(30), 上式可转化为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \\ &-\frac{1}{\alpha_2} \min\left\{\frac{2\lambda_3}{\rho}, \frac{2\lambda_4}{E_1}, \frac{\lambda_1}{I_h}, \frac{\lambda_2}{2a_2}, \frac{\lambda_2 \sqrt{I_h}}{a_1 \sqrt{a_2}}\right\} V(t) = \\ &-\lambda V(t), \end{aligned} \quad (43)$$

其中  $\lambda = \frac{1}{\alpha_2} \min\left\{\frac{2\lambda_3}{\rho}, \frac{2\lambda_4}{E_1}, \frac{\lambda_1}{I_h}, \frac{\lambda_2}{2a_2}, \frac{\lambda_2 \sqrt{I_h}}{a_1 \sqrt{a_2}}\right\}$ .

对上式两边同时乘以  $e^{\lambda t}$ , 移项并从0到t进行积分可得

$$V(t)e^{\lambda t} - V(0) \leq 0. \quad (44)$$

进一步可以推导得出

$$V(t) \leq V(0)e^{-\lambda t}. \quad (45)$$

利用引理3中第2个不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{8L^3} (z(x, t))^2 &\leq \frac{E_1}{8L^2} \int_0^L (z_x(x, t))^2 dx \leq \\ \frac{E_1}{2\pi^2} \int_0^L (z_{xx}(x, t))^2 dx &\leq \frac{1}{\alpha_1 \pi^2} V(t) \leq \\ \frac{1}{\alpha_1 \pi^2} V(0)e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (46)$$

可进一步得到

$$|z(x, t)| \leq \sqrt{\frac{8L^3}{\alpha_1 \pi^2 E_1} V(0)e^{-\lambda t}}.$$

上式说明了柔性臂的弹性挠度  $z(x, t)$  是指数收敛的. 相似地, 可得到角度误差  $\theta(t) - \theta_d$  是指数收敛的表达式为

$$|\theta(t) - \theta_d| \leq \sqrt{\frac{2\sqrt{I_h}}{a_1 \sqrt{a_2}} V(0)e^{-\lambda t}}. \quad (47)$$

证毕.

**注2** 本文所设计的边界滑模控制器中的反馈信号均可容易获取. 角度  $\theta(t)$  可以通过电机转过的齿轮数计算得到, 角速度  $\dot{\theta}(t)$  可以通过对角度  $\theta(t)$  进行一次差分获取, 固定端状态  $\omega_x(0, t)$  通过应变片传感器获得, 状态  $\omega_{xx}(0, t)$  可以通过两个应变片弯曲传感器通过一次差分获取. 值得注意的是, 多

次差分会带来测量噪声, 导致获取数据的不准确, 比如状态  $\omega_{xxt}(0, t)$ .

**注3** 在不考虑量化输入的情况下, 滑模面的构造与式(5)相同. 边界滑模控制器设计为

$$u(t) = -a_1 \dot{\theta}(t) - a_2 (\theta(t) - \theta_d) - E_1 \omega_{xx}(0, t) - a_s s(t) - (d|\eta(t)| + a) \text{sgn } s(t), \quad (48)$$

与考虑量化时的边界滑模控制器(6)相比不同点在于控制器中符号函数  $\text{sgn } s(t)$  前的系数取值. 通过类似定理2和定理3的证明, 在所设计的边界滑模控制器(48)下系统状态是指数收敛的. 与文献[30]相比, 滑模面的构造不需要用到状态  $\omega_{xx}(0, t)$  并且得到的结果只是渐近稳定.

**注4** 文献[2, 9]针对基于ODE模型的柔性臂进行了研究, 对于精确度要求较高的柔性臂系统来说, PDE建模会更加准确. 另外, 本文所设计的边界控制器仅作用在柔性臂的固定端, 而文献[19-20]在自由端也施加了控制力, 这在实际实现中是非常困难的.

**注5** 在文献[11]和文献[31]中, 虽然考虑了末端负载, 但同时也末端施加了控制器. 为了方便比较, 本文忽略末端负载与末端控制. 文献[11]和文献[31]处理扰动采用的是扰动观测器方法, 得到的结果是状态一致有界的. 在本文所提出的边界滑模控制下, 系统状态是指数收敛的.

当不考虑低通滤波器(7)时, 边界滑模控制器可以简化为以下形式:

$$u(t) = -a_1 \dot{\theta}(t) - a_2 (\theta(t) - \theta_d) - E_1 \omega_{xx}(0, t) - a_s s(t) - (\bar{D} + a) \text{sgn } s(t). \quad (49)$$

在边界滑模控制器(49)作用下, 可得到以下推论.

**推论1** 考虑存在边界扰动的柔性臂系统(1)-(3), 假设边界扰动  $d(t)$  存在上界, 在所设计的边界滑模控制器(49)下, 参数满足如下限制条件:

$$\begin{aligned} a_1 > \sqrt{I_h a_2} + \frac{cL^3 \beta_1 \beta_2}{6} + E_1 \delta_1, \quad a_2 > 0, \\ (E_1 - \frac{8cL^4}{\beta_2 \pi^4})^{-1} \frac{E_1}{\delta_1} < \beta_1 < \min\left\{1, \frac{c}{\rho}, \frac{\pi^4 E_1}{16L^4 \rho}\right\}, \end{aligned}$$

$\beta_2 = \frac{c - \beta_1 \rho}{c \beta_1}, a > 0, a_s > 0, \delta_1$  为正常数, 可以得到如下结论:

- 1) 系统状态在有限时间内到达滑模面上并且会一直维持在滑模面上;
- 2) 柔性臂的角度误差  $\theta(t) - \theta_d$  和弹性挠度  $z(x, t)$  是指数收敛的.

**注6** 与采用低通滤波器的边界控制器(6)相比, 推论1仅对边界扰动  $d(t)$  本身要求有界, 摒弃了对边界扰动  $d(t)$  可导以及对导数有界的限制, 适用范围更广. 然而, 由于控制器(49)中符号函数前的系数是固定常数, 这会导致系统出现抖振.

### 4 实验验证

在本节中, 为了验证在第3节中所提出边界滑模控制策略的有效性, 对柔性臂采用物理实验来验证. 实验平台如图3所示, 由24 V稳压电源供电的直流电机, 长度 $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $\rho = 0.1 \text{ kg/m}$ 和 $E_I = 0.157 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ 的柔性臂, 电机驱动单元,  $I_h = 0.00133 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 和 $c = 0.01 \text{ Ns/m}^2$ 的电机组成, 一个紧急开关和两个应变片. 实验配置方案框图如图4所示.

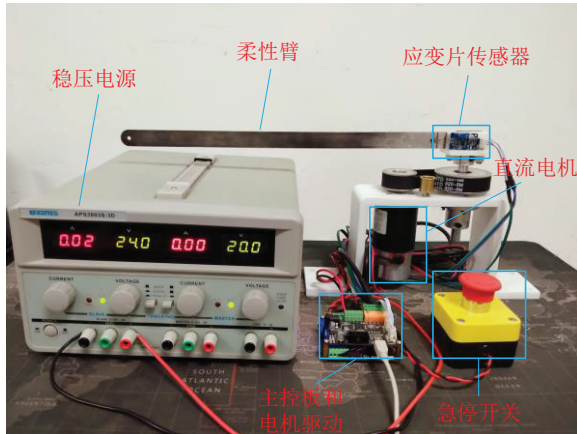


图 3 实验平台

Fig. 3 Experimental platform

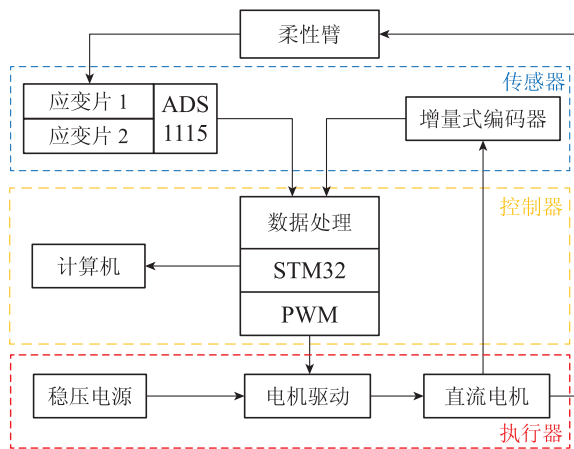


图 4 实验配置方案框图

Fig. 4 Block diagram of experimental configuration scheme

本实验使用的直流电机模型为DBM60, 角位置和角速度由增量编码器产生的三相脉冲获得, 两个应变片传感器分别位于柔性臂的固定点和5 mm位置. 两个应变计传感器的数据通过ADS1115进行测量, STM32通过I<sup>2</sup>C协议与ADS1115通信以获得状态 $z_x(0, t)$ . 然后, 通过差分算法在线获得信号 $\omega_{xx}(0, t)$ .

在实验中, 采样时间设置为10 ms, 控制器的输出采用量化器 $Q(u(t)) = 0.1 \times \text{round}(u(t)/0.1)$ . 控制目标是将柔性臂旋转到期望角度 $\theta_d = 0.4 \text{ rad}$ , 并尽可能减少振动. 为了验证所提出边界滑模控制策略的有效性, 分别采用PD(proportional differential)控制和边界滑模控制器(6)进行实验.

PD控制: 采用增量式PD控制方法, 其中 $K_p = 27.5$ ,  $K_d = 15.3$ . 角度 $\theta(t)$ 与轮毂端弯曲度 $z_x(0, t)$ 的实验结果分别由图5和图6中的虚线表示. 可以看出, 最终的角度位置稳定在期望位置 $\theta_d = 0.4 \text{ rad}$ 附近. 但在前2 s存在明显的正向超调与反向超调. 从图6中, 还可以观察到轮毂端弯曲度 $z_x(0, t)$ 的振幅较大, 这意味着柔性臂在到达期望角度后仍存在较大的振动.

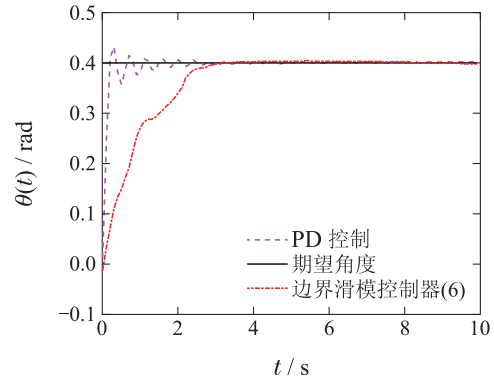


图 5 角度位置的实验结果

Fig. 5 Experiment results of the angle position

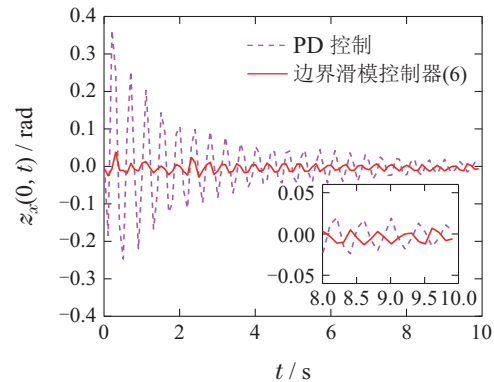


图 6 轮毂端弯曲度实验结果

Fig. 6 Experiment results of the hub-end bending

边界滑模控制器(6): 将边界滑模控制器(6)应用于实验平台, 控制器参数选择为 $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 10$ ,  $a_s = 2$ ,  $a = 0.05$ ,  $\bar{D} = 0.18$ ,  $\beta = 0.002$ . 值得注意的是, 由于边界滑模控制器(6)中的符号函数 $\text{sgn } s(t)$ 的存在, 在实际实验中会引起电机的抖动. 为了防止实验中电机在高频振动造成损伤, 利用一个低通滤波器(7)来滤出符号函数所引起的高频切换控制输入的等效控制力. 柔性臂的角度 $\theta(t)$  轨迹和轮毂端的弯曲度 $z_x(0, t)$ 分别在图5和图6中用红线表示. 角度位置可以平缓地达到期望的角度. 此外, 由于 $\omega_{xx}(0, t)$ 项的引入,  $z_x(0, t)$ 的振动明显小于PD控制下的振动. 也就是说在柔性臂达到期望角度后, 柔性臂的振动也得到了很好的抑制.

### 5 结论

在本文中, 针对具有量化输入与边界扰动的柔性臂系统, 提出了一种边界滑模控制器的设计方法. 基



于边界信息构造了滑模面与边界滑模控制器并采用了低通滤波器的抖振抑制策略. 通过算子半群理论证明了在所设计边界滑模控制器下闭环系统的适应性, 进一步通过Lyapunov稳定性理论证明了系统状态能够在有限时间内到达滑模面以及系统状态在滑模面上是指收敛的. 最后通过物理实验验证了所提出边界滑模控制策略的有效性. 在之后的研究中, 将进一步考虑减少边界扰动的限制条件以及柔性臂系统的最优控制问题.

### 参考文献:

- [1] HE W, GE S S, HOW B V E, et al. Robust adaptive boundary control of a flexible marine riser with vessel dynamics. *Automatica*, 2011, 47(4): 722 – 732.
- [2] DONG K, LIU H, ZHU X, et al. Force-free control for the flexible-joint robot in human-robot interaction. *Computers & Electrical Engineering*, 2019, 73: 9 – 22.
- [3] LIU Yu, FU Yun, LIU Weidong, et al. Adaptive vibration boundary control for a flexible satellite system. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 973 – 980.  
(刘屿, 付云, 刘伟东, 等. 柔性卫星系统的振动自适应边界控制. *控制理论与应用*, 2018, 35(7): 973 – 980.)
- [4] ZHANG L, LIU J. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(1): 43 – 51.
- [5] HE W, HE X, ZOU M, et al. PDE model-based boundary control design for a flexible robotic manipulator with input backlash. *IEEE Transactions on Control Systems and Technology*, 2019, 27(2): 790 – 797.
- [6] ZHANG S, WU Y, HE X, et al. Cooperative fault-tolerant control for a mobile dual flexible manipulator with output constraints. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering (Early Access)*, 2022, 19(4): 2689 – 2698.
- [7] YAO Zan. *Neuro-adaptive backstepping control of robotic arms with rigid and flexible joints*. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2012.  
(姚赞. 基于神经网络的刚-柔关节机器人自适应反步控制. 北京: 北京交通大学, 2012.)
- [8] GAO H, HE W, ZHOU C, et al. Neural network control of a two-link flexible robotic manipulator using assumed mode method. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(2): 755 – 765.
- [9] LI Pengfei, ZHANG Yinhe, ZHANG Lei, et al. Command-filtered backstepping control with error compensation for flexible joint manipulator. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(8): 1693 – 1700.  
(李鹏飞, 张银河, 张蕾, 等. 考虑误差补偿的柔性关节机械臂命令滤波反步控制. *控制理论与应用*, 2020, 37(8): 1693 – 1700.)
- [10] LIU Z, LIU J, HE W. Partial differential equation boundary control of a flexible manipulator with input saturation. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(1): 53 – 62.
- [11] ZHAO Z, HE X, AHN C K. Boundary disturbance observer-based control of a vibrating single-link flexible manipulator. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2021, 51(4): 2382 – 2390.
- [12] WU Xincheng, DENG Jun. Robust boundary control of a distributed-parameter flexible manipulator with tip unknown disturbance. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(4): 511 – 518.  
(吴忻生, 邓军. 末端有未知扰动的分布参数柔性机械臂的鲁棒边界控制. *控制理论与应用*, 2011, 28(4): 511 – 518.)
- [13] MAMANI G, BECEDAS J, FELIU V. Sliding mode tracking control of a very lightweight single-link flexible robot robust to payload changes and motor friction. *Journal of Vibration and Control*, 2012, 18(8): 1141 – 1155.
- [14] YANG H, TAN M. Sliding mode control for flexible-link manipulators based on adaptive neural networks. *International Journal of Automation and Computing*, 2018, 15(2): 239 – 248.
- [15] QIU Z, HAN J, LIU J. Experiments on fuzzy sliding mode variable structure control for vibration suppression of a rotating flexible beam. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21(2): 343 – 358.
- [16] GUO B, JIN F. The active disturbance rejection and sliding mode control approach to the stabilization of the Euler-Bernoulli beam equation with boundary input disturbance. *Automatica*, 2013, 49(9): 2911 – 2918.
- [17] BAEK J, JIN M, HAN S. A new adaptive sliding-mode control scheme for application to robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(6): 3628 – 3637.
- [18] CAO F, LIU J. Boundary vibration control for a two-link rigid-flexible manipulator with quantized input. *Journal of Vibration and Control*, 2019, 25(23/24): 2935 – 2945.
- [19] WANG J, LIU J. Event-triggered boundary quantization control for flexible manipulator based on partial differential equations dynamic model. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2021, 43(9): 2111 – 2123.
- [20] JI N, LIU J. Adaptive boundary control for flexible three dimensional Euler-Bernoulli beam with input signal quantization. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2018, 32(8): 1162 – 1181.
- [21] ZHAO Z, LIU Z, LI Z, et al. Control design for a vibrating flexible marine riser system. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(18): 8117 – 8133.
- [22] HE X, HE W, QIN H, et al. Boundary vibration control for a flexible Timoshenko robotic manipulator. *IET Control Theory and Applications*, 2018, 12(7): 875 – 882.
- [23] FRIDMAN E, DAMBRINE M. Control under quantization, saturation and delay: An LMI approach. *Automatica*, 2009, 45(10): 2258 – 2264.
- [24] UTKIN V I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.
- [25] RAHN C D. *Mechatronic Control of Distributed Noise and Vibration*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [26] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia: SIAM, 2008.
- [27] KREYSZIG E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- [28] LUO Z, GUO B, MORGUL O. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. London: Springer-Verlag, 1999.
- [29] CURTAIN R, ZWART H. *Introduction to Infinite-Dimensional Systems Theory: A State-Space Approach*. New York: Springer-Verlag, 2019.
- [30] LEE H-H, PREVOST J. A coupled sliding-surface approach for the trajectory control of a flexible-link robot based on a distributed dynamic model. *International Journal of Control*, 2005, 78(9): 629 – 637.
- [31] JIANG T, LIU J, HE W. Boundary control for a flexible manipulator based on infinite dimensional disturbance observer. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 348: 1 – 14.

### 作者简介:

马艺飞 博士研究生, 研究方向为柔性系统的边界控制, E-mail: mayifei@stu.jiangnan.edu.cn;

楼旭阳 教授, 研究方向为混杂系统的分析与控制, E-mail: Louxy@jiangnan.edu.cn;

吴炜 副教授, 研究方向为分布参数系统控制, E-mail: weiwu@jiangnan.edu.cn.