

带非同位干扰执行动态有限维系统的输出追踪

温瑞丽, 冯红银萍[†]

(山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006)

摘要: 本文考虑了边界带有非同位干扰的波动方程和常微分方程串联系统的性能输出追踪问题. 边界带有非同位干扰的波动方程可以看作常微分方程控制系统的执行动态. 通过利用轨道规划方法将非同位干扰变换到控制通道, 于是克服了非同位干扰带来的困难. 与现有Backstepping方法不同, 文章利用动态补偿法给出了一个新的状态反馈控制器, 使得控制器设计以及所设计的控制器本身更加简单, 证明了闭环系统解的一致有界性与性能输出的指数追踪. 数值模拟表明, 所给的方法是非常有效的.

关键词: 执行动态; 串联系统; 性能输出; 指数稳定

引用格式: 温瑞丽, 冯红银萍. 带非同位干扰执行动态有限维系统的输出追踪. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1395 – 1400

DOI: 10.7641/CTA.2023.20295

Output tracking of finite dimensional system with actuator dynamics subject to non-collocated disturbance

WEN Rui-li, FENG Hong-yin-ping[†]

(School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan Shanxi 030006, China)

Abstract: In this paper, the performance output tracking problem of cascade system about wave equation subject to unmatched disturbance on the boundary and ordinary differential equation is considered. The wave equation with unmatched disturbance on the boundary can be used as the actuator dynamics of ordinary differential equation control system. By using trajectory planning method to transform the non-collocated disturbance to the control channel, the difficulty caused by the non-collocated disturbance is overcome. Different from the existing backstepping method, this paper presents a new state feedback controller by using the dynamic compensation method, which makes the design of the controller and the controller itself are much simpler. As a result, the uniform boundedness of the solution of the closed-loop system and the exponential tracking of the performance output are proved. The numerical simulation shows that the proposed method is very effective.

Key words: actuator dynamics; cascade system; performance output; exponential stability

Citation: WEN Ruili, FENG Hongyinping. Output tracking of finite dimensional system with actuator dynamics subject to non-collocated disturbance. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1395 – 1400

1 引言

近年来, 受外部干扰的分布参数系统的性能输出追踪问题已经成为了控制理论中非常重要的研究课题之一, 引起了学者们的广泛关注. 因为在很多工程控制领域中, 控制不仅要保证系统在理想的操作环境中易于操作, 而且要确保控制对不确定干扰的鲁棒性, 这些不确定性既包含来自于系统的内部干扰也包含外部干扰. 本文主要研究执行动态带非同位干扰的有限维系统的性能输出追踪问题. 为了达到这个目的, 性能输出追踪需要解决以下两方面的问题: 首先, 调

节能输出追踪上参考信号; 其次, 当控制系统无干扰时, 系统内部渐近稳定, 并且闭环系统的解应一致有界. 早在20世纪七八十年代, 一些研究学者就已经运用内模原理对集中参数系统的输出追踪问题做了系统研究^[1-3], 并且部分结果已被推广到无穷维系统中^[4-10]. 然而, 从应用角度讲, 求解内模原理中相关的调节方程组具有一定难度^[10]. 在文献[11]中, 为了镇定反稳定波动方程, 提出一个新的自抗扰控制法, 此方法也可用于处理输出追踪问题^[12], 这个估计/消除策略已被用于热方程控制系统^[13]和波动方程控制系

收稿日期: 2022-04-19; 录用日期: 2023-03-14.

[†]通信作者. E-mail: fhyp@sxu.edu.cn.

本文责任编辑: 郭宝珠.

山西省基础研究计划项目(202203021223002), 国家自然科学基金项目(62273217,12131008), 山西省回国留学人员科研项目(2020-006)资助.

Supported by the Fundamental Research Program of Shanxi Province (202203021223002), the National Natural Science Foundation of China (62273217,12131008) and the Research Project Supported by Shanxi Scholarship Council of China (2020-006).

统^[14]的性能输出追踪问题,但其控制和输出是同位的.

到目前为止,关于性能输出追踪问题的研究,大多考虑的是控制器直接施加到被控对象上的情况^[12-14],对带干扰的无穷维执行动态的性能输出追踪的研究并不多见.在实际应用中,控制器并不总是能够直接施加在控制系统本身上,控制器和系统之间往往需要执行动态来连接,例如文献[15-17]分别考虑了带有Schrödinger方程、热方程和波动方程执行动态的镇定问题.本文拟通过波动方程执行动态间接地实现有限维被控系统的性能输出追踪.除了需要处理执行动态带来的困难之外,控制设计的另一个难点在于干扰与控制是非同位的.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bw_x(0, t), & t > 0, \\ w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0, t) = d(t), & t \geq 0, \\ w_x(1, t) = u(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $X(t) \in \mathbb{R}^n$ 是被控系统的状态; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是有限维系统的系统矩阵;二元函数 $w(x, t)$ 表示波动方程执行动态的状态, $w_{tt}(x, t)$ 是函数 $w(x, t)$ 关于时间变量 t 的二阶偏导数; $w_x(x, t)$ 和 $w_{xx}(x, t)$ 分别表示函数 $w(x, t)$ 关于空间变量 x 的一阶偏导数和二阶偏导数. $u(t)$ 是控制输入; $d(t)$ 是外部干扰,且与控制输入非同位; $B \in \mathbb{R}^n$ 是被控有限维系统与波动方程执行动态之间的连接矩阵.本文目标是:给定参考信号 $y_{\text{ref}}(t)$,设计控制器 $u(t)$,通过波动方程执行动态作用使有限维系统的性能输出 $DX(t)$ 追踪上参考信号 $y_{\text{ref}}(t)$,即

$$DX(t) \rightarrow y_{\text{ref}}(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

其中 $D \in \mathbb{R}^{1 \times n}$,且式(2)中的收敛是指数的.

干扰 $d(t)$ 和参考信号 $y_{\text{ref}}(t)$ 都由如下外系统生成:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = Gv(t), & t > 0, \\ d(t) = Qv(t), & t \geq 0, \\ y_{\text{ref}}(t) = Fv(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ 和 $F \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ 为已知矩阵,外系统的初值 $v(0)$ 未知.在物理学和工程学中,耦合系统经常会出现,诸如机械耦合、电磁耦合以及耦合化学反应等^[16-17].至于波动方程和常微分方程的级联系统,是一种特殊的耦合系统,它具有很强的物理背景,常微分方程代表被控对象,波动方程代表连接被控对象和控制器之间的执行动态.

2 状态反馈

首先,为了处理波动方程执行动态的非同位干扰,引入如下轨道规划:

$$\begin{cases} \phi''(x) = \phi(x)G^2, \\ \phi(0) = Q, \quad \phi'(0) = P_1, \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\phi \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times m}$ 为向量值函数, $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$

为系统(3)中已知矩阵, $P_1 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ 由如下式(8)决定.通过计算,可得

$$\phi(x) = Q \cosh(xG) + xP_1\mathcal{G}(xG), \quad (5)$$

且

$$\mathcal{G}(z) = \begin{cases} \frac{\sinh z}{z}, & z \neq 0, z \in \mathbb{R}, \\ 1, & z = 0. \end{cases} \quad (6)$$

对连续函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$,矩阵 $f(G)$ 的定义可参考文献[2].定义变换

$$X_1(t) = X(t) - P_2v(t), \quad (7)$$

$$w_1(x, t) = w(x, t) - \phi(x)v(t),$$

选择 $P_1 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 满足

$$\begin{cases} AP_2 - P_2G + BP_1 = 0, \\ DP_2 - F = 0, \end{cases} \quad (8)$$

易知调节方程组(8)有解当且仅当

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda_i I_n - A & -B \\ -D & 0 \end{pmatrix} = n + 1, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(G), \quad (9)$$

其中: I_n 表示 n 阶单位矩阵,rank表示矩阵的秩, $\sigma(G)$ 表示矩阵 G 的特征值全体.通过变换(7)-(9),系统(1)可写为

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = AX_1(t) + Bw_{1x}(0, t), \\ w_{1tt}(x, t) = w_{1xx}(x, t), \\ w_1(0, t) = 0, \\ w_{1x}(1, t) = u(t) - (QG \sinh G + P_1 \cosh G)v(t) \triangleq \\ \quad -kw_{1t}(1, t) + U(t), \\ y_e(t) = Fv(t) - DX(t) \triangleq -DX_1(t), \end{cases} \quad (10)$$

$w_1(x, t)$ 由系统状态 $w(x, t)$ 经过可逆的轨道规划变换(7)得到,表示变换后新的系统状态, $w_{1t}(x, t)$ 表示变换后系统状态 w_1 关于时间变量 t 的一阶偏导数, $U(t)$ 表示变换后系统的控制,其中 $k > 0$, $k \neq 1$.至此,由系统(10)可容易看出,如果有限维系统稳定,则性能输出追踪的目标得以实现,这就是所采取的轨道规划设计起到的关键作用.与通常的Backstepping变换不同,本文将采用执行动态补偿法^[18]补偿变换后波动方程所描述的执行动态,使控制器通过波动方程去镇定有限维系统,从而达到目标.

接下来,将系统(10)化为抽象形式.考虑系统(10)状态空间为 $H = \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}$,其中 $\mathcal{H} = H_L^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$, $H_L^1(0, 1) = \{f \in H^1(0, 1) | f(0) = 0\}$. H 中内积定义为

$$\begin{aligned} & \langle (p_1, f_1, g_1), (p_2, f_2, g_2) \rangle_H = \\ & \langle p_1, p_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^1 f_1'(x) f_2'(x) dx + \int_0^1 g_1(x) g_2(x) dx, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\forall (p_i, f_i, g_i) \in H, i = 1, 2.$$

定义算子 $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$C(f, g) = f'(0), \quad \forall (f, g) \in \mathcal{H}. \quad (12)$$

定义算子 $A : D(A) (\subset \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ 为

$$\begin{cases} A(f, g) = (g, f''), \quad \forall (f, g) \in D(A), \\ D(A) = \{(f, g) \in (H^2(0, 1) \cap H_L^1(0, 1)) \times \\ H_L^1(0, 1) \mid f'(1) = -kg(1)\}, \end{cases} \quad (13)$$

则算子 A 在 $H_L^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ 上生成指数稳定 C_0 -半群. 事实上, 令 $A(f, g) = \lambda(f, g) \neq 0$, 则有

$$\begin{cases} f'' - \lambda^2 f = 0, \\ f(0) = 0, \quad f'(1) = -k\lambda f(1), \end{cases}$$

可得特征值为 $\lambda = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-k}{1+k} \right| + n_k \pi i$, 其中

$$n_k = \begin{cases} n - 1/2, & 0 < k < 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ n, & k > 1, \end{cases}$$

而 $k > 0, k \neq 1$, 故 $\text{Re} \lambda < 0$. 进一步, 直接计算可得 A 的共轭算子 $A^* : D(A^*) (\subset \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ 为

$$\begin{cases} A^*(p, q) = -(q, p''), \quad \forall (p, q) \in D(A^*), \\ D(A^*) = \{(p, q) \in H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) \\ q(0) = 0, \quad p'(1) = kq(1)\}. \end{cases} \quad (14)$$

由上述定义的算子(12)–(14), 系统(10)写为如下抽象形式:

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = AX_1(t) + BC(w_1(x, t), w_{1t}(x, t)), \\ \frac{d}{dt}(w_1(\cdot, t), w_{1t}(\cdot, t)) = \\ A(w_1(\cdot, t), w_{1t}(\cdot, t)) + BU(t), \end{cases} \quad (15)$$

其中: $B = (0, \delta(\cdot - 1))$, $\delta(\cdot)$ 是 Dirac 分布.

引理 1 设算子 A 和 C 分别由式(13)和式(12)定义, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^n$, 则 Sylvester 算子方程

$$AS - SA = BC, \quad S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R}^n) \quad (16)$$

可解.

证 假设 Sylvester 算子方程(16)的解为如下形式:

$$S(f, g) = \begin{pmatrix} \langle f', \varphi'_1 \rangle_{L^2(0,1)} \\ \langle f', \varphi'_2 \rangle_{L^2(0,1)} \\ \vdots \\ \langle f', \varphi'_n \rangle_{L^2(0,1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle g, \psi_1 \rangle_{L^2(0,1)} \\ \langle g, \psi_2 \rangle_{L^2(0,1)} \\ \vdots \\ \langle g, \psi_n \rangle_{L^2(0,1)} \end{pmatrix} \triangleq \langle f', \varphi' \rangle_{L^2(0,1)} + \langle g, \psi \rangle_{L^2(0,1)}, \quad (17)$$

而 $\varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n]^T, \psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_n]^T, \varphi_i \in H_L^1(0, 1), \psi_i \in L^2(0, 1), i = 1, \cdots, n$. 把式(17)代

入式(16), 得如下关于变量 φ 和 ψ 的向量值常微分方程:

$$\begin{cases} A\varphi + \psi = 0, \quad \psi(0) = B, \quad \varphi'(1) = 0, \\ A\psi + \varphi'' = 0, \end{cases} \quad (18)$$

从而

$$\begin{cases} \psi'' - A^2\psi = 0, \\ \psi(0) = B, \quad \psi'(1) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

直接计算, 可得

$$\psi(x) = \cosh(Ax)B - \sinh(Ax) \tanh AB, \quad (20)$$

进而

$$\begin{cases} \varphi'' - A^2\varphi = 0, \\ \varphi'(1) = 0, \quad A\varphi(0) = -B, \end{cases}$$

通过计算, 得

$$\varphi'(x) = -\sinh(Ax)B + \cosh(Ax) \tanh AB, \quad (21)$$

故 Sylvester 算子方程(16)可解. 证毕.

为了补偿执行动态, 需设计控制器, 使控制器通过执行动态作用, 而去镇定受控系统. 下将稳定系统 (A, SB) . 由于 $B = (0, \delta(\cdot - 1))$, 结合式(17)可得

$$SBq = q(\cosh AB - \sinh A \tanh AB), \quad \forall q \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

若系统 (A, B) 可控, 由极点配置定理, 存在 $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{1 \times n})$ 使 $A + BK$ 是 Hurwitz 阵, 由于矩阵 $\cosh A - \sinh A \tanh A$ 可逆, 故

$$A + (\cosh A - \sinh A \tanh A)BK \cdot (\cosh A - \sinh A \tanh A)^{-1} \quad (23)$$

也是 Hurwitz 阵.

最后, 设计系统(10)的控制器如下:

$$U(t) = K_1 X_1(t) + K_1 S(w_1, w_{1t}) = K_1 (\langle w_{1x}, \varphi' \rangle_{L^2(0,1)} + \langle w_{1t}, \psi \rangle_{L^2(0,1)}) + K_1 X_1(t), \quad (24)$$

其中 $K_1 = K(\cosh A - \sinh A \tanh A)^{-1}$. 现由式(1)(3)(5)(7)(10)和(24)可得到如下闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bw_x(0, t), \\ w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), \\ w(0, t) = Qv(t), \\ w_x(1, t) = -kw_t(1, t) + k\phi(1)Gv(t) + \phi'(1)v(t) + K_1(X(t) - P_2v(t)) + K_1(\langle w_x(x, t) - \phi'(x)v(t), \varphi'(x) \rangle_{L^2(0,1)} + \langle w_t(x, t) - \phi(x)Gv(t), \psi(x) \rangle_{L^2(0,1)}), \\ \dot{v}(t) = Gv(t), \\ y_e(t) = Fv(t) - DX(t), \end{cases} \quad (25)$$

其中 $k > 0, k \neq 1, K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{1 \times n})$ 使得 $A + BK$ 是 Hurwitz 阵,

$$\begin{cases} K_1 = K(\cosh A - \sinh A \tanh A)^{-1}, \\ AP_2 - P_2G + BP_1 = 0, \\ DP_2 - F = 0, \\ \phi(x) = Q \cosh(xG) + xP_1\mathcal{G}(xG), \\ \psi(x) = \cosh(Ax)B - \sinh(Ax) \tanh AB, \\ \varphi'(x) = -\sinh(Ax)B + \cosh(Ax) \tanh AB, \end{cases} \quad (26)$$

\mathcal{G} 由式(6)给出.

3 闭环系统的指数稳定性

为了证明闭环系统(25)的指数稳定性, 先引入一个引理, 令

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = AX_1(t) + Bw_{1x}(0, t), \\ w_{1tt}(x, t) = w_{1xx}(x, t), \\ w_1(0, t) = 0, \\ w_{1x}(1, t) = \\ \langle w_{1t}(x, t), \psi(x, t) \rangle_{L^2(0,1)} - kw_{1t}(1, t) + \\ K_1(\langle w_{1x}(x, t), \varphi'(x, t) \rangle_{L^2(0,1)} + K_1X_1(t), \end{cases} \quad (27)$$

其中 φ 和 ψ 分别由式(21)和式(20)给出.

引理 2 令 $k > 0, k \neq 1. K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{1 \times n})$ 使得 $A + BK$ 为 Hurwitz 阵, $K_1 = K(\cosh A - \sinh A \tanh A)^{-1}$. $\varphi'(x, t)$ 和 $\psi(x, t)$ 分别由式(21)和式(20)给出. 对任意初值 $(X_1(0), w_1(\cdot, 0), w_{1t}(\cdot, 0)) \in H$, 系统(27) 存在唯一解 $(X_1(t), w_1(\cdot, t), w_{1t}(\cdot, t)) \in C([0, \infty); H)$ 且 $\|(X_1(t), w_1(\cdot, t), w_{1t}(\cdot, t))\|_H$ 指数收敛于零.

证 借助式(10)、式(12)–(15)和式(24), 系统(27) 写为如下抽象形式

$$\frac{d}{dt} (X_1(t) \ (w_1(\cdot, t), w_{1t}(\cdot, t)))^T = \mathfrak{A} (X_1(t) \ (w_1(\cdot, t), w_{1t}(\cdot, t)))^T, \quad (28)$$

其中算子 $\mathfrak{A} : D(\mathfrak{A}) \subset H \rightarrow H$ 定义为

$$\begin{cases} \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A & BC \\ BK_1 & A + BK_1S \end{pmatrix}, \\ D(\mathfrak{A}) = \mathbb{R}^n \times D(A). \end{cases} \quad (29)$$

引入变换

$$\begin{aligned} S(p \ (f, g))^T &= (p + S(f, g) \ (f, g))^T, \\ \forall (p, f, g) &\in H, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $S \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^n)$ 是 Sylvester 算子方程(16)的解. 简单计算可知 $S \in \mathcal{L}(H)$ 可逆, 且逆为

$$\begin{aligned} S^{-1}(p \ (f, g))^T &= (p - S(f, g) \ (f, g))^T, \\ \forall (p, f, g) &\in H. \end{aligned} \quad (31)$$

进而可得

$$S\mathfrak{A}S^{-1} = \mathfrak{A}_S, \quad D(\mathfrak{A}_S) = SD(\mathfrak{A}), \quad (32)$$

且

$$\mathfrak{A}_S = \begin{pmatrix} A + SBK_1 & 0 \\ BK_1 & A \end{pmatrix}. \quad (33)$$

由式(22)–(23)得 $A + SBK_1$ 是 Hurwitz 阵, 又由式(13) 可知 A 在 \mathcal{H} 上生成指数稳定 C_0 -半群, 故 \mathfrak{A}_S 在 $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}$ 上生成指数稳定 C_0 -半群. 由相似性式(32), \mathfrak{A} 在 $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}$ 上生成指数稳定 C_0 -半群. 证毕.

定理 1 假设系统 (A, B) 可控, 则对任意初值 $(X(0), w(\cdot, 0), w_t(\cdot, 0)) \in H$, 闭环系统(25)存在唯一解

$$(X, w, w_t) \in C([0, \infty); H), \quad (34)$$

且满足

$$|y_e(t)| \leq Le^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (35)$$

其中 $L > 0, \omega > 0$ 均为常数. 此外,

i) 如果 $\sup_{t \in [0, \infty)} \|v(t)\| < +\infty$, 则闭环系统(25)的解一致有界, 即

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|(X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))\| < +\infty. \quad (36)$$

ii) 如果 $v(t) \equiv 0$, 则存在常数 $L_1 > 0, \omega_1 > 0$, 使得

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|(X(t), w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))\| \leq L_1 e^{-\omega_1 t}. \quad (37)$$

证 借助于闭环系统(25)–(26)的初值定义系统(27)的初值如下

$$\begin{cases} X_1(0) = X(0) - P_2v(0), \\ w_1(\cdot, 0) = w(\cdot, 0) - \phi(\cdot)v(0), \\ w_{1t}(\cdot, 0) = w_t(\cdot, 0) - \phi(\cdot)Gv(0), \end{cases} \quad (38)$$

其中 $\phi(x), P_2$ 分别由式(5)和式(8)给出. 由引理2可知, 系统(27) 带着初值(38)存在唯一解 $(X_1, w_1, w_{1t}) \in C([0, \infty); H)$ 且在 H 中指数衰减于零. 由变换式(7) 推得其逆变换为

$$\begin{cases} X(t) = X_1(t) + P_2v(t), \\ w(x, t) = w_1(x, t) + \phi(x)v(t), \end{cases} \quad (39)$$

因此由式(39)得到的解满足闭环系统(25)和(34). 式(35)的收敛性由式(10)和引理2得到. 当 $\sup_{t \in [0, \infty)} \|v(t)\| < +\infty$ 时, 闭环系统解的一致有界性(36)由引理2和式(39)得到. 当 $v(t) \equiv 0$ 时, 闭环系统解的指数收敛性式(37)可由引理2和式(39)直接得到. 证毕.

4 数值模拟

为了更加直观地说明理论结果, 将对闭环系统(25) 进行数值模拟. 本文采用有限差分方法离散该闭环系

统, 时间、空间离散步长均取为0.01. 系统的调节参数和初值选为

$$\begin{aligned}
 &A = 0.01, \quad B = 0.02, \quad K = -46, \quad k = 1.2, \\
 &D = 18, \quad Q = [11 \ 9], \quad F = [0.6 \ 6], \\
 &X(0) = 0, \quad v(0) = [0.01 \ 0.005]^T, \\
 &w(x, 0) = 1 - \cos(2\pi x), \quad w_t(x, 0) = 0.
 \end{aligned}$$

闭环系统(25)的仿真结果见图. 图1-2分别表示在非同位干扰时与无干扰时闭环系统的状态和性能输出指数追踪. 从仿真结果可看出, 控制器的设计有效.

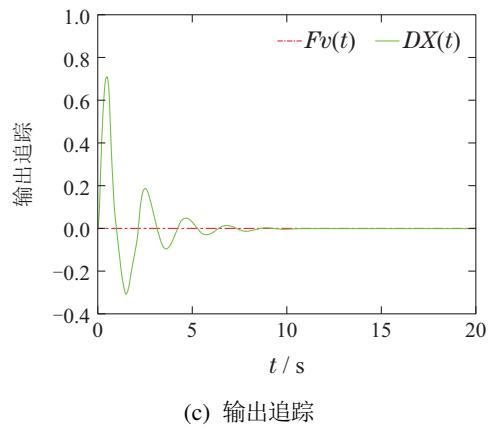
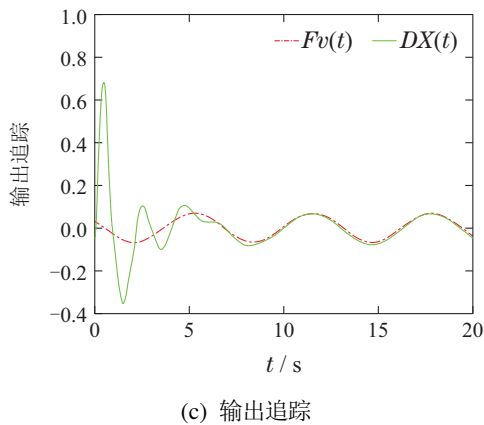
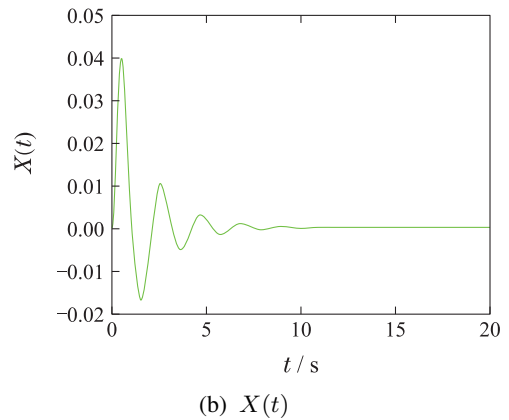
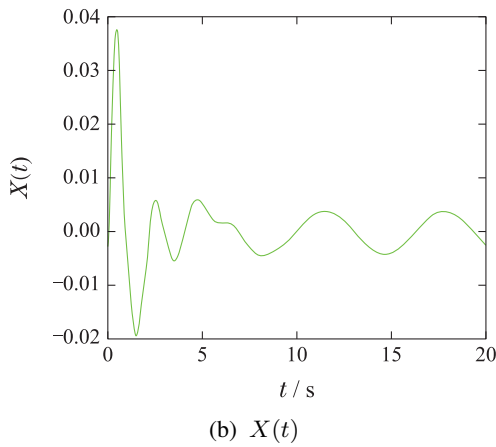
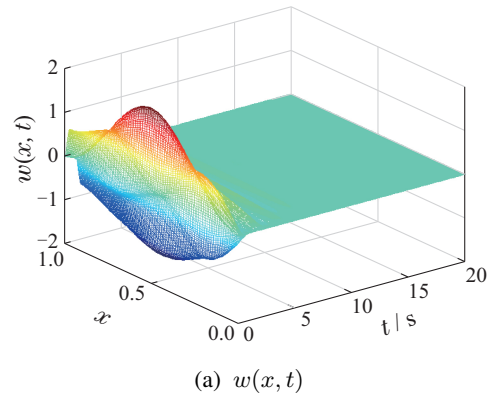
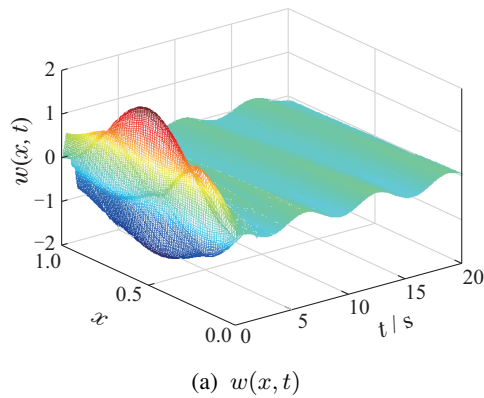


图 1 闭环系统(25)在非同位干扰时的数值模拟
Fig. 1 Numerical simulation of closed-loop system (25) under the non-collocated disturbance

图 2 闭环系统(25)在无干扰时的数值模拟
Fig. 2 Numerical simulation of closed-loop system (25) without the disturbance

5 总结

本文考虑了边界带有非同位干扰的波动方程和常微分方程级联系统的性能输出追踪问题. 带有非同位干扰的波动方程看作被控有限维系统的执行动态. 干扰通过轨道规划设计变换到控制通道. 与通常的 Backstepping 变换不同, 本文利用的动态补偿方法, 计算量小, 控制设计更为直观, 从而能解决更复杂的动态补偿问题. 文章给出了新的状态反馈控制器, 还证明了闭环系统解的一致有界性与性能输出的指数追踪. 数值模拟表明, 所给出的方法非常有效.

参考文献:

- [1] DAVISON E J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(1): 25 – 34.
- [2] DESOER C A, LIN C A. Tracking and disturbance rejection of MIMO nonlinear systems with PI controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(9): 861 – 867.
- [3] FRANCIS B A, WONHAM W M. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 1976, 12(5): 457 – 465.
- [4] DEUTSCHER J. Output regulation for linear distributed-parameter systems using finitedimensional dual observers. *Automatica*, 2011, 47(11): 2468 – 2473.
- [5] BYRNES C I, LAUKO I G, GILLIAM D S, et al. Output regulation for linear distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2236 – 2252.
- [6] DEUTSCHER J. A backstepping approach to the output regulation of boundary controlled parabolic PDEs. *Automatica*, 2015, 57: 56 – 64.
- [7] IMMONEN E, POHJOLAINEN S. Feedback and feedforward output regulation of bounded uniformly continuous signals for infinite-dimensional systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, 45(5): 1714 – 1735.
- [8] LOGEMANN H, ILCHMANN A. An adaptive servomechanism for a class of infinite-dimensional systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1994, 32(4): 917 – 936.
- [9] PISANO A, ORLOV Y, USAI E. Tracking control of the uncertain heat and wave equation via power-fractional and sliding-mode techniques. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2011, 49(2): 363 – 382.
- [10] PAUNONEN L, POHJOLAINEN S. The internal model principle for systems with unbounded control and observation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2014, 52(6): 3967 – 4000.
- [11] FENG H, GUO B Z. A new active disturbance rejection control to output feedback stabilization for a one-dimensional anti-stable wave equation with disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62: 3774 – 3787.
- [12] ZHANG X, FENG H, CHAI S G. Performance output exponential tracking for a wave equation with a general boundary disturbance. *Systems & Control Letters*, 2016, 98: 79 – 85.
- [13] JIN F F, GUO B Z. Performance boundary output tracking for one-dimensional heat equation with boundary unmatched disturbance. *Automatica*, 2018, 96: 1 – 10.
- [14] ZHOU H C, GUO B Z. Performance output tracking for one-dimensional wave equation subject to unmatched general disturbance and non-collocated control. *European Journal of Control*, 2018, 39: 39 – 52.
- [15] THAN A A, WANG J M. Stabilization of the cascaded ODE-Schrödinger equations subject to observation with time delay. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, 6(4): 1027 – 1035.
- [16] WANG J M, LIU J J, REN B B, et al. Sliding mode control to stabilization of cascaded heat PDE-ODE systems subject to boundary control matched disturbance. *Automatica*, 2015, 52: 23 – 34.
- [17] THAN A A, WANG J M. Output feedback stabilization of cascaded ODE-Wave equations with time delay in observation. *Asian Journal of Control*, 2021, 23(1): 449 – 462.
- [18] FENG H, WU X H, GUO B Z. Actuator dynamics compensation in stabilization of abstract linear systems. *ArXiv Preprint*, 2008: arXiv:2008.11333.

作者简介:

温瑞丽 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为分布参数系统控制理论, E-mail: wenruili@sxu.edu.cn;

冯红银萍 教授, 博士生导师, 目前研究方向为分布参数系统控制理论, E-mail: fhyp@sxu.edu.cn.