

一类非线性系统镇定问题的分层控制方法

杨开红[†], 季海波

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 通过利用分层控制设计方法, 研究了一类仿射非线性系统的镇定问题. 为了镇定这类系统, 分层方法构建了一个简单的抽象系统, 然后根据抽象系统的控制律求得原始系统的控制律. 最后, 一个四维仿射非线性系统的仿真例子说明了这种方法的有效性.

关键词: 分层控制; 仿射非线性系统; 抽象系统; 渐近稳定

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Hierarchical control method for stabilization of a class of nonlinear systems

YANG Kai-hong[†], JI Hai-bo

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: In this paper, we address the problem of stabilization for a class of affine nonlinear control systems by utilizing hierarchical control design method. In order to control this kind of systems, we first construct a simple abstract system, then derive the stabilizer of the original system from that of the abstraction. Finally, a simulation example of a 4 dimensional affine control system is included to illustrate the effectiveness of this method.

Key words: hierarchical control; affine nonlinear systems; abstract systems; asymptotic stabilization

1 引言(Introduction)

尽管非线性系统的渐近镇定问题已经研究了几十年, 但现在它仍旧吸引着许多学者的注意. 由于一些系统的强非线性, 怎样处理镇定问题的复杂性是现代工程界的一项基本挑战. 许多方法已经用于解决非线性系统的镇定问题, 例如严格反馈线性化、反步法、基于无源的方法和滑模控制方法^[1-2]. 在一些情况下, 尤其是系统维数较低且结构简单时, 这些方法非常有效. 然而对于大系统和极其复杂的系统, 这些方法就会难以使用并且效率低下. 为了降低这种复杂性, 一些学者提出了分层控制方法^[3-4], 这种方法分为两步: 第1步是为原始系统构建一个简单模型, 一般称之为抽象系统; 第2步是基于此抽象系统设计原始系统控制律. 文献[3-4]对于线性系统利用 ϕ -相关概念^[5-8]构建抽象系统的同时得到了控制器嵌入的条件和结构. 而文献[9-10]得到了非线性系统的控制器嵌入的条件和结构.

尽管本文也是利用 ϕ -相关概念建立抽象系统, 并

借鉴合适坐标系下分块反步法的思想将抽象系统控制器嵌入到原始系统当中, 但本文与上述提到的文献主要有两个方面的不同: 第1个是控制目标的不同, 这些文献主要是设计控制器以使输出轨线保持在特定的受限区域内, 首先假定已经得到了一个原始系统的稳定控制器, 然后设计接口函数以保证输出轨线满足期望的目标, 与之相反, 本文的目标是设计镇定器使系统状态轨线收敛到原点; 第2个是实现工具的不同, 它们的方法依赖于接口函数和仿真函数的概念而本文通过坐标变换和Lyapunov方法实现控制目标. 本文在分层控制的框架下考虑了一类仿射非线性系统的镇定问题. 首先构建一个抽象系统, 然后充分利用这个简单系统的控制器来得到原始系统的控制器使它能渐近镇定原始系统.

本文的组织结构如下: 第2节简要回顾分层控制框架; 第3节作为本文的重点, 说明怎样从抽象系统及其控制器设计原始系统的控制器; 第4节通过一个四维仿射系统的镇定问题说明此方法的有效性.

收稿日期: 2015-10-28; 录用日期: 2016-01-28.

[†]通信作者. E-mail: ykh0313@mail.ustc.edu.cn; Tel.: +86 13865977763.

本文责任编辑: 洪奕光.

国家自然科学基金项目(61273090, 61333008)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273090, 61333008).

2 分层控制框架(A framework of hierarchical control)

考虑下面的非线性系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$. 假设 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续映射. 笔者将此系统看作是需要分析和控制的原始系统.

在很多情况下, 由于实际系统的复杂性, 以直接方式控制原始系统是非常困难的. 于是一些学者提出了分层控制方法. 首先设计抽象系统的控制律 v^* , 然后将其嵌入到原始系统的控制器 u^* 中. 对于系统

$$\dot{z}(t) = h(z(t), v(t)), \quad (2)$$

其中: $z(t) \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, h 是连续映射. 如果它能产生所有形如 $z(t) = \phi(x(t))$ 的轨线, 其中 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x(t)$ 是系统(1)的轨线, 那么它将被称作抽象系统^[5,8].

图1显示了对于镇定问题的分层控制结构, 其中的数字表明操作的顺序. $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ 是一个映射以使得 $\Phi = \text{col}(\phi, \psi) := [\phi^T, \psi^T]^T$ 可以看作一个坐标变换. 需要提醒的是, 此图中的每一部分几乎都是不可或缺的.

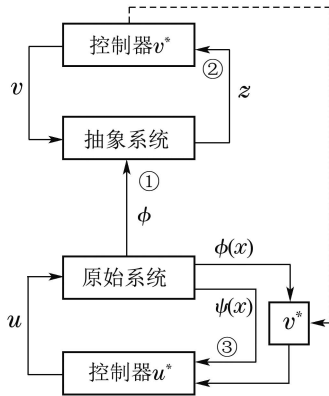


图1 镇定问题的分层控制结构图

Fig. 1 Hierarchical control architecture for stabilization problem

由上可知, 分层控制方法包括下面3个步骤: ① 通过映射 ϕ 构建一个抽象系统; ② 设计抽象系统控制律; ③ 基于这个控制律设计原始系统控制律.

3 控制器设计(Design of the controller)

假设原始系统是如下形式的仿射控制系统:

$$\Sigma: \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^p g_i(x(t))u_i(t), \quad (3)$$

其中: $x(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(t) = [u_1(t) \cdots u_p(t)]^T$. f, g_1, \cdots, g_p 是在 \mathbb{R}^n 开子空间 U 上的光滑向量场, 此处

U 包含平衡点 $x = 0$. 另外, 也假设系统 Σ 在 U 上是可控的. 关于非线性系统的可控性和它的秩条件的内容, 可参考文献[8]和文献[11].

令

$$\Delta = \text{span}\{g_1, g_2, \cdots, g_p\} \quad (4)$$

成为所有向量空间 $\Delta(x)$ 的集合, $\Delta(x)$ 由向量 $g_1(x), \cdots, g_p(x)$ 在任意固定点 $x \in U$ 处张成, 这一向量空间通常称为分布. $\Delta(x)$ 的维数被定义为

$$\dim(\Delta(x)) = \text{rank}[g_1(x) \ g_2(x) \ \cdots \ g_p(x)],$$

这个秩可能随着 x 的变化而变化. 但是如果 $g_1(x), \cdots, g_p(x)$ 对所有 $x \in U$ 是线性独立的, 那么对于所有 $x \in U$, $\dim(\Delta(x)) = p$ 成立. 在这种情况下, 笔者说 Δ 在 U 上是一个由 g_1, g_2, \cdots, g_p 生成的非奇异分布. 如果一个分布 Δ 满足

$$g_i \in \Delta, g_j \in \Delta \Rightarrow [g_i, g_j] \in \Delta, \quad (5)$$

其中 $[g_i, g_j]$ 表示 g_i 和 g_j 之间的李括号^[1], 则称它是对合的.

假设 1 对于系统(3), 通过式(4)定义的分布在 U 上是非奇异且对合的.

注意对于输入维数为1, 也即 $p = 1$ 的情况, 如果对于所有 $x \in U$, $\Delta(x) \neq 0$ 成立, 则假设1自然成立, 因为1维分布总是对合的.

在假设1下, 由Frobenius定理^[2]可知, $\Delta(x)$ 是完全可积的. 这意味着对于每一点 $x^0 \in U$ 存在一个 x^0 的邻域 U^0 和 $n - p$ 个定义在 U^0 上的实值光滑函数 $\phi_1, \cdots, \phi_{n-p}$ 使得对于所有 $x \in U^0$:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x} g_i = 0, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq n - p, \quad (6)$$

$$\text{rank}\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x^T}, \cdots, \frac{\partial \phi_{n-p}}{\partial x^T}\right] = n - p, \quad (7)$$

其中: $\frac{\partial \phi_j}{\partial x} = \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_n}\right]$, $\frac{\partial \phi_j}{\partial x^T} = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}\right)^T$. 需要澄清的是 ϕ_i 的计算实际上就是找偏微分方程(6)的 $n - p$ 个独立解. 正像在文献[2]中定理1.2.1的充分性证明中显示的那样, 这个解能化简到一些常微分方程的解. 另外, 在第4节的内容也显示了怎样以直接方式解这种偏微分方程.

注意到 $n - p$ 个行向量 $\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial \phi_{n-p}}{\partial x}$ 在每个点 $x \in U$ 是线性独立的, 那么总是可以在函数集合

$$\varphi_1(x) = x_1, \varphi_2(x) = x_2, \cdots, \varphi_n(x) = x_n$$

中选择一个含有 p 个函数的子集使得它们的微分和 $\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial \phi_{n-p}}{\partial x}$ 的微分可以形成 n 个线性独立的行向量. 令 ψ_1, \cdots, ψ_p 表示这样选择的函数^[2].

为了方便, 令

$$\phi = [\phi_1 \ \cdots \ \phi_{n-p}]^T, \quad (8)$$

$$\psi = [\psi_1 \cdots \psi_p]^T. \tag{9}$$

由构造, 映射

$$\bar{x} = \Phi(x) = \text{col}(\phi(x), \psi(x)) \tag{10}$$

的Jacobian矩阵有秩 n , 因此映射 Φ 可以作为局部微分同胚. 通过局部坐标变换 $\bar{x} = \Phi(x)$, 原始系统 Σ 可变换为在新坐标系下的方程:

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{f}_1(\bar{x}(t)), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{f}_2(\bar{x}(t)) + \bar{g}(\bar{x}(t))u(t), \end{cases} \tag{11}$$

其中:

$$\bar{f}_1 = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}, \tag{12}$$

$$\bar{f}_2 = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} f(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}, \tag{13}$$

$$\bar{g} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}, \tag{14}$$

$\bar{x} = \text{col}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{U}$, \bar{U} 由 $\Phi(U) = \{\Phi(x)|x \in U\}$ 定义. 既然对所有 $x \in U$, $\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = 0$, 则部分状态 $\bar{x}_1(t)$ 不能被输入 $u(t)$ 直接驱动.

如果将 \bar{f}_1 中的 $\bar{x}_1(t)$ 和 $\bar{x}_2(t)$ 分别等同于 $z(t)$ 和 $v(t)$, 系统

$$\Sigma' : \dot{z}(t) = \bar{f}_1(z(t), v(t)) \tag{15}$$

能被看成是式(3)的一个抽象系统. 事实上, Σ' 是 ϕ -相对于 Σ 的, 这意味着对于每一条 Σ 的轨线 $x(t)$, $z(t) = \phi(x(t))$ 是 Σ' 的轨线^[5, 8]. 另外, 如果 Σ 是可控的, Σ' 也会是可控的.

在下文中, 当考虑 \bar{f}_1 时, 总是无差别地使用 Σ' 中的变量 z 和 $\bar{\Sigma}$ 中的变量 \bar{x}_1 .

如果满足 $v^*(0) = 0$ 的光滑函数 $v^*(z)$ 能渐近镇定 $\dot{z} = \bar{f}_1(z, v^*(z))$ 系统的平衡点 $z = 0$ 并且相应的Lyapunov函数 $V(z)$ 能够得到, 则能够渐近镇定式(3)的平衡点 $x = 0$ 的反馈律 $u = u^*(x)$ 能通过下面的定理构造得到.

定理 1 对于式(15)中的抽象系统 Σ' , 如果存在一个满足 $v^*(0) = 0$ 的渐近镇定器 $v^*(z)$ 和相关的Lyapunov函数 $V(z)$, 那么反馈控制器

$$\begin{aligned} u^*(x) = & - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left(\left[\frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} p(\bar{x}_1, \bar{x}_2 - v^*(\bar{x}_1)) \right]_{\substack{\bar{x}_1 = \phi(x) \\ \bar{x}_2 = \psi(x)}}^T + \right. \\ & \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} f(x) - \frac{\partial v^*}{\partial \bar{x}_1} \Big|_{\bar{x}_1 = \phi(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) + kv^*(x) - \right. \\ & \left. kv^*(\phi(x)) \right), \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $k > 0$ 以及

$$p(\bar{x}_1, y) = \int_0^1 \frac{\partial \hat{f}(\bar{x}_1, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=sy} ds, \tag{17}$$

此处 $\hat{f}(\bar{x}_1, \xi) = \bar{f}_1(\bar{x}_1, v^*(\bar{x}_1) + \xi) - \bar{f}_1(\bar{x}_1, v^*(\bar{x}_1))$, 能渐近镇定原始系统 Σ .

证 既然系统 Σ 能被转换成式(11)中的形式 $\bar{\Sigma}$, 需要构建的就是能够渐近镇定 $\bar{\Sigma}$ 的控制器 $u = u(\bar{x})$, 那么 Σ 系统的控制器就是 $u(\Phi(x))$.

首先变量变换:

$$y = \bar{x}_2 - v^*(\bar{x}_1). \tag{18}$$

将系统(11)转换到如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \tilde{f}_1(\bar{x}_1(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = \tilde{f}_2(\bar{x}_1(t), y(t)) + \tilde{g}(\bar{x}_1(t), y(t))u(t), \end{cases} \tag{19}$$

其中:

$$\tilde{f}_1 = \bar{f}_1(\bar{x}_1, v^*(\bar{x}_1) + y), \tag{20}$$

$$\tilde{f}_2 = \bar{f}_2(\bar{x}_1, v^*(\bar{x}_1) + y) - \frac{\partial v^*}{\partial \bar{x}_1} \bar{f}_1(\bar{x}_1, v^*(\bar{x}_1) + y), \tag{21}$$

$$\tilde{g} = \bar{g}(\bar{x}_1, v^*(\bar{x}_1) + y). \tag{22}$$

根据假设 $\dot{z} = \bar{f}_1(z, v^*(z))$ 是渐近稳定的, 系统 $\dot{\bar{x}}_1 = \tilde{f}_1(\bar{x}_1, 0)$ 也是渐近稳定的, 并且Lyapunov函数是 $V(\bar{x}_1)$. 知道了上面的结果, 就能够确定反馈律 $u = \tilde{u}(\bar{x}_1, y)$ 的表达式. 选择

$$W(\bar{x}_1, y) = V(\bar{x}_1) + \frac{1}{2} y^T y \tag{23}$$

作为系统(19)的一个Lyapunov函数. 能将 $\tilde{f}_1(\bar{x}_1, y)$ 表示为

$$\tilde{f}_1(\bar{x}_1, y) = \tilde{f}_1(\bar{x}_1, 0) + p(\bar{x}_1, y)y, \tag{24}$$

其中 $p(\bar{x}_1, y)$ 是一个 $(n-p) \times p$ 矩阵并且能表达成式(17), 这是因为

$$\hat{f}(\bar{x}_1, y) = \tilde{f}_1(\bar{x}_1, y) - \tilde{f}_1(\bar{x}_1, 0).$$

接下来, 通过将 $\tilde{u}(\bar{x}_1, y)$ 选择为

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\bar{x}_1, y) = & - [\tilde{g}(\bar{x}_1, y)]^{-1} \left(\left[\frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} p(\bar{x}_1, y) \right]^T + \right. \\ & \left. \tilde{f}_2(\bar{x}_1, y) + ky \right), \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $k > 0$, 能够得到

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} \tilde{f}_1(\bar{x}_1, y) + y^T (\tilde{f}_2(\bar{x}_1, y) + \\ & \tilde{g}(\bar{x}_1, y)\tilde{u}(\bar{x}_1, y)) = \\ & \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} \tilde{f}_1(\bar{x}_1, 0) + \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} p(\bar{x}_1, y)y + \\ & y^T (\tilde{f}_2(\bar{x}_1, y) + \tilde{g}(\bar{x}_1, y)\tilde{u}(\bar{x}_1, y)) = \\ & \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} \tilde{f}_1(\bar{x}_1, 0) - ky^T y. \end{aligned}$$

上面的控制律使 \dot{W} 是负定的, 因此渐近镇定了系统(19)的平衡点 $(\bar{x}_1, y) = (0, 0)$.

因为本文使用了表达式 $[\tilde{g}(\bar{x}_1, y)]^{-1}$, 就需要证明

对于所有的 $(\bar{x}_1, y) \in (\phi(U) \times Y) \subset \mathbb{R}^n$, 这里:

$$Y = \{y | y = \bar{x}_2 - v^*(\bar{x}_1), \bar{x}_1 \in \phi(U), \bar{x}_2 \in \psi(U)\},$$

$$\phi(U) = \{\phi(x) | x \in U\}, \psi(U) = \{\psi(x) | x \in U\},$$

$\tilde{g}(\bar{x}_1, y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 确实是可逆的. 也即证明对于所有的 $x \in U$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x)$ 是可逆的. 因为下面的陈述:

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = n$$

以及

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) = \text{col}(0, \frac{\partial \psi}{\partial x} g(x)),$$

所以根据假设1, 有

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x) \right] = \text{rank} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) \right] = \text{rank}[g(x)] = p,$$

于是 $p \times p$ 矩阵 $\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x)$ 的可逆性成立.

反转变换式(18)产生系统(11)的反馈律

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}) &= \\ \bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2 - v^*(\bar{x}_1)) &= \\ - [\bar{g}(\bar{x})]^{-1} & \left(\left[\frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} p(\bar{x}_1, \bar{x}_2 - v^*(\bar{x}_1)) \right]^T + \right. \\ \bar{f}_2(\bar{x}) - \frac{\partial v^*}{\partial \bar{x}_1} \bar{f}_1(\bar{x}) & \left. + k(\bar{x}_2 - v^*(\bar{x}_1)) \right). \end{aligned}$$

接着, 反转变换 $\bar{x} = \Phi(x)$ 产生系统(3)的反馈律

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \bar{u}(\Phi(x)) = \\ - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x) \right]^{-1} & \left(\left[\frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} p(\bar{x}_1, \bar{x}_2 - v^*(\bar{x}_1)) \right]_{\substack{\bar{x}_1 = \phi(x) \\ \bar{x}_2 = \psi(x)}}^T + \right. \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} f(x) - \frac{\partial v^*}{\partial \bar{x}_1} \Big|_{\bar{x}_1 = \phi(x)} & \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) + k\psi(x) - \\ kv^*(\phi(x)), & \end{aligned} \quad (26)$$

它能够渐近镇定式(3)的平衡点 $x = 0$.

注1 一般地, 式(17)中 $p(\bar{x}_1, y)$ 的计算是非常耗时的. 但是如果抽象系统 Σ' 是仿射的, 也就是说 $\dot{z} = \bar{f}_1(z, v)$ 能被表达成 $\dot{z} = \bar{f}_z(z) + \bar{f}_v(z)v$, 那么 $p(\bar{x}_1, y) = \bar{f}_v(\bar{x}_1)$ 就很容易得到. 而且假如这个抽象系统也恰好满足假设1(此时的 Δ 实际上是 $\text{span}\{\bar{f}_v\}$), 那么就能将它作为新的原始系统进行新一轮的抽象并再次使用这个定理. 原则上这样的过程可以进行很多次, 直到输入维数大于或等于状态维数为止. 这样就形成了一个控制器的迭代计算过程. 然而为了达到这个过程需要进行更进一步的工作.

注2 回到式(11), 会发现它是分块下三角结构. 事实上本文提出的方法正是通过一个坐标变换将原始系统化成下三角结构, 然后通过分块反步法设计控制器. 因此, 这种方法能被看作是分块反步法的一般形式或一种扩展. 特别地, 如果原始系统正好是下三角结构, 那么 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别可以被选为 $[I_{n-p} \ 0]x$ 和 $[0 \ I_p]x$, 于是本文的方法退化成分块反步设计法. 但是就本方法而言, 关键的一步恰恰就是非线性坐标变换. 上述定理的一个重要结论就是: 在假设1下, 可以找到一

个微分同胚坐标变换将系统(3)化为下三角形式, 并且其中的 $\tilde{g} = \bar{g}(\bar{x}_1, v^*(\bar{x}_1) + y)$ 作为一个 $p \times p$ 维矩阵是可逆的.

上面的定理仅仅提供了一个在开子空间 U 上的局部结果. 如果 $U = \mathbb{R}^n$, 笔者期望它也能提供一个全部的结论. 如果局部微分同胚 $\Phi(x)$ 成为全局的, 这个扩展将比较容易. 全局微分同胚意味着 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 非奇异并且 $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|\Phi(x)\| = \infty$. 假设1在整个 \mathbb{R}^n 空间上成立说明 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 对所有 x 非奇异. 而且假如偏微分方程(6)的解 ϕ 满足正则性条件

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|\phi(x)\| = \infty,$$

那么定理1的结果就是全局的.

当将这种方法用于线性系统时, 相应的结果将更简单. 在这种情况下, 系统(3)成为

$$\Sigma: \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (27)$$

当 $\text{rank } B = p$, 因为分布 $\Delta = \mathcal{R}(B)$ 代表了矩阵 B 的列空间而且是自然对合的, 所以假设1成立. 为了使得式(6)和式(7)成立, ϕ 能被选为 $\phi(x) = \Pi x$, 其中 $\Pi \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ 满足 $\Pi B = 0$ 和 $\text{rank } \Pi = n - p$. 另外 $\psi(x) = Nx$ 以使得矩阵 $\Phi = \begin{bmatrix} \Pi \\ N \end{bmatrix}$ 是可逆的. 正是矩阵 N 的选择对最终结果的复杂性有较大的影响. 这里选择 $N = B^+$, 它代表 B 的 Moore-Penrose 伪逆, 后面就会清楚这样选的原因. 于是相应的系统 $\bar{\Sigma}$ 成为

$$\bar{\Sigma}: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_1 \bar{x}(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_2 \bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \end{cases} \quad (28)$$

其中:

$$\bar{A}_1 = \Pi A \Phi^{-1}, \quad (29)$$

$$\bar{A}_2 = B^+ A \Phi^{-1}, \quad (30)$$

$$\bar{B} = B^+ B = I. \quad (31)$$

事实上, Φ^{-1} 能够表达成 $\Phi^{-1} = [\Pi^+ \ B]$. 结果, 相应的抽象系统 Σ' 成为

$$\Sigma': \dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t), \quad (32)$$

其中:

$$F = \Pi A \Pi^+, \quad G = \Pi B. \quad (33)$$

令 $v^*(z) = Kz$, $V(z) = \frac{1}{2} z^T P z$ 以使得方阵 $F + GK$ 是 Hurwitz 的, 并且 $(F + GK)^T P + P(F + GK) < 0$. 另外, $p(\bar{x}_1, y) = G = \Pi B$ 可以直接得到. 因此, 在线性情况下的 $u^*(x)$ 是

$$\begin{aligned} u^*(x) &= - \left((\Pi B)^T P \Pi + B^+ A - K \Pi A + \right. \\ & \left. k(B^+ - K \Pi) \right) x. \end{aligned} \quad (34)$$

将前面线性系统的情况总结为下面的推论, 这个

推论同时也是笔者之前工作的一个结果^[12]:

推论 1 对于线性系统(27)和它的抽象系统(32), 如果存在一个正定对称矩阵 P 和一个 $p \times (n - p)$ 矩阵 K 使得 $(F + GK)^T P + P(F + GK) < 0$. 那么, 控制器(34)能够渐近镇定系统(27).

4 算例(Example)

这一节, 通过一个例子说明笔者提出的方法. 考虑一个四维的非线性系统, 其中:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 + x_2 e^{x_2} \\ x_3 \\ -x_3 + x_3^2 x_4 - x_2 x_3^3 \\ x_3^2 + x_1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 & e^{x_2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix},$$

它由(文献[2]Example 1.8.4)改编得到. 很明显, g 的两个列向量之间的李括号 $[g_1, g_2]$ 等于 0 并且对所有 $x \in \mathbb{R}^4$, $\text{rank}(g(x)) = 2$. 因此, 分布 $\Delta = \text{span}\{g_1, g_2\}$ 是对合的, 假设1成立.

为了应用本文提出的方法, 首先需要对这个分布进行积分, 即找到两个实值函数 ϕ_1, ϕ_2 使得式(6)和式(7)能够满足. 这里是指解下面的偏微分方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & e^{x_2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

遵循(文献[2]Example 1.8.4)描述的步骤, 能够验证两个独立解是

$$\begin{aligned} \phi_1 &= x_3, \\ \phi_2 &= x_4 - x_2 x_3. \end{aligned}$$

选择

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

和 $\phi = \text{col}(\phi_1, \phi_2)$ 得到坐标变换式(10), 即

$$\bar{x} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

于是抽象系统可以表示为

$$\Sigma' : \dot{z}(t) = \bar{f}_1(z(t), v(t)), \quad (35)$$

其中

$$\bar{f}_1 = \begin{bmatrix} -z_1 + z_1^2 z_2 \\ v_1 - v_2(-z_1 + z_1^2 z_2) \end{bmatrix}.$$

对于这个系统, 控制器

$$v^*(z) = \begin{bmatrix} -z_1^3 - k_1 z_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

其中 $k_1 > 0$ 能渐近镇定平衡点 $z = 0$. 相应的Lyapunov 函数可选择为

$$V(z) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2. \quad (37)$$

此外, 观察到抽象系统是仿射的, 可以看出

$$p(z, y) = p(z, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & z_1 - z_1^2 z_2 \end{bmatrix}.$$

因此对于四维的非线性系统, 设计出的控制器是

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \\ & - \begin{bmatrix} x_1 & e^{x_2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 z_2 (1 - z_1 z_2) \end{bmatrix}_{z=\phi(x)} \right) + \\ & \begin{bmatrix} x_1 x_3 + x_2 e^{x_2} \\ x_3 \end{bmatrix}_{z=\phi(x)} - \begin{bmatrix} -3 * z_1^2 & -k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{z=\phi(x)} \\ & \begin{bmatrix} -x_2 x_3^3 + x_4 x_3^2 - x_3 \\ x_1 + x_2 (x_2 x_3^3 - x_4 x_3^2 + x_3) \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \\ & k_2 \begin{bmatrix} -z_1^3 - k_1 z_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{z=\phi(x)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_3 - k_2 x_2 - (x_4 - x_2 x_3)(x_3 - \\ & \quad x_3^2(x_4 - x_2 x_3)), \\ u_2 &= -e^{-x_2}(x_4 - x_2 x_3 + (-3x_3^2 + k_1 x_2) \\ & \quad (x_2 x_3^3 - x_4 x_3^2 + x_3) + x_2 e^{x_2} + k_2(x_3^3 + \\ & \quad k_1(x_4 - x_2 x_3))) - x_1(e^{-x_2}(k_1 + k_2 + x_3) - \\ & \quad e^{-x_2}(x_3 + k_2 x_2 + (x_4 - x_2 x_3)(x_3 - \\ & \quad x_3^2(x_4 - x_2 x_3)))). \end{aligned}$$

为了图示说明这种方法的有效性, 将四维原始系统的初始值设为 $x(0) = [2, 1, -1, -2]^T$, 而式(35)的初始值设为 $z(0) = \phi(x(0)) = [-1, -1]^T$. 图2显示了闭环抽象系统的状态轨迹; 图3显示了式(36)中 $v^*(t)$ 的第1分量, 其中 k_1 选为1. 这些图说明控制器 $v^*(z)$ 能渐近镇定这个抽象系统的平衡点 $z = 0$.

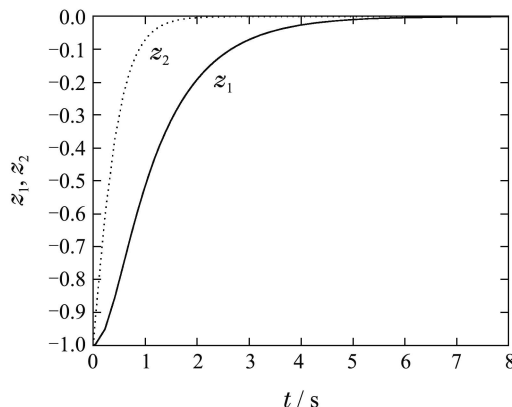


图 2 Σ' 的状态轨迹

Fig. 2 The state trajectory of Σ'

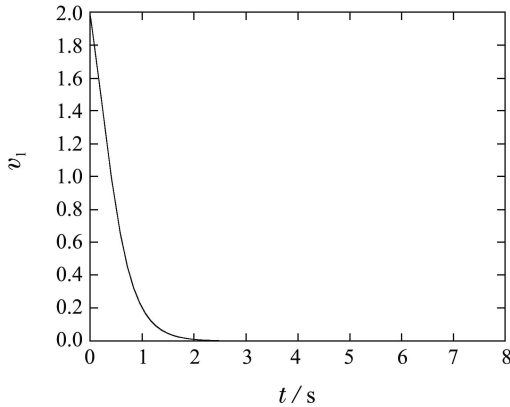
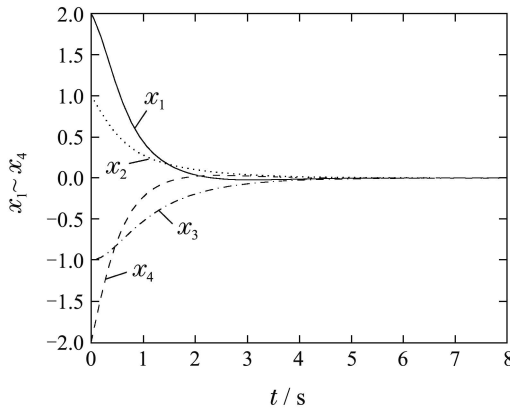
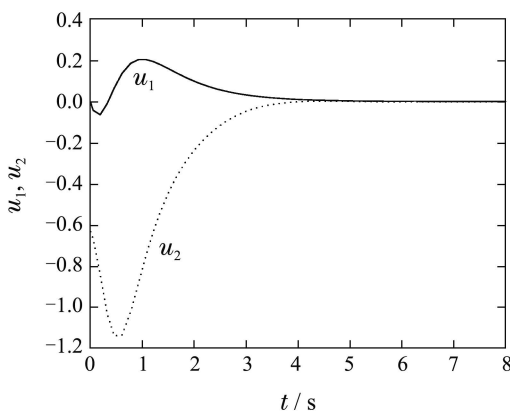
图3 $v^*(t)$ 的第1分量Fig. 3 The first component trajectory of $v^*(t)$

图4和图5分别显示了原始系统的状态轨线 $x(t)$ 和输入轨线 $u^*(t)$ 。很明显这个控制器能使四维原始系统渐近稳定。

图4 Σ 的状态轨线Fig. 4 The state trajectory of Σ 图5 Σ 的输入轨线Fig. 5 The input trajectory of Σ

5 结论(Conclusions)

本文在分层控制的框架下考虑了一类非线性系统的渐近镇定问题。本文说明了怎样构建一个抽象系统

使得基于它的控制器可以得到原始系统的渐近镇定器,同时也显示了怎样有效地计算这个控制器。一个算例被用于说明这种方法的有效性。将来的工作包括两个方面:寻找可使得非线性系统控制器可迭代计算的条件,并且如果可能的话设计相应的算法;用分层方法考虑不确定非线性系统的镇定问题,思路可以参考笔者之前关于不确定线性系统镇定问题的研究成果^[13]。

参考文献(References):

- [1] KHALIL H K, GRIZZLE J W. *Nonlinear Systems* [M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [2] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M]. Third Edition. London: Springer, 1995.
- [3] GIRARD A, PAPPAS G J. Approximate hierarchies of linear control systems [C] // *The 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA: IEEE, 2007: 3727 – 3732.
- [4] GIRARD A, PAPPAS G J. Hierarchical control system design using approximate simulation [J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 566 – 571.
- [5] PAPPAS G J, LAFFERRIERE G, SASTRY S. Hierarchically consistent control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1144 – 1160.
- [6] TABUADA P, PAPPAS G J. Hierarchical trajectory refinement for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(4): 701 – 708.
- [7] PAPPAS G J, LAFFERRIERE G. Hierarchies of stabilizability preserving linear systems [C] // *The 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, USA: IEEE, 2001: 2081 – 2086.
- [8] PAPPAS G J, SIMIC S. Consistent abstractions of affine control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 745 – 756.
- [9] TANG Y, HONG Y. Hierarchical control design of nonlinear systems based on approximate simulation [C] // *The 12th International Conference on Control Automation Robotics & Vision*. Guangzhou, China: IEEE, 2012: 566 – 571.
- [10] YANG K, JI H. Design of the interfaces based on approximate hierarchies [C] // *The 33rd Chinese Control Conference*. Nanjing, China: IEEE, 2014: 3483 – 3488.
- [11] NIJMEIJER H, VAN DER SCHAFT A. *Nonlinear Dynamical Control Systems* [M]. New York: Springer, 1990.
- [12] YANG Kaihong, JI Haibo. Hierarchical control of a class of high-dimensional linear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 176 – 179.
(杨开红, 季海波. 一类高阶线性系统的分层控制 [J]. 自动化学报, 2015, 41(1): 176 – 179.)
- [13] YANG K, JI H. Hierarchical control of a class of uncertain linear systems [J]. *Journal of Control and Decision*, 2015, 3(2): 1 – 13.

作者简介:

杨开红 (1989–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为非线性系统的分层控制, E-mail: ykh0313@mail.ustc.edu.cn;

季海波 (1964–), 男, 教授, 主要研究方向为非线性系统控制、自适应控制以及它们的应用, E-mail: jihb@ustc.edu.cn.