第 40 卷第 8 期
2023 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 40 No. 8
Aug. 2023

带边界非线性干扰的反稳定波方程的镇定

梅占东†, 竺　迪

(西安交通大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710049)

摘要: 本文研究了一类具有边界控制匹配非线性干扰的反稳定波动方程的镇定问题. 本文只用了两个量测, 构造了一个无限维干扰估计器来实时估计状态和总干扰, 该估计器既不要求干扰的导数有界, 也不需要高增益. 基于估计的总干扰和估计的状态, 本文设计了输出反馈控制律稳定原系统. 此外, 本文还证明了闭环系统的其他状态是有界的. 为了说明理论结果, 下文给出了一些数值模拟.

关键词: 指数稳定性; 自抗扰控制; 干扰估计器; 波方程

引用格式: 梅占东, 竺迪. 带边界非线性干扰的反稳定波方程的镇定. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1331 – 1338

DOI: 10.7641/CTA.2023.20292

Stabilization for an anti-stable wave equation with boundary nonlinear disturbance

MEI Zhan-dong†, ZHU Di

(School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

Abstract: We study stabilization for an anti-stable wave equation with boundary control matched interior uncertainty and external disturbance. Only two measurements are adopted. An infinite-dimensional disturbance estimator is constructed to estimate the state and total disturbance in real time, which does not presume the derivative of the disturbance to be bounded and recur to the high gain as usual. Based on the estimated total disturbance and estimated state, an output feedback control law is designed. Moreover, the other states of the closed-loop system are proved to be bounded. Some numerical simulations are presented for illustrating theoretical results.

Key words: exponential stabilization; active disturbance rejection control; disturbance estimator; wave equation

Citation: MEI Zhandong, ZHU Di. Stabilization for an anti-stable wave equation with boundary nonlinear disturbance. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1331 – 1338

1　引言

由于建模的不确定性(如未建模的参数、模型误差)和环境干扰(如风、噪声和温度), 在实际工业控制系统中通常会出现不确定性干扰. 干扰的存在通常使稳定的边界输出反馈控制器失效, 参见文献[1–3]. 因此, 如果出现干扰, 重新设计鲁棒稳定控制器是必要的; 处理不确定性是现代控制理论中重要的问题之一. 处理干扰的控制方法有很多, 如内模原理[4–5]、Lyapunov方法[1,3,6]、滑模控制[1,7–9]和自适应控制[10–13], 其中, 自适应控制方法和内模原理的核心思想是实时估计/抵消. 受这种思想的启发, 韩京清[14]首先发展了常微分方程的自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)方法. 由于把干扰当作一个整体、利用扩张状态观测器估计出来、并在反馈环节中抵消掉, ADRC能处理相当一般的干扰, 该法几乎不依赖于系统模型. 随后, ADRC应用于偏微分方程[1–3,8–9,15–19]. 在早期偏微分方程(partial differential equation, PDE)自抗扰控制[1,3,8–9,18]中, 作者通过引入一些特殊的测试函数把干扰转移到某个常微分方程(ordinary differential equation, ODE)中, 从而应用ODE自抗扰控制来处理. 这使得扩张状态观测器(extended state observer, ESO)必须采用高增益, 并且外部干扰的导数需要有界. 为了突破上述限制, 文献[16]开发了一种新的具有外部干扰的一维反稳定波动方程的无穷维干扰估计器来代替传统的ODE扩张状态观测器. 利用这种方法, 他们在文献[5]中考虑具有外部扰动的热方程的输出反馈稳定性. 在文献[15–16]激励下, 文献[19–20]研究了其他类具有边界控制匹配扰动的波动方程, 其中

收稿日期: 2022–04–19; 录用日期: 2023–03–14.
† 通信作者. E-mail: zhdmei@xjtu.edu.cn; Tel.: +86 29-82663158.
本文责任编委: 郭宝珠.
中央高校基本科研业务费专项资金项目(xzy012022015), 国家自然科学基金项目(61973338)资助.
Supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (xzy012022015) and the National Natural Science Foundation of China (61973338).

既考虑内部不确定性, 也考虑外部扰动. 文献[17,21]中作者研究了一类边界力矩控制匹配内部不确定性和外部干扰的一维梁方程. 类似的方法也同样适用于具有边界剪切控制且匹配内部不确定性和外部干扰的Euler-Bernoulli 梁方程的指数稳定化[2]. 受到文献[2,15–17,19–20]的启发, 本文考虑边界带控制匹配非线性干扰的一维反稳定波方程的输出反馈指数稳定性, 方程描述如下:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t)=w_{xx}(x,t), & x\in(0,1),\ t>0,\\ w_x(0,t)=-qw_t(0,t), & t\geqslant 0,\\ w_x(1,t)=F(t)+u(t), & t\geqslant 0,\\ y(t)=\{w_t(0,t),w(1,t)\}, & t\geqslant 0,\end{cases} \tag{1}$$

其中: $w(x,t)$是波在位置x和时间t的位移, $1\neq q>0$, $u(t)$是控制输入, 总干扰$F(t)=f(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))+d(t)$, $f(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))$是内部不确定性, $d(t)$是外部干扰, $y(t)$是输出(测量). 对于系统(1)的物理解释, 本文参考文献[12]. 为方便起见, 在不引起混淆的情况下, 下文中的方程本文省略掉时间和空间变量的域.

在不考虑扰动的情况下($F(t)=0$), 用Backstepping方法讨论了系统(1)的稳定性, 其中全状态是可测量的. 在文献[12,22]中, 自适应控制方法用于稳定系统, 其中q未知. 这里必须提到的是, 作者通过引入一个额外的传递方程, 仅用两个测量值$w(0,t)$和$w(1,t)$研究了系统. 具体来说, 他们引入了以下系统:

$$W_t(x,t)+W_x(x,t)=0,\ \ W(0,t)=-c_2w(0,t),$$

其中$0<c_2\neq 1$是正常数. 他们在文献[16]的第3部分中证明了, 如果$(c_2-q)/(1-c_2)>0$, 则反馈控制器

$$u(t)=W_t(1,t)-c_3w(1,t)-c_3W(1,t) \tag{2}$$

指数稳定原始系统, 其中$c_3>0$.

然而, 文献[16]并没有证明控制器(2)不能抑制干扰, 尽管ADRC方法已经被用于处理系统的外部干扰(如果控制器(2)可以抑制干扰, 就不需要ADRC). 现在本文来澄清这件事情. 考虑$F(t)\equiv F$时反馈控制器(2)作用下的闭环系统为

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t)=w_{xx}(x,t),\\ w_x(0,t)=-qw_t(0,t),\\ w_x(1,t)=W_t(1,t)-c_3w(1,t)-c_3W(1,t)+F,\\ W_t(x,t)+W_x(x,t)=0,\ \ W(0,t)=-c_2w(0,t),\end{cases} \tag{3}$$

其等价于

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{tt}(x,t)=\widetilde{w}_{xx}(x,t),\\ \widetilde{w}_x(0,t)=\dfrac{c_2-q}{1-c_2}w_t(0,t),\\ \widetilde{w}_x(1,t)=-c_3\widetilde{w}(1,t)+F,\\ W_t(x,t)+W_x(x,t)=0,\\ W(0,t)=-\dfrac{c_2}{1-c_2}\widetilde{w}(0,t),\end{cases} \tag{4}$$

其中$\widetilde{w}(x,t)=w(x,t)+W(x,t)$. 可以看出, $(\widetilde{w},\widetilde{w}_t,W)=(F/c_3,0,-Fc_2/[c_3(1-c_2)])$为系统(4)的解. 这表明, $(w,w_t,W)=(F/[c_3(1-c_2)],0,-Fc_2/[c_3(1-c_2)])$为系统(3)的不稳定解. 因此, 本文必须重新设计控制器稳定原系统.

在考虑干扰的情况下, 文献[6]中结合Lyapunov和Backstepping方法首先研究了系统(1)的稳定性, 但是需要完整的状态. 如前所述, 文献[16]引入一个新的无限维扰动估计器讨论了外部干扰的系统(1)的稳定性. 虽然对于$F(t)=0$的情况, 两个测量值足够, 但为了处理干扰, 他们使用了3个测量值$w(0,t),w(1,t),w_t(0,t)$. 由于内部不确定性通常出现在工程实践中, 文献[20]考虑了既有内部不确定性又有外部干扰的系统; 构造了一个无穷维扰动估计器来估计总扰动; 他们只使用了两个测量值$w(0,t)$和$w(1,t)$. 文献[20]相比文献[16]的优点是删除了度量值$w_t(0,t)$. 然而, 由于设计了一个额外的观测器来估计原始系统的状态, 闭环系统[20, (5.29) 和(5.30)]相当复杂: 它由4个波动方程和3个传输方程构成.

在本文中, 只考虑两个测量值$w(1,t)$和$w_t(0,t)$)(这继承了文献[20]的优点), 并且没有设计额外的观测器(这继承了文献[16]的优点). 由于系统关于时间是二阶的, 测量值$w_t(0,t)$与文献[16,20]中的$w(0,t)$区别很大, $w_t(0,t)$不能被视为位移$w(0,t)$的导数, 而$w(0,t)$不能被认为是$w_t(0,t)$的积分; 它们应被视为不同的测量值. 事实上, 正如文献[11]中所述, 几乎所有柔性结构边界控制的结果都是通过测量边界处的速度来实现的. 为了设计稳定控制律, 核心思想是构造一个无穷维扰动估计器, 同时估计状态和总扰动. 这与参考文献[2,20]大不相同, 后者仅使用估计的总扰动, 并设计额外的状态观测器来估计状态; 这使本文能够导出一个相对简单的闭环系统(不需要额外的状态观测器).

本文的安排如下: 在第2节中, 通过引入了一个辅助系统把总干扰转移到一个指数稳定系统中, 然后构造了包括这个辅助系统在内的一个无穷维干扰估计器, 用于实时估计状态和总扰动; 第3节设计一种基于干扰估计器的输出反馈控制律, 并用半群方法证明闭环系统是指数稳定的; 在第4节, 给出了一些数值模拟.

2 干扰估计器设计

本节的目的是设计一个无限维干扰估计器来估计系统(1)的状态$(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))$和总扰动$F(t)$. 由于当$F(t)+u(t)=0$时的系统(1)是反稳定的, 处理干扰并不是那么容易. 为了克服这个困难, 首先引入一个辅助系统

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t)=v_{xx}(x,t),\\ v_x(0,t)=-qw_t(0,t)+c_0[v_t(0,t)-w_t(0,t)],\\ v_x(1,t)=u(t)-c_1[v(1,t)-w(1,t)],\end{cases} \tag{5}$$

其中$c_0, c_1 > 0$为调节参数. 显然，系统(5)完全由系统(1)的输入和输出决定. 令$\hat{v}(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$, 得

$$\begin{cases} \hat{v}_{tt}(x,t) = \hat{v}_{xx}(x,t), \\ \hat{v}_x(0,t) = c_0\hat{v}_t(0,t), \\ \hat{v}_x(1,t) = -F(t) - c_1\hat{v}(1,t). \end{cases} \tag{6}$$

定义Hilbert空间$\mathcal{H}_1 = H^1(0,1)\times L^2(0,1)$, 其内积诱导范数为$\|(f,g)\|^2_{\mathcal{H}_1} = \int_0^1[|f'(x)|^2 + |g(x)|^2]\mathrm{d}x + c_1|f(1)|^2, \forall (f,g)\in\mathcal{H}_1$.本文定义算子$\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1)(\subset \mathcal{H}_1) \to H_1$为$\mathcal{A}_1(f,g) = (g, f''), \forall (f,g) \in D(\mathcal{A}_1) = \{(f,g)\in\mathcal{H}_1|\mathcal{A}_1(f,g)\in\mathcal{H}_1, f'(0) = c_0g(0), f'(1) = -c_1f(1)\}$. 则系统(6)的抽象形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{v}(\cdot,t), \hat{v}_t(\cdot,t)) = \mathcal{A}_1(\hat{v}(\cdot,t), \hat{v}_t(\cdot,t)) - \mathcal{B}_1F(t), \tag{7}$$

其中$\mathcal{B}_1 = [0\ \ \delta(x-1)]^{\mathrm{T}}$, δ为Dirac分布.

熟知, 算子$\mathcal{A}_1$生成一个指数稳定C_0–半群[23]. 这表明系统(5)把$F(t)$转移到了一个指数稳定系统, 且不带输入$u(t)$. 从而相对于原系统, $F(t)$更容易处理.

引理 1　假设$d\in L^\infty(0,\infty)$ (或$d\in L^2(0,\infty)$), 函数$f : \mathcal{H}_1 \to R$连续, 系统(1)存在唯一的有界解$(w, w_t) \in C(0,\infty;\mathcal{H}_1)$. 则对任意的初值$(\hat{v}(\cdot,0), \hat{v}_t(\cdot,0))\in\mathcal{H}_1$, 系统(7)存在唯一的有界解满足$(\hat{v}, \hat{v}_t) \in C(0,\infty;\mathcal{H}_1)$, $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|(\hat{v}(\cdot,t), \hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1} < +\infty$. 进一步, 若$\lim\limits_{t\to\infty} f(w,w_t) = 0$和$d\in L^2(0,\infty)$, 则$\lim\limits_{t\to\infty}\|(\hat{v}(\cdot,t), \hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1} = 0$.

证　由假设得$F(t) = f(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t)) + d(t)\in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$. 由文献[8]得$\mathcal{B}_1$关于半群$e^{\mathcal{A}_1t}$容许. 由文献[25], 对任意得初值$(\hat{v}(\cdot,0), \hat{v}_t(\cdot,0)) \in \mathcal{H}_1$, 系统(7)存在唯一的解$(\hat{v}, \hat{v}_t)\in C(0,\infty;\mathcal{H}_1)$, 满足文献[20]的引理2.1. $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|(\hat{v}(\cdot,t), \hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1} < +\infty$. 由文献[20]中的引理2.1, 若$\lim\limits_{t\to\infty} f(w,w_t) = 0$, $d \in L^2(0,\infty)$, 则$\lim\limits_{t\to\infty}\|(\hat{v}(\cdot,t), \hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1} = 0$.　　证毕.

现在对未知输入系统(6)设计如下观测器:

$$\begin{cases} z_{tt}(x,t) = z_{xx}(x,t), \\ z_x(0,t) = c_0z_t(0,t), \\ z(1,t) = v(1,t) - w(1,t). \end{cases} \tag{8}$$

令$\hat{z} = z - \hat{v}$, 得到观测器的误差系统

$$\begin{cases} \hat{z}_{tt}(x,t) = \hat{z}_{xx}(x,t), \\ \hat{z}_x(0,t) = c_0\hat{z}_t(0,t), \quad \hat{z}(1,t) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

定义Hilbert空间$\mathcal{H}_2 = H^1_{\mathrm{e}}(0,1)\times L^2(0,1)$, $H^2_e(0,1) = \{f\in H^1(0,1)|f(1) = 0\}$, 其范数为$\|(f,g)\|^2_{\mathcal{H}_2} = \int_0^1[|f'(x)|^2 + |g(x)|^2]\mathrm{d}x, \forall (f,g) \in \mathcal{H}_2$. 本文定义算子$\mathcal{A}_2 : D(\mathcal{A}_2)(\subset \mathcal{H}_2) \to \mathcal{H}_2$为$\mathcal{A}_2(f,g) = (g, f'')$, $\forall (f,g)\in D(\mathcal{A}_2) = \{(f,g)\in (H^1_{\mathrm{e}}\cap H^2(0,1))\times H^1_{\mathrm{e}}(0,1)|f'(0) = c_0g(0)\}$. 则系统(9)的抽象形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{z}(\cdot,t), \hat{z}_t(\cdot,t)) = \mathcal{A}_2(\hat{z}(\cdot,t), \hat{z}_t(\cdot,t)). \tag{10}$$

系统(10)指数稳定: 存在常数$M_{\mathcal{A}_2}, w_{\mathcal{A}_2} > 0$使得

$$\|\mathrm{e}^{\mathcal{A}_2t}\|_{\mathcal{H}_2} \leqslant M_{\mathcal{A}_2}\mathrm{e}^{-w_{\mathcal{A}_2}t},\ t\geqslant 0. \tag{11}$$

引理 2　假设$(\hat{z}\cdot,0), \hat{z}_t(\cdot,0)\in D(\mathcal{A}_2)$, 存在常数$\gamma_1 > 0$使$|\hat{z}_x(1,t)|\leqslant\gamma_1\mathrm{e}^{-w_{\mathcal{A}_2}t}$, 其中$w_{\mathcal{A}_2}$由式(11)给出.

证　直接在文献[16]中推论2.1的证明中令$c_0 = 0$即得结论.　　证毕.

结合系统(5)和系统(8)得到无穷维干扰估计器

$$\begin{cases} lv_{tt}(x,t) = v_{xx}(x,t), \\ v_x(0,t) = -qw_t(0,t) + c_0[v_t(0,t) - w_t(0,t)], \\ v_x(1,t) = u(t) - c_1[v(1,t) - w(1,t)], \\ z_{tt}(x,t) = z_{xx}(x,t), \\ z_x(0,t) = c_0z_t(0,t),\ \ z(1,t) = v(1,t) - w(1,t), \end{cases} \tag{12}$$

其只依赖于系统(1)的输入和输出.

注 1　和文献[16]的式(4.4)相似, 本文的无穷维干扰估计器只包含两个PDE, 而文献[20]的式(5.2)的干扰估计器包含3个PDE. 因此本文的干扰估计器比文献[20]简单.

和ADRC中的传统的扩张状态观测器一样, 无穷维干扰估计器(12)也同时用于估计状态和干扰. 事实上, 因为系统(9)由指数稳定半群描述$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_2t}$, 所以$(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t)) = (v(\cdot,t) - z(\cdot,t), v_t(\cdot,t) - z_t(\cdot,t)) + (\hat{z}(\cdot,t), \hat{z}_t(\cdot,t)) \approx (v(\cdot,t) - z(\cdot,t), v_t(\cdot,t) - z_t(\cdot,t))$. 表明, 可视$(v(\cdot,t) - z(\cdot,t), v_t(\cdot,t) - z_t(\cdot,t))$为状态$(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t))$的估计. 由引理2和式(6), 对$(\hat{z}(\cdot,0), \hat{z}_t(\cdot,0)) \in D(\mathcal{A}_2)$, 有$F(t) = -\hat{v}_x(1,t) - c_1\hat{v}(1,t) = -z_x(1,t) - c_1z(1,t) + \hat{z}_x(1,t) \approx -z_x(1,t) - c_1z(1,t)$. 即, 当初始条件$(\hat{z}(\cdot,0), \hat{z}_t(\cdot,0))$光滑时, $-z_x(1,t) - c_1z(1,t)$为总干扰$f(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t)) + d(t)$的估计. 下一节将证明初始条件光滑性事实上可以去掉.

3　输出反馈控制器设计

基于上一节的无穷维干扰估计器, 本节的目标是设计系统(1)的输出反馈控制器. 受文献[16]的式(3.3)启发, 首先引入变量$\widetilde{w}(x,t) = w(x,t) + W(x,t)$, 其中$W(x,t)$满足

$$\begin{cases} W_t(x,t) + W_x(x,t) = 0, \\ W(0,t) = -c_2(v(0,t) - z(0,t)). \end{cases} \tag{13}$$

结合式(1)和式(13)得到

$$\begin{cases}\widetilde{w}_{tt}(x,t)=\widetilde{w}_{xx}(x,t),\\ \widetilde{w}_x(0,t)=\dfrac{c_2-q}{1-c_2}\widetilde{w}_t(0,t)-\dfrac{c_2(1-q)}{1-c_2}\hat{z}_t(0,t),\\ \widetilde{w}_x(1,t)=u(t)+f(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))+d(t)+\\ \qquad W_x(1,t).\end{cases}\tag{14}$$

本文的输出反馈控制器设计为

$$u(t)=z_x(1,t)+c_1z(1,t)-c_1[w(1,t)+W(1,t)]-W_x(1,t),$$

其中前两项用于抵消总干扰, 剩下的项用于稳定系统(1). 对应的闭环系统为

$$\begin{cases}w_{tt}(x,t)=w_{xx}(x,t),\\ w_x(0,t)=-qw_t(0,t),\\ w_x(1,t)=z_x(1,t)-c_1[w(1,t)+W(1,t)]-\\ \qquad W_x(1,t)+f(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))+\\ \qquad d(t)+c_1z(1,t),\\ v_{tt}(x,t)=v_{xx}(x,t),\\ v_x(0,t)=-qw_t(0,t)+c_0[v_t(0,t)-w_t(0,t)],\\ v_x(1,t)=z_x(1,t)+c_1z(1,t)-c_1[w(1,t)+\\ \qquad W(1,t)]-c_1[v(1,t)-w(1,t)]-\\ \qquad W_x(1,t),\\ W_t(x,t)+W_x(x,t)=0,\\ W(0,t)=-c_2(v(0,t)-z(0,t)),\\ z_{tt}(x,t)=z_{xx}(x,t),\\ z_x(0,t)=c_0z_t(0,t),\ \ z(1,t)=v(1,t)-w(1,t),\end{cases}\tag{15}$$

该系统显然是非线性的.

注 2 和文献[16]的式(5.2)一样, 本文的闭环系统(15)只包含3个波方程和1个传输方程, 文献[20]的式(5.29)和(5.30)包含4个波方程和3个传输方程. 尽管闭环系统(15)和文献[16]的式(5.2)有同的方程个数, 本文仅用2个输出量侧, 而文献[16]用了3个量测且不包含内部非线性不确定性. 这表明本文方法比文献[16,20]更有效更节能.

显然, 闭环系统(15)等价于

$$\begin{cases}\hat{v}_{tt}(x,t)=\hat{v}_{xx}(x,t),\quad \hat{v}_x(0,t)=c_0\hat{v}_t(0,t),\\ \hat{v}_x(1,t)=-F(t)-c_1\hat{v}(1,t),\\ \hat{z}_{tt}(x,t)=\hat{z}_{xx}(x,t),\quad \hat{z}_x(0,t)=c_0\hat{z}_t(0,t),\\ \hat{z}(1,t)=0,\qquad \widetilde{w}_{tt}(x,t)=\widetilde{w}_{xx}(x,t),\\ \widetilde{w}_x(0,t)=\dfrac{c_2-q}{1-c_2}\widetilde{w}_t(0,t)-\dfrac{c_2(1-q)}{1-c_2}\hat{z}_t(0,t),\\ \widetilde{w}_x(1,t)=\hat{z}_x(1,t)-c_1\widetilde{w}(1,t),\\ W_t(x,t)+W_x(x,t)=0,\\ W(0,t)=-\dfrac{c_2}{1-c_2}(\widetilde{w}(0,t)-\hat{z}(0,t)).\end{cases}\tag{16}$$

系统(16)还是非线性的, 但是$(\widetilde{w},\hat{z})$部分是线性的, 即

$$\begin{cases}\hat{z}_{tt}(x,t)=\hat{z}_{xx}(x,t),\\ \hat{z}_x(0,t)=c_0\hat{z}_t(0,t),\hat{z}(1,t)=0,\\ \widetilde{w}_{tt}(x,t)=\widetilde{w}_{xx}(x,t),\\ \widetilde{w}_x(0,t)=\dfrac{c_2-q}{1-c_2}\widetilde{w}_t(0,t)-\dfrac{c_2(1-q)}{1-c_2}\hat{z}_t(0,t),\\ \widetilde{w}_x(1,t)=\hat{z}_x(1,t)-c_1\widetilde{w}(1,t).\end{cases}\tag{17}$$

本文在Hilbert空间$\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$把系统(17)写成抽象形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t))=\mathcal{A}_3(\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t))+\\ \mathcal{B}_{31}[-\dfrac{c_2(1-q)}{1-c_2}\hat{z}_t(0,t)]+\mathcal{B}_{32}\hat{z}_x(1,t),\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))=\mathcal{A}_2(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t)),\end{cases}\tag{18}$$

其中$\mathcal{A}_3$定义为$\mathcal{A}_3(f,g)=(g,f''),(f,g)\in D(\mathcal{A}_3^*)=\{(f,g)\in H^2(0,1)\times H^1(0,1):f'(0)=\dfrac{c_2-q}{1-c_2}g(0),f'(1)=-c_1f(1)\}$, $\mathcal{B}_{31}=\delta(x)$, $\mathcal{B}_{32}=\delta(x-1)$.

为了证明耦合系统(18)的指数稳定性, 需要用到文献[24]中的定理. 为此, 本文需要一些概念. 设X,U和Y为Banach空间, A在X中生成C_0–半群e^{At}. 记X_{-1}^{A}为X在范数$\|R(\lambda_0,A)\|$下的完备化空间, 其中$R(\lambda_0,A)$为A在λ_0处的预解式, 称为X的外推空间. 称$B\in L(U,X_{-1})$关于半群e^{At}容许, 如果对某个(从而所有的) $t_0>0$和$u\in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;U)$有$\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{A(t-s)}Bu(s)\mathrm{d}s\in X$, $\|\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{A(t-s)}Bu(s)\mathrm{d}s\|\leqslant W_{A,B}(t_0)(\int_0^{t_0}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s)^{1/2}$成立, 其中$W_{A,B}:(0,\infty)\to[0,\infty)$为依赖$A$和$B$的单调增函数[25]. 称$C\in L(D(A),U)$关于半群$\mathrm{e}^{At}$容许, 若对任意的$x\in D(A)$和某个(从而所有的) $t_0>0$, 有$\int_0^{t_0}\|C\mathrm{e}^{As}x\|^2\mathrm{d}s\leqslant V^2_{A,C}(t_0)\|x\|^2$, 其中$V_{A,C}:(0,\infty)\to[0,\infty)$为依赖于$A$和$C$的单调增函数[26].

定理 1[24, 定理2.1] 设U, $\mathcal{X}$和$\boldsymbol{X}$为Banach空间. 假设$\mathcal{A}$和$\boldsymbol{A}$分别在空间$\mathcal{X}$和$\boldsymbol{X}$生成C_0半群, $B\in L(U,\mathcal{X}_{-1}^{\mathcal{A}})$和$C\in L(D(\boldsymbol{A}),U)$关于半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}t}$和$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$容许. 则算子$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}\mathcal{A} & BC\\ 0 & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$, $D(\mathfrak{A})=\{(f,g)\in\mathcal{X}\times D(\boldsymbol{A}):\mathcal{A}f+BCg\in\mathcal{X}\}$生成$C_0$半群. 进一步, 如果$\mathrm{e}^{\mathcal{A}t}$和$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$指数稳定, 则$\mathrm{e}^{\mathfrak{A}t}$指数稳定.

定理 2 对任意初始条件$(\hat{z}(\cdot,0),\hat{z}_t(\cdot,0),\widetilde{w}(\cdot,0),\widetilde{w}_t(\cdot,0))\in\mathcal{H}_2\times\mathcal{H}_1$, 系统(17)存在唯一解满足$(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t),\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t))\in C(0,\infty;\mathcal{H}_2\times\mathcal{H}_1)$, 并且该解指数稳定

$$\|(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t),\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_2\times\mathcal{H}_1}\leqslant$$

$$M_3\mathrm{e}^{-\gamma t}\|(\hat{z}(\cdot,0),\hat{z}_t(\cdot,0),\widetilde{w}(\cdot,0),\widetilde{w}_t(\cdot,0)\|_{\mathcal{H}_2\times\mathcal{H}_1},$$

其中M_3和γ为两个不依赖于$(\hat{z}(\cdot,0),\hat{z}_t(\cdot,0),\widetilde{w}(\cdot,0),\widetilde{w}_t(\cdot,0))$的正常数.

证　由文献[8,23], 得到算子$\mathcal{B}_{32}$和$\mathcal{B}_{31}$关于半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_3t}$容许. 再注意到, 将$\hat{z}_t(0,t)$和$\hat{z}_x(0,t)$视为系统(9)的输出, 其观测算子关于半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_2t}$容许. 由定理1立即得到结论.　证毕.

定理 3　假设$(c_2-q)/(1-c_2)>0$, 那么对任意满足相容性条件$z(1,0)=v(1,0)-w(1,0)$的初始条件$(w(\cdot,0),w_t(\cdot,0),v(\cdot,0),v_t(\cdot,0),z(\cdot,0),z_t(\cdot,0),W(\cdot,0))\in\mathcal{H}_1^3\times H^1(0,1)$, 其解$(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t),W(\cdot,t))$存在且关于时间$t$连续. 进一步, 有

$$\begin{aligned}&\|(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t),W(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1\times H^1(0,1)}\leqslant\\&M_4^*\mathrm{e}^{-\gamma t}\|(\widetilde{w}(\cdot,0),\widetilde{w}_t(\cdot,0),\hat{z}(\cdot,0),\hat{z}_t(\cdot,0),\\&W(\cdot,0))\|_{\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2\times H^1(0,1)},\quad t\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中M_4^*为不依赖于初值的正常数.

证　由假设可得$(\hat{z}(\cdot,0),\hat{z}_t(\cdot,0),\widetilde{w}(\cdot,0),\widetilde{w}_t(\cdot,0))=(z(\cdot,0)-v(\cdot,0)+w(\cdot,0),z_t(\cdot,0)-v_t(\cdot,0)+w_t(\cdot,0),w(\cdot,0)+W(\cdot,0),w_t(\cdot,0)+W_t(\cdot,0))\in\mathcal{H}_2\times\mathcal{H}_1$. 由定理2, 系统(17)存在唯一解满足$(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t),\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t))\in C(0,\infty;\mathcal{H}_2\times\mathcal{H}_1)$. 显然$W(x,t)$表示为

$$W(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{c_2}{1-c_2}[\widetilde{w}_t(0,t-x)-\hat{z}_t(0,t-x)],\\\qquad\qquad\qquad t\geqslant x\geqslant 0,\\W(x-t,0),\qquad 1\geqslant x>t.\end{cases}$$

则解$(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t),W(\cdot,t))$存在且关于时间$t$连续. 记$E(t)=\|(\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))\|^2_{\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2}$, $\rho_4(t)=\int_0^1(x-1)[\widetilde{w}_t(x,t)\widetilde{w}_x(x,t)+\hat{z}_t(x,t)\hat{z}_x(x,t)]\mathrm{d}t$, $t\geqslant 0$. 本文有$|\rho_4(t)|\leqslant\dfrac{1}{2}\|(\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))\|^2_{\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2}$. 计算$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_4(t)=(x-1)\dfrac{1}{2}[|\widetilde{w}_t(x,t)|^2+|\widetilde{w}_x(x,t)|^2+|\hat{z}_t(x,t)|^2+|\hat{z}_x(x,t)|^2]|_{x=0}^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1[|\widetilde{w}_t(x,t)|^2+|\widetilde{w}_x(x,t)|^2+|\hat{z}_t(x,t)|^2+|\hat{z}_x(x,t)|^2]\mathrm{d}t$得到

$$|\widetilde{w}_t(0,t)|^2+|\hat{z}_t(0,t)|^2\leqslant 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_4(t)+M_3^2\mathrm{e}^{-2\gamma t}E(0).$$

情况1　$t\geqslant 1$. 此时有$W_x(x,t)=-W_t(x,t)=\dfrac{c_2}{1-c_2}[\widetilde{w}_t(0,t-x)+\hat{z}_t(0,t-x)]$. 则

$$\begin{aligned}&\int_{t-1}^t(|\widetilde{w}_t(0,s)|^2+|\hat{z}_t(0,s)|^2)\mathrm{d}s\leqslant\\&2\rho_4(t)-2\rho_4(t-1)+M_3^2E(0)\int_{t-1}^t\mathrm{e}^{-2\gamma s}\mathrm{d}s\leqslant\\&M_3^2(1+\mathrm{e}^{2\gamma}+\frac{\mathrm{e}^{2\gamma}-1}{2\gamma})\mathrm{e}^{-2\gamma t}E(0).\end{aligned}$$

本文得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1|W_x(x,t)|^2\mathrm{d}x=\int_0^1|W_t(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}\int_0^1[|\widetilde{w}_t(0,t-x)|^2+|\hat{z}_t(0,t-x)|^2]\mathrm{d}x\leqslant\\&M_3^2\frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+\mathrm{e}^{2\gamma}+\frac{\mathrm{e}^{2\gamma}-1}{2\gamma})\mathrm{e}^{-2\gamma t}E(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|W(1,t)|^2=\frac{c_2^2}{(1-c_2)^2}|\widetilde{w}(0,t-1)+\hat{z}(0,t-1)|^2\leqslant\\&\frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}[|\widetilde{w}(0,t-1)|^2+|\hat{z}(0,t-1)|^2]\leqslant\\&\frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}[(|\widetilde{w}(1,t-1)|+\int_0^1|\widetilde{w}_x(x,t-1)|\mathrm{d}x)^2+\\&(\int_0^1|\hat{z}_x(x,t-1)|\mathrm{d}x)^2]\leqslant\\&\frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}[2|\widetilde{w}(1,t-1)|^2+2\int_0^1|\widetilde{w}_x(x,t-1)|^2\mathrm{d}x+\\&\int_0^1|\hat{z}_x(x,t-1)|^2\mathrm{d}x]\leqslant\\&\frac{4c_2^2M_3^2}{(1-c_2)^2}(c_1+1)\mathrm{e}^{2\gamma}\mathrm{e}^{-2\gamma t}E(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^1|W(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}\int_0^1[|\widetilde{w}(0,t-x)|^2+|\hat{z}(0,t-x)|^2]\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}\int_{t-1}^t[2|\widetilde{w}(1,s)|^2+2\int_0^1|\widetilde{w}_x(x,s)|^2\mathrm{d}s+\\&\int_0^1|\hat{z}_x(x,s)|^2\mathrm{d}x]\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{4c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+c_1)\int_{t-1}^tE(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{4c_2^2}{\gamma(1-c_2)^2}(1+c_1)M_3^2(\mathrm{e}^{2\gamma}-1)\mathrm{e}^{-2\gamma t}E(0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t),W(\cdot,t))\|^2\leqslant\\&2\|(\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t))\|^2+2\int_0^1[|W_t(x,t)|^2+\\&|W_x(x,t)|^2]\mathrm{d}x+2c_1|W(1,t)|^2+\\&2\int_0^1[|W(x,t)|^2+|W_x(x,t)|^2]\mathrm{d}x\leqslant\\&2M_3^2[1+\frac{6c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+\mathrm{e}^{2\gamma}+\frac{\mathrm{e}^{2\gamma}}{2\gamma})+\\&\frac{4c_1c_2^2}{\gamma(1-c_2)^2}(1+c_1)(\mathrm{e}^{2\gamma}-1)]\mathrm{e}^{-2\gamma t}E(0)+\\&\frac{4c_1c_2^2}{(1-c_2)^2}(c_1+1)\mathrm{e}^{2\gamma}\leqslant\\&M_4^2\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|(\widetilde{w}(\cdot,0),\widetilde{w}_t(\cdot,0),\hat{z}(\cdot,0),\hat{z}_t(\cdot,0))\|^2,\end{aligned}$$

其中$M_4^2=2M_3^2[\dfrac{4c_1c_2^2}{2\omega(1-c_2)^2}(1+c_1)M_3^2(\mathrm{e}^{2\omega}-1)+$

$$\frac{6c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+\mathrm{e}^{2\omega}+\frac{\mathrm{e}^{2\omega}}{2\omega})+\frac{8c_1c_2^2}{(1-c_2)^2}(c_1+1)+1].$$

情况2 $0\leqslant t<1$. 此时有

$$\int_0^1|W(x,t)|^2\mathrm{d}x=\int_0^t|W(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_t^1|W(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}\int_0^t[|\widetilde{w}(0,s)|^2+|\hat{z}(0,s)|^2]\mathrm{d}s+\int_0^{1-t}|W(x,0)|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{4c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+c_1)\int_0^1E(s)\mathrm{d}s+\int_0^1|W(x,0)|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{4c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+c_1)M_3^2E(0)+\int_0^1|W(x,0)|^2\mathrm{d}x,$$

其中用到了$\hat{z}(1,s)=0$. 从而

$$\int_0^1|W_x(x,t)|^2\mathrm{d}x=\int_0^t|W_t(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_t^1|W_t(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}\int_0^t[|\widetilde{w}_t(0,s)|^2+|\hat{z}_t(0,s)|^2]\mathrm{d}s+\int_0^{1-t}|W_x(x,0)|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{2c_2^2}{(1-c_2)^2}M_3^2(\mathrm{e}^{-2\gamma}+1+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\gamma}}{2\gamma})E(0)+\int_0^1|W_x(x,0)|^2\mathrm{d}x,$$

进而得到

$$|W(1,t)|^2=|W(1-t,0)|^2\leqslant 2|W(0,0)|^2+2\int_0^1|W_x(x,0)|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{c_2^2}{(1-c_2)^2}[|\widetilde{w}(0,0)|^2+|\hat{z}(0,0)|^2]+2\int_0^1|W_x(x,0)|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{4c_2^2}{(1-c_2)^2}(c_1+1)E(0)+2\int_0^1|W_x(x,0)|^2\mathrm{d}x.$$

因此, 有

$$\|(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t),W(\cdot,t))\|^2\leqslant 2\|(\widetilde{w}(\cdot,t),\widetilde{w}_t(\cdot,t))\|^2+2\int_0^1[|W_t(x,t)|^2+2c_1|W(1,t)|^2+2\int_0^1[|W(x,t)|^2+|W_x(x,t)|^2]\mathrm{d}x+|W_x(x,t)|^2]\mathrm{d}x\leqslant 2[M_3^2+\frac{6c_2^2M_3^2}{(1-c_2)^2}(2+\frac{1}{2\omega})+\frac{4c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+c_1)+\frac{4c_1c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+c_1)]E(0)+(6+4c_1)\|W(\cdot,0)\|^2_{H^1(0,1)}\leqslant M_5^2\|(\widetilde{w}(\cdot,0),\widetilde{w}_t(\cdot,0),\hat{z}(\cdot,0),\hat{z}_t(\cdot,0),W(\cdot,0))\|^2,$$

其中$M_5^2=2[M_3^2+\frac{6c_2^2M_3^2}{(1-c_2)^2}(2+\frac{1}{2\omega})+\frac{4c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+c_1)+\frac{4c_1c_2^2}{(1-c_2)^2}(1+c_1)]+(6+4c_1)$. 取$M_4^*=\max\{M_4,M_5\mathrm{e}^{\gamma}\}$即得到所需结论. 证毕.

定理3表明本文的控制器能够稳定原系统. 为了使控制过程有意义, 闭环系统(15)还必须有界, 下面的定理4就研究这个问题.

定理 4 假设$d\in L^\infty(0,\infty)$(或者$d\in L^2(0,\infty)$, 函数$f:H\to\mathbb{R}$连续. 对任意满足相容性条件$z(1,0)=v(1,0)-w(1,0)$的初值$(w(\cdot,0),w_t(\cdot,0),v(\cdot,0),v_t(\cdot,0),z(\cdot,0),z_t(\cdot,0),W(\cdot,t))\in\mathcal{H}_1^3\times H^1(0,1)$, 系统(15)存在唯一解$(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t),v(\cdot,t),v_t(\cdot,t),z(\cdot,t),z_t(\cdot,t),W(\cdot,t))\in C(0,\infty;\mathcal{H}_1^3\times H^1(0,1))$. 那么闭环系统一致有界: $\sup\limits_{t\geqslant0}\|(v(\cdot,t),v_t(\cdot,t),z(\cdot,t),z_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}^2}\leqslant+\infty$. 进而, 若$f(0,0)=0$和$d\in L^2(0,\infty)$, 可得系统渐近稳定: $\lim\limits_{t\to\infty}\|(v(\cdot,t),v_t(\cdot,t),z(\cdot,t),z_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}^2}=0$.

证 事实上, 定理3已经证明$(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t),W(\cdot,t))\in C([0,\infty),\mathcal{H}_1\times H^1(0,1))$. 这表明$g(t)=f(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))\in L^\infty(0,\infty)$.

由引理1, 对任意的初值$(\hat{v}(\cdot,0),\hat{v}_t(\cdot,0))\in\mathcal{H}_1$, 系统(7)存在唯一解满足$(\hat{v},\hat{v}_t)\in C(0,\infty;\mathcal{H}_1)$和$\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}<+\infty$. 故$(v(\cdot,t),v_t(\cdot,t))=(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))+(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))$唯一取定且关于$t$连续, $\sup\limits_{t\geqslant0}\|(v(\cdot,t),v_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}<+\infty$. 进而, $(z(\cdot,t),z_t(\cdot,t))=(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))+(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))$唯一确定且关于$t$连续, $\sup\limits_{t\geqslant0}|(z(\cdot,t),z(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}\leqslant\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}+\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}=\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_2}+\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}+\infty$, $\sup\limits_{t\geqslant0}\|(z(\cdot,t),z(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}\leqslant\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}+\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}=\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{z}(\cdot,t),\hat{z}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_2}+\sup\limits_{t\geqslant0}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}+\infty$, 因为$e^{\mathcal{A}_2t}$为指数稳定$C_0$–半群.

如果另外还有$f(0,0)=0$, 则$\lim\limits_{t\to\infty}f(w,w_t)=0$. 再结合$d\in L^2(0,\infty)$和引理1, 得到$\lim\limits_{t\to\infty}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}=0$. 那么$\lim\limits_{t\to\infty}\|(v(\cdot,t),v_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}=\lim\limits_{t\to\infty}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))+(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\|(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}=\lim\limits_{t\to\infty}\|(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))+(\hat{v}(\cdot,t),\hat{v}_t(\cdot,t))\|_{\mathcal{H}_1}=0$. 证毕.

注 3 i) 和文献[20]中性质5.1相似, 若$f:\mathcal{H}_1\to\mathbb{R}$, $f(0,0)=0$连续且在$\mathcal{H}_1$在中满足全局Lipschitz条件, 则对任意的$(w(\cdot,0),w_t(\cdot,0))\in\mathcal{H}_1$, $L^2_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$和$d\in L^2_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$, 开环系统(1)存在唯一的全局解满足$(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t))\in C(0,\infty;\mathcal{H}_1)$.

ii) 对于本文的定理4, 不同于开环系统, 闭环系统(15)中$f(w, w_t)$的全局Lipschitz条件被去掉了. 主要有3方面原因: 1) 式(17)为线性子系统, 且由半群理论可得到$(\widetilde{w}(\cdot,t), \widetilde{w}_t(\cdot,t))$的存在连续性和指数稳定性; 2) 本文用系统(16)的W部分得$(\widetilde{w}(\cdot,t), \widetilde{w}_t(\cdot,t))$存在连续性和指数稳定性; 3) $(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t))$的存在连续性和有界性可由原因1)和原因2)得到, 于是把$f(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t)) + d(t)$视为系统(16)的$\hat{q}$部分的边界非齐次项, 得到$(\hat{v}(\cdot,t), \hat{v}_t(\cdot,t))$的存在唯一性.

4　数值模拟

本节针对闭环系统(15), 在MATLAB中采用有限差分方法做一些数值模拟. 选择时间和空间步长分别为1/200和1/100. 选取非线性内部不确定和外部干扰分别为$f(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t)) = \sin(w(1,t))$和$d(t) = \sin(2t)$. 参数和初值选取$q = 0.5,\ c_0 = c_1 = 1,\ c_2 = 0.8, w(x,0) = x^2 - 2x,\ w_t(x,0) = 0,\ z(x,0) = x^3,\ z_t(x,0) = 0,\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, W(x,0) = 2x$.

图 1–4 分别表示闭环系统 (15) 的状态 $w(x,t)$, $W(x,t)$, $v(x,t)$和$z(x,t)$. 数值结果显示, 闭环系统的状态$w(x,t)$和$W(x,t)$ 随时间的增加迅速衰减, 这展示了定理3的有效性; 状态$v(x,t)$和$z(x,t)$始终保持有界, 这表明了定理4的正确性.

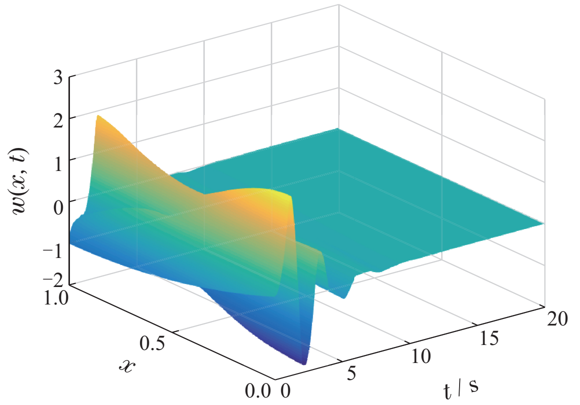

图 1　状态$w(x,t)$

Fig. 1　The state of $w(x,t)$

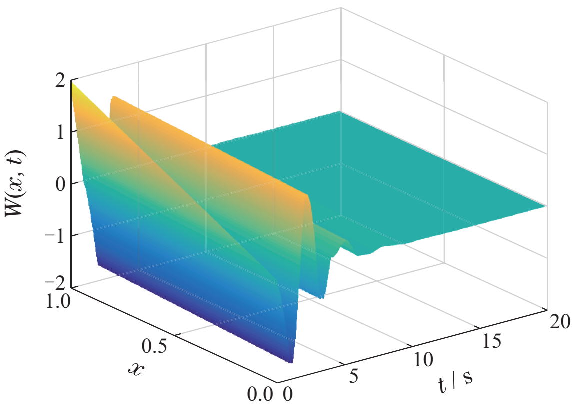

图 2　状态$W(x,t)$

Fig. 2　The state of $W(x,t)$

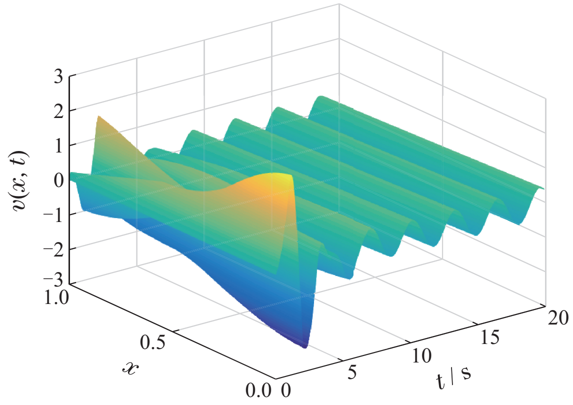

图 3　状态$v(x,t)$

Fig. 3　The state of $v(x,t)$

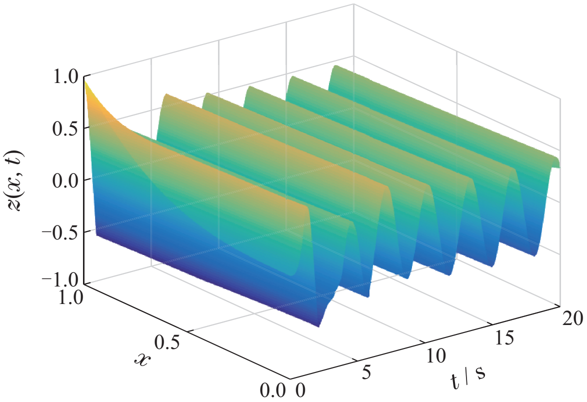

图 4　状态$z(x,t)$

Fig. 4　The state of $z(x,t)$

参考文献:

[1] JIN F F, GUO B Z. Lyapunov approach to output feedback stabilization for the Euler-Bernoulli beam equation with boundary input disturbance. *Automatica*, 2015, 52: 95 – 102.

[2] ZHOU H C, FENG H. Disturbance estimator based output feedback exponential stabilization for Euler-Bernoulli beam equation with boundary control. *Automatica*, 2018, 91: 79 – 88.

[3] GUO B Z, ZHOU H C, AL-FHAID A S, et al. Stabilization of Euler-Bernoulli beam equation with boundary moment control and disturbance by active disturbance rejection control and sliding mode control approaches. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2014, 20: 539 – 558.

[4] PAUNONEN L, POHJOLAINEN S. The internal model principle for systems with unbounded control and observation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2014, 52(6): 3967 – 4000.

[5] REBARBER R, GEISS G. Internal model based tracking and disturbance rejection for stable well-posed systems. *Automatica*, 2003, 39: 1555 – 1569.

[6] GUO B Z, KANG W. The Lyapunov approach to boundary stabilization of an anti-stableone-dimensional wave equation with boundary disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(1): 54 – 69.

[7] CHENG M B, RADISAVLJEVIC V, SU W C. Sliding mode boundary control of a parabolic pde system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, 2011, 47: 381 – 387.

[8] GUO B Z, JIN F F. Sliding mode and active disturbance rejection control to the stabilization of anti-stable one-dimensional wave equation

subject to boundary input disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58: 1269 – 1274.

[9] GUO B Z, JIN F F. The active disturbance rejection and sliding mode control approach to the stabilization of Euler-Bernoulli beam equation with boundary input disturbance. *Automatica*, 2013, 49: 2911 – 2918.

[10] GUO W, GUO B Z. Performance output tracking for a wave equation subject to unmatched general boundary harmonic disturbance. *Automatica*, 2016, 68: 194 – 202.

[11] GUO W, SHAO Z C, KRSTIC M. Adaptive rejection of harmonic disturbance anticollocated with control in 1D wave equation. *Automatica*, 2017, 79: 17 – 26.

[12] KRSTIC M. Adaptive control of an anti-stable wave PDE. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2010, 17: 853 – 882.

[13] LIU J, WANG J, GUO Y. Output tracking for one dimensional schrödinger equation subject to boundary disturbance. *Asian Journal of Control*, 2018, 20(2): 659 – 668.

[14] HAN J Q. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900 – 906.

[15] FENG H, GUO B Z. New unknown input observer and output feedback stabilization for uncertain heat equation. *Automatica*, 2017, 86: 1 – 10.

[16] FENG H, GUO B Z. A new active disturbance rejection control to output feedback stabilization for a one-dimensional anti-stable wave equation with disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3774 – 3787.

[17] FENG H, GUO B Z. Active disturbance rejection control: Old and new results. *Annual Reviews in Control*, 2017, 44: 238 – 248.

[18] GUO B Z, ZHOU H C. The active disturbance rejection control to stabilization for multi-dimensional wave equation with boundary control matched disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 60(1): 143 – 157.

[19] ZHOU H C, GUO B Z. Unknown input observer design and output feedback stabilization for multi-dimensional wave equation with boundary control matched uncertainty. *Journal of Differential Equations*, 2017, 263(4): 2213 – 2246.

[20] ZHOU H C, WEISS G. Output feedback exponential stabilization for one-dimensional unstable wave equations with boundary control matched disturbance. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(6): 4098 – 4129.

[21] ZHOU H C, FENG H. Stabilization for Euler-Bernoulli beam equation with boundary moment control and disturbance via a new disturbance estimator. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2021, 27(2): 247 – 259.

[22] BRESCH-PIETRI D, KRSTIC K. Output-feedback adaptive control of a wave PDE with boundary anti-damping. *Automatica*, 2014, 50: 1407 – 1415.

[23] ZHOU H C, GUO B Z. Performance output tracking for one-dimensional wave equation with a general disturbance. *European Journal of Control*, 2018, 39: 39 – 52.

[24] MEI Z D. Exponential stability of a class of infinite dimensional coupled systems. *ArXiv Preprint*, 2019: arXiv:1911.07238.

[25] WEISS G. Admissibility of unbounded control operators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1989, 27(3): 527 – 545.

[26] WEISS G. Admissible observation operators for linear semigroups. *Israel Journal of Mathematics*, 1989, 65(1): 17 – 43.

作者简介:

梅占东 副教授, 目前研究方向为分布参数系统的控制理论, E-mail: zhdmei@mail.xjtu.edu.cn;

竺 迪 硕士研究生, 目前研究方向为偏微分方程的智能控制, E-mail: sakurajudy@foxmail.com.