

基于模糊树模型的自适应模糊滑模控制方法

张 伟, 毛剑琴

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 本文针对单输入-单输出仿射非线性系统提出了一种基于模糊树模型的具有监督控制器的模糊滑模控制方法. 该方法用模糊树模型逼近非线性系统中的未知非线性函数, 得到初始的控制器, 然后在线调节模糊树模型中的线性参数, 改善控制器的性能, 实现对有界参考输入信号的跟踪控制. 模糊树辨识方法自适应划分输入空间, 大大减少模糊规则的数目, 在一定程度上可以缓解困扰模糊控制中的“规则爆炸”问题. 该方法通过监督控制器保证闭环系统所有信号有界. 通过理论分析, 证明了跟踪误差收敛到零. 用倒立摆进行仿真验证, 结果表明该方法用较少的模糊规则, 就能得到满意的控制效果, 有推广应用价值.

关键词: 模糊树模型; 自适应模糊控制; 滑模控制

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Adaptive fuzzy sliding-mode control method based on fuzzy tree model

ZHANG Wei, MAO Jian-qin

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on fuzzy tree model, an adaptive fuzzy sliding-mode control strategy with supervisory controller is proposed for a class of nonlinear systems. In this strategy, the unknown nonlinear functions are approximated by the fuzzy tree model to obtain the prototype controller; the linear parameters in the fuzzy tree model are adjusted online to improve the performance of the controller in realizing the tracking control to a bounded set point input. Because of the adaptive partition of the input space, the fuzzy tree identification methods greatly reduce the number of fuzzy rules. This avoids, in some extent, the problem of “rule explosion” which often occurs in the fuzzy control for high dimension nonlinear systems. With the help of a supervisory controller, the resulting closed-loop-system is globally stable in the sense that all signals involved (states, controls, parameters, etc.) are uniformly bounded. By Lyapunov method, the tracking error is proved to be asymptotically converging to zero. The numerical simulation of controlling an inverted pendulum verifies the efficiency and advantage of the proposed method.

Key words: fuzzy tree model; sliding-mode control; adaptive fuzzy control

1 引言(Introduction)

模糊滑模控制是一种将模糊系统和传统控制相结合的控制方式. 模糊滑模控制柔化了控制信号, 可减轻或避免滑模控制的抖振现象. 文献[1,2]利用自适应模糊控制方法, 利用Mamdani模糊系统逼近未知函数且通过将滑模控制器中的切换项进行模糊逼近, 将切换项连续化, 从而有效降低抖振. 文献[3~6]利用Mamdani模糊系统逼近未知非线性函数, 其中文献[3,4]考虑先通过设计状态观测器估计非线性系统中未知的状态, 然后结合模糊系统和模糊变结构控制设计控制器, 并给出稳定性分析. 文献[7]指出T-S模糊逻辑系统比Mamdani模糊逻辑系统具有更好的性能^[8], 提出一类基于T-S模糊逻辑系

统的自适应滑模控制器. 但是不论是采用Mamdani模糊系统还是T-S模糊系统逼近非线性系统中的未知函数, 这些方法均是采用网格法划分输入空间, 随着输入维数的增加, 模糊规则数目呈指数增长, 因此对于高维情况, 会产生“规则爆炸”问题.

毛剑琴等提出的基于树结构的T-S模糊模型辨识方法, 简称模糊树辨识方法, 其主要思想是基于二叉树结构自适应划分输入空间, 得到不规则的模糊子空间, 在与叶节点对应的子空间上建立分段线性函数作为模糊规则的后件^[9,10]. 模糊规则的数目等于叶节点的个数, 对输入维数不敏感.

本文基于模糊树辨识方法和滑模控制, 针对单输入-单输出的仿射非线性系统, 提出一种模糊自适应

控制方法,该方法用模糊树模型逼近系统中的未知非线性函数,得到初始的控制器,然后在线调节模糊树模型中的线性参数,改善控制器的性能,最终实现对参考信号的跟踪控制.该方法可以在保证精度的前提下大大减少控制器中模糊规则的数目,并特别适用于输入维数高的系统.

2 问题描述(Problem statement)

考虑具有如下标准形的单输入单输出仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \\ y = x. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 是未知的连续函数, $u \in \mathbb{R}$ 为系统的输入, $y \in \mathbb{R}$ 为系统的输出. 这里假设在可控区域 U_c 内有 $g(x) > 0$, 并且在可控区域内, 状态都是可测的. 对于式(1)描述的系统, 希望得到一个状态反馈控制 $u(\mathbf{x}; \theta)$ 和相应的调参律, 使得系统的输出 $y(t)$ 可以渐近收敛到给定的有界参考信号 $y_m(t)$, 而且满足:

1) 闭环系统的内部状态一致有界, 即 $\exists T \geq 0$, 当 $t \geq T$ 时, 有 $\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq M_x < \infty$;

2) 跟踪误差 $e = y_m - y$ 尽可能小.

定义误差向量 $\mathbf{e} = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]$ 和滤波误差

$$s(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e = \sum_{i=1}^{n-1} k_i e_i + e_n. \quad (2)$$

其中: $k_i = C_{n-1}^{i-1} \lambda^{n-i}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\lambda > 0$ 为设计参数.

引理 1 若 s 由式(2)确定, 则^[11]

1) 当 $s = 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$;

2) 当 $|s| \leq C$, $\mathbf{e}(0) \in \omega_c$ 时, $\mathbf{e}(t) \in \omega_c, \forall t \geq 0$;

3) 当 $|s| \leq C$, $\mathbf{e}(0) \notin \omega_c$ 时, $\exists T = (n-1)/\lambda$, 使得对 $\forall t \geq T$ 有 $\mathbf{e}(t) \in \omega_c$, 其中 $\omega_c = \{\mathbf{e}(t) | |e_i| \leq 2^{i-1} \lambda^{i-n} C, i = 1, 2, \dots, n\}$.

为设计稳定的自适应模糊滑模控制器, 对系统(1)作如下假设:

假设 1 1) 已知函数 $f_{\max}(\mathbf{x}), g_{\max}(\mathbf{x})$ 和 $g_{\min}(\mathbf{x})$, 满足 $|f(\mathbf{x})| \leq f_{\max} < \infty, 0 < g_{\min} < g(\mathbf{x}) < g_{\max} < \infty, \mathbf{x} \in U_c$;

2) $\mathbf{y}_m \in \omega_m = \{\mathbf{y}_m | \|\mathbf{y}_m\|_2 \leq M_y\}$, 其中: $\mathbf{y}_m = [y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(n-1)}]^T, M_y > 0$ 为已知常数.

3 模糊树模型(Fuzzy tree model)

模糊树辨识方法^[9,10]通过自适应划分输入空间来获得模糊规则, 即在线性逼近误差和输出数据密度大的地方划分精细, 而在线性逼近误差和输出数据密度小的地方划分粗糙. 输入空间的划分情况可以与一棵二叉树 T 来对应. 在每一个叶节点 t 对应的

子空间上, 用 n 维超平面 $y_t(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}_t)^T \hat{\mathbf{x}}$ 逼近非线性函数, 其中 $\hat{\mathbf{x}} = [1, \mathbf{x}^T]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. 如果逼近误差满足要求, 则停止对该子空间的划分. 对子空间划分的判别函数取为超平面 $g_t(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}_t)^T \hat{\mathbf{x}} - \theta_t = 0$, 其中 θ_t 为该子空间上输出数据的重心. 模糊树辨识方法根据 $g_t(\mathbf{x}) \leq 0$ 和 $g_t(\mathbf{x}) \geq 0$, 可以将该子空间划分为两个更精细的子空间, 并在 $g_t(\mathbf{x}) \approx 0$ 的区域定义模糊带, 最终完成对输入空间的模糊划分. 按照这种方式, 判别函数将自动向输出数据密度大的地方移动, 划分出大小不同、形状不规则的模糊子空间.

模糊空间划分完毕, 即可得到如下一组规则:

$$R^l: \text{如果 } \mathbf{x} \text{ 是 } N_{t_l}, \text{ 那么 } y_{t_l} = (\mathbf{c}_{t_l})^T \hat{\mathbf{x}}. \quad (3)$$

$t_l \in \tilde{T}$ 为叶节点集合, 其中 $\mathbf{c}_{t_l} = [c_{t_l}^0, c_{t_l}^1, \dots, c_{t_l}^n]^T$ 为线性参数, N_{t_l} 是模糊子空间 χ_{t_l} 上定义的模糊集合, 对应的隶属度函数记为 $N_{t_l}(\mathbf{x})$. 若将 $N_{t_l}(\mathbf{x})$ 的归一化隶属度函数记为 $\mu_{t_l}(\mathbf{x})$, 即 $\mu_{t_l}(\mathbf{x}) = N_{t_l}(\mathbf{x}) / \sum_{t_l} N_{t_l}(\mathbf{x})$, 则得到模糊树模型的输出表达式

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \sum_{t_l \in \tilde{T}} \mu_{t_l}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{t_l}^T \hat{\mathbf{x}}. \quad (4)$$

二叉树每个节点上的隶属度函数按如下方式定义:

1) 对于根节点,

$$N_{r(T)}(\mathbf{x}) \equiv 1. \quad (5)$$

2) 对于非根节点 t ,

$$N_t(\mathbf{x}) = N_{p(t)}(\mathbf{x}) \bar{N}_t(\mathbf{x}). \quad (6)$$

其中 $p(t)$ 表示节点 t 的父节点,

$$\bar{N}_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp[-\alpha_t (\mathbf{c}_{p(t)}^T \hat{\mathbf{x}} - \theta_{p(t)})]}$$

表示节点 t 上的辅助隶属度函数,

$$\theta_{p(t)} = \frac{\sum_{i=1}^M N_{p(t)}(\mathbf{x}^i) (\mathbf{c}_{p(t)}^T \hat{\mathbf{x}}^i)}{\sum_{i=1}^M N_{p(t)}(\mathbf{x}^i)}$$

表示父节点上的数据中心, $|\alpha_t|$ 表示模糊带的宽度, 在计算时, 事先确定一个正数 α , 对于左节点 $\alpha_t = -\alpha$, 对于右节点 $\alpha_t = \alpha$; \mathbf{x}^i 为输入数据样本, $i = 1, 2, \dots, M$.

假设共有 L 个叶节点, 即有 $\tilde{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_L\}$. 记 $\mathbf{c}_{\tilde{T}} = [\mathbf{c}_{t_1}^T, \mathbf{c}_{t_2}^T, \dots, \mathbf{c}_{t_L}^T]^T$, 模糊规则(3)中的线性参数 $\mathbf{c}_{\tilde{T}}$ 使用递推最小二乘法求解:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_T^{i+1} = \mathbf{c}_T^i + S_{i+1} \tilde{X}^{i+1} (y^{i+1} - (\tilde{X}^{i+1})^T \mathbf{c}_T^i), \\ S_{i+1} = S_i - \frac{S_i \tilde{X}^{i+1} (\tilde{X}^{i+1})^T S_i}{1 + (\tilde{X}^{i+1})^T S_i \tilde{X}^{i+1}}, \end{cases} \quad (7)$$

$i = 1, \dots, M - 1$, 其中 $c_{\bar{T}}^0 = 0$, $S_0 = \tilde{\lambda}I$, $\tilde{\lambda}$ 为一个足够大的正数, I 是单位矩阵,

$$\tilde{X}^i = \left[\frac{N_{t_1}(\mathbf{x}^i)}{\sum_{t_l \in \bar{T}} N_{t_l}(\mathbf{x}^i)} (\hat{\mathbf{x}}^i)^T, \dots, \frac{N_{t_L}(\mathbf{x}^i)}{\sum_{t_l \in \bar{T}} N_{t_l}(\mathbf{x}^i)} (\hat{\mathbf{x}}^i)^T \right]^T.$$

下面给出模糊树模型的建模步骤.

模糊树辨识算法^[9,10]:

1) 给定输入输出数据样本 (\mathbf{x}^i, y^i) , $i = 1, 2, \dots, M$, $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$, $y^i \in \mathbb{R}$, 期望误差 σ_e 和最大叶节点数 L ;

2) 确定模糊带的宽度 $\alpha > 0$. 初始化根节点, 令 $N_1(\mathbf{x}) \equiv 1$, 树的深度 $d = 0$. 根据式(7)求解根节点上的线性参数 c_1 ;

3) 依次处理当前深度 d 上的每一个节点: 划分该节点, 根据式(5)(6)计算划分后新产生的左右子节点上的隶属度函数, 根据式(7)计算划分后所有叶节点上的线性参数. 根据式(4)计算所有输入样本对应的划分后的模型输出 \hat{y}^i , $i = 1, 2, \dots, M$. 根据式(8)计算均方根误差 σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\hat{y}^i - y^i)^2}{M}}. \quad (8)$$

如果划分后模型输出的均方根误差小于划分前模型输出的均方根误差, 那么保存此次划分, 否则此次划分无效, 处理当前层的下一个节点.

4) 当前层处理完毕后, 如果 $\sigma < \sigma_e$ 或者叶节点数超过了 L , 则算法结束; 否则, 令 $d = d + 1$, 返回到第3)步, 继续算法.

模糊树辨识方法建模精度高, 计算量小, 对输入维数不敏感, 适合处理高维问题, 是一种高效的T-S模糊模型建模方法. 模糊树模型作为一种特殊的T-S模糊模型, 能够任意逼近定义在闭集上的任意连续函数^[12,13].

4 控制器设计(Controller design)

假设有 L 个叶节点, 模糊树模型的输入输出表达式可以重新整理成

$$\begin{aligned} \hat{y}(\mathbf{x}) &= \sum_{t_l \in \bar{T}} \mu_{t_l}(\mathbf{x}) c_{t_l}^T \hat{\mathbf{x}} = \sum_{l=1}^L \mu_{t_l}(\mathbf{x}) \sum_{i=0}^n c_i^{t_l} x_i = \\ &= \sum_{l=1}^L \sum_{i=0}^n \mu_{t_l}(\mathbf{x}) x_i c_i^{t_l} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=0}^n \hat{\mu}_{l_i}(\mathbf{x}) c_i^{t_l} = \\ &= \sum_{k=1}^{(n+1)L} \theta_k \xi_k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $x_0 \equiv 1$, $\theta_k = c_i^{t_l}$, $\xi_k(\mathbf{x}) = \hat{\mu}_{l_i}(\mathbf{x}) = \mu_{t_l}(\mathbf{x}) x_i$. 下标 k, l, i 满足 $k = n(l - 1) + l + i$, $i = 0, 1, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, L$.

本文用模糊树模型 $\hat{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x})$ 和 $\hat{g}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_g^T \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x})$ 逼近系统中的未知非线性函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$. 借鉴文献[14]的设计思想, 本文采用形式上类似的控制和调参规律.

采用如下控制:

$$u = u_c + u_s. \quad (10)$$

其中: u_s 为监督控制器, 且

$$u_c = \frac{1}{\hat{g}(\mathbf{x})} [-\hat{f}(\mathbf{x}) + y_m^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} + k \operatorname{sgn}(s)], \quad (11)$$

$$u_s = I^* \operatorname{sgn}(s) \frac{1}{g_{\min}(\mathbf{x})} [|\hat{f}(\mathbf{x})| + f_{\max}(\mathbf{x}) + |\hat{g}(\mathbf{x})u_c| + |g_{\max}(\mathbf{x})u_c|]. \quad (12)$$

其中: $k > 0$, 当 $V_1 = \frac{1}{2}s^2 > \bar{V}$ 时, $I^* = 1$; 当 $V_1 \leq \bar{V}$ 时, $I^* = 0$ (\bar{V} 限制了系统内部状态的界, 可根据设计要求确定).

为了降低抖振, 采用连续函数 S_δ 代替 $\operatorname{sgn} s$:

$$S_\delta = \frac{s}{|s| + \delta}. \quad (13)$$

其中: $\delta = \delta_0 + \delta_1 \|e\|$, $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$.

参数的自适应调节律取为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_f = \begin{cases} -\gamma_1 s \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}), & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 < M_f \text{ 或} \\ & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 = M_f, \\ & s \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}) \geq 0; \\ P(-\gamma_1 s \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x})), & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 = M_f, \\ & s \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_g = \begin{cases} -\gamma_2 s \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c, & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 < M_g \text{ 或} \\ & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 = M_g, \\ & s \boldsymbol{\theta}_g^T \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c \geq 0; \\ P(-\gamma_2 s \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c), & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 = M_g, \\ & s \boldsymbol{\theta}_g^T \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c < 0. \end{cases} \quad (15)$$

其中: $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ 为学习率, M_f 和 M_g 是参数寻优空间的界, 通常设其为足够大.

$$\begin{aligned} P(-\gamma_1 s \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x})) &= \\ &= -\gamma_1 s \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}) + \gamma_1 s \frac{\boldsymbol{\theta}_f \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2^2}, \\ P(-\gamma_2 s \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c) &= \\ &= -\gamma_2 s \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c + \gamma_2 s \frac{\boldsymbol{\theta}_g \boldsymbol{\theta}_g^T \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_g\|_2^2} u_c. \end{aligned}$$

具体的控制器设计步骤如下:

- 1) 根据设计的要求, 确定参数 λ, C, M_f, M_g 和 \bar{V} ;
- 2) 获取一定数量的样本数据, 使用模糊树辨识

算法离线建立 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 的模糊模型,构造初始的控制器,如式(10)~(13);

3) 确定参数的寻优空间和学习因子. 可根据具体情况令 $M_f \geq \|\boldsymbol{\theta}_f(0)\|_2$, $M_g \geq \|\boldsymbol{\theta}_g(0)\|_2$, 根据式(14)和(15)进行在线调参.

定理 1 采用如上步骤设计控制器, 则总体设计方案有如下性能:

1) 对 $\forall t \leq 0$, $\|\boldsymbol{\theta}_f(t)\|_2 \leq M_f$, $\|\boldsymbol{\theta}_g(t)\|_2 \leq M_g$.

2) $\exists t \geq T$, 当 $t \geq T$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq M_y + \sum_{i=1}^n 2^i \lambda^{i-n} \sqrt{V}.$$

3) 对 $t \geq 0$, 存在常数 a, b 和函数 $\omega(t)$, 其中 $\omega(t)$ 为最小近似误差, 有

$$\int_0^t |s| d\tau \leq a + b \int_0^t |\omega(\tau)| d\tau. \quad (16)$$

4) 若 $\hat{g}(\mathbf{x}) \geq \varepsilon > 0$, 且 $\omega \in L_1$, 即 $\int_0^\infty |\omega(\tau)| d\tau < \infty$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$.

证 定理的证明过程借鉴了文献[14]中的方法.

1) 记 $V_f = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\theta}_f$, 首先有 $\|\boldsymbol{\theta}_f(0)\|_2 \leq M_f$.

根据设计的自适应律(14), 当 $\|\boldsymbol{\theta}_f(t)\|_2 = M_f$ 时, 若 $s \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}) \geq 0$, 则 $\dot{V}_f = \boldsymbol{\theta}_f^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_f = -\gamma_1 s \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}) \leq 0$; 若 $s \boldsymbol{\theta}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}) < 0$, 则 $\dot{V}_f = \boldsymbol{\theta}_f^T P(-\gamma_1 s \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x})) = 0$. 即总有 $\dot{V}_f \leq 0$. 故 $\forall t \leq 0$, 有 $\|\boldsymbol{\theta}_f(t)\|_2 \leq M_f$. 同理可证 $\forall t \leq 0$, 有 $\|\boldsymbol{\theta}_g(t)\|_2 \leq M_g$.

2) 记 $V_1 = \frac{1}{2} s^2$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s \dot{s} = \\ & s(k_1 \dot{e} + k_2 \ddot{e} + \cdots + k_{n-1} e^{(n-1)} + e^{(n)}) = \\ & s[\hat{f}(\mathbf{x}) + \hat{g}(\mathbf{x}) u_c - k \operatorname{sgn}(s) - \\ & (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) u)] = \\ & -k|s| + s[(\hat{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) + (\hat{g}(\mathbf{x}) \\ & - g(\mathbf{x})) u_c - g(\mathbf{x}) u_s]. \end{aligned}$$

对 $\forall t \geq 0$, 当 $V_1 > \bar{V}$ 时,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \\ & -k|s| + |s| [|\hat{f}(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x})| + |\hat{g}(\mathbf{x}) u_c| + \\ & |g(\mathbf{x}) u_c|] - |s| \frac{g(\mathbf{x})}{g_{\min}(\mathbf{x})} [|\hat{f}(\mathbf{x})| + |f_{\max}(\mathbf{x})| + \\ & |\hat{g}(\mathbf{x}) u_c| + |g_{\max}(\mathbf{x}) u_c|] \leq -k|s| \leq 0. \end{aligned}$$

由于 V_1 是时间 t 的连续函数, 故在采样时间间隔充分小的条件下, 有 $V_1 \leq 2\bar{V}$. 当 $I^* = 0$ 时, $V_1 \leq \bar{V} < 2\bar{V}$. 因此 $|s| \leq 2\bar{V}, \forall t \geq 0$. 根据引理1可知

$$C = 2\sqrt{\bar{V}}, |e_i| \leq 2^i \lambda^{i-n} \sqrt{\bar{V}}, i = 1, 2, \dots, n.$$

根据假设1及 $\mathbf{e} = \mathbf{y}_m - \mathbf{y} = \mathbf{y}_m - \mathbf{x}$, 得

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq M_y + \sum_{i=1}^n 2^i \lambda^{i-n} \sqrt{\bar{V}}, \forall t \geq 0.$$

3) 定义最优参数向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_f^* &= \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\theta}_f \in \omega_f} [\sup |\hat{f}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_f) - f(\mathbf{x})|], \\ \boldsymbol{\theta}_g^* &= \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\theta}_g \in \omega_g} [\sup |\hat{g}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_g) - g(\mathbf{x})|]. \end{aligned}$$

其中: ω_f 和 ω_g 分别是 $\boldsymbol{\theta}_f$ 和 $\boldsymbol{\theta}_g$ 的参数寻优空间,

$$\omega_f = \{\boldsymbol{\theta}_f \mid \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 \leq M_f\},$$

$$\omega_g = \{\boldsymbol{\theta}_g \mid \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 \leq M_g\}.$$

定义最小近似误差:

$$\begin{aligned} \omega &= (\hat{f}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_f^*) - f(\mathbf{x})) + \\ & (\hat{g}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_g^*) - g(\mathbf{x})) u_c, \end{aligned} \quad (17)$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{s} &= [\hat{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] + [\hat{g}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] u_c - \\ & g(\mathbf{x}) u_s - k \operatorname{sgn}(s). \end{aligned} \quad (18)$$

将式(17)代入式(18)得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \boldsymbol{\phi}_f^T \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\phi}_g^T \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c - g(\mathbf{x}) u_s - \\ & k \operatorname{sgn}(s) + \omega. \end{aligned} \quad (19)$$

其中:

$$\boldsymbol{\phi}_f = \boldsymbol{\theta}_f - \boldsymbol{\theta}_f^*, \boldsymbol{\phi}_g = \boldsymbol{\theta}_g - \boldsymbol{\theta}_g^*.$$

考虑可能候选的李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} (s^2 + \frac{1}{\gamma_1} \boldsymbol{\phi}_f^T \boldsymbol{\phi}_f + \frac{1}{\gamma_2} \boldsymbol{\phi}_g^T \boldsymbol{\phi}_g).$$

沿式(19)的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \dot{s} + \frac{1}{\gamma_1} \boldsymbol{\phi}_f^T \dot{\boldsymbol{\phi}}_f + \frac{1}{\gamma_2} \boldsymbol{\phi}_g^T \dot{\boldsymbol{\phi}}_g = \\ & -k|s| + \frac{1}{\gamma_1} \boldsymbol{\phi}_f^T [\dot{\boldsymbol{\theta}}_f + \gamma_1 s \boldsymbol{\xi}_f(\mathbf{x})] + \frac{1}{\gamma_2} \boldsymbol{\phi}_g^T [\dot{\boldsymbol{\theta}}_g + \\ & \gamma_2 s \boldsymbol{\xi}_g(\mathbf{x}) u_c] - g(\mathbf{x}) s u_s + s \omega. \end{aligned}$$

其中: $\dot{\boldsymbol{\theta}}_f = \dot{\boldsymbol{\phi}}_f, \dot{\boldsymbol{\theta}}_g = \dot{\boldsymbol{\phi}}_g$.

由 u_s 的定义可得 $g(\mathbf{x}) s u_s \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -k|s| + s \omega \leq -k|s| + |s| |\omega| \leq \\ & -k|s| + 2\sqrt{\bar{V}} |\omega|. \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)两边从0到 t 积分, 有

$$V(t) - V(0) \leq -k \int_0^t |s| d\tau + 2\sqrt{\bar{V}} \int_0^t |\omega| d\tau,$$

则有 $k \int_0^t |s| d\tau \leq V(t) + k \int_0^t |s| d\tau$. 又因为

$$V(t) + k \int_0^t |s| d\tau \leq V(0) + 2\sqrt{\bar{V}} \int_0^t |\omega| d\tau.$$

因此有

$$\int_0^t |s| d\tau \leq \frac{V(0)}{k} + \frac{2\sqrt{V}}{k} \int_0^t |\omega| d\tau \triangleq a + b \int_0^t |\omega| d\tau.$$

4) 若 $\omega \in L_1$, 由式(16)可得 $s \in L_1$. 类似文献[14], 可得 $\hat{f}(x)$ 和 $\hat{g}(x)$ 是有界的, 因此 u_c 和 u_s 是有界的. 因此证明了式(18)右边的所有变量均有界, 故可得 $\dot{s} \in L_\infty$. 由Barbalat引理, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$. 再根据引理1可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

5 仿真结果(Simulation example)

本节考虑倒立摆系统的跟踪控制问题. 倒立摆系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right) + \frac{\cos x_1}{m_c + m}} u. \end{cases}$$

其中: 状态 x_1 表示摆与垂直线的偏角 θ , x_2 表示角速度 $\dot{\theta}$. m_c 是小车的质量, m 是摆的质量, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 是重力加速度, $2l$ 是摆的长度, u 是作用在小车上的力即控制量.

下面采用本文提出的方法对倒立摆系统进行跟踪控制, 与两种方法进行比较: 一种是文献[6], 采用网格法划分输入空间, 没有监督控制器且控制律的设计没有采用投影算法; 另一种方法是采用网格法划分输入空间, 带有监督控制器且控制律的设计采用了投影算法. 这两种方法均构造了具有25条模糊规则的Mamdani模糊模型去逼近未知函数. 取与文献[6]相同的参数, 即

$$m_c = 1 \text{ kg}, m = 0.1 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m},$$

跟踪正弦信号 $y_m(t) = 0.1\sin(\pi t)$. 取

$$\begin{aligned} k_1 = \lambda = 5, \gamma_1 = 5, \gamma_2 = 1, \\ \delta_0 = 0.03, \delta_1 = 5, \delta = \delta_0 + \delta_1 \|e\|. \end{aligned}$$

图1和图2分别给出了用10条模糊规则的模糊树模型去逼近未知函数, 初始状态分别为 $x(0) = [\pi/60, 0]^T$ 和 $x(0) = [-\pi/60, 0]^T$ 时的仿真结果, 同时给出了实际输出 $y(t)$ 与期望输出 $y_m(t)$ 的曲线图, 控制量 $u(t)$ 的曲线图和跟踪误差 $e(t)$ 的曲线. 由图1和图2可知, 系统经过约1 s达到稳定状态, 且跟

踪误差是令人满意的.

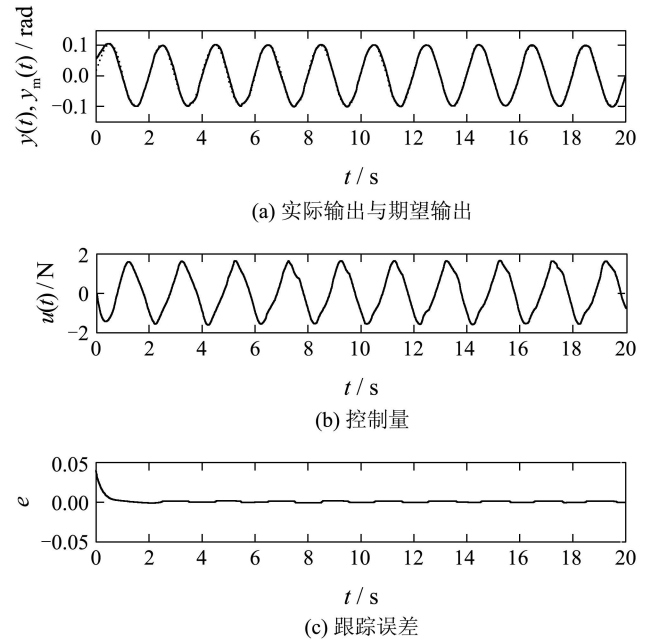


图 1 $x(0) = [\pi/60, 0]^T$ 时的仿真结果(本文方法)
Fig. 1 Simulation results for the proposed method with the initial condition $x(0) = [\pi/60, 0]^T$

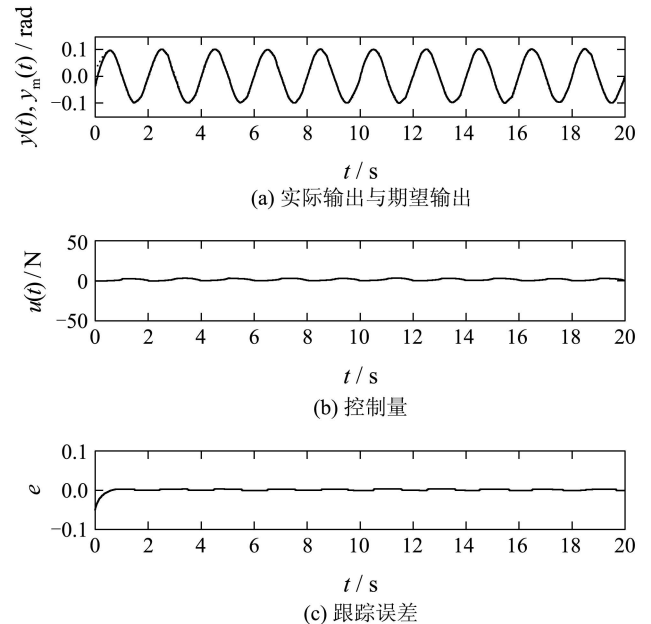


图 2 $x(0) = [-\pi/60, 0]^T$ 时的仿真结果(本文方法)
Fig. 2 Simulation results for the proposed method with the initial condition $x(0) = [-\pi/60, 0]^T$

不同初始条件下, 仿真结果的跟踪精度见表1, 其中给出的是仿真最后10 s的均方根误差, 是进行了10次仿真得到的最好结果. 根据表1, 本文提出的基于模糊树模型的自适应模糊滑模控制器, 体现出较好的跟踪性能.

表1 跟踪精度比较
Table 1 Comparison of RMSE

方法	$\mathbf{x}(0) = [\pi/60, 0]^T$	$\mathbf{x}(0) = [-\pi/60, 0]^T$
本文方法	6.72×10^{-4}	6.64×10^{-4}
比较方法1	1.60×10^{-3}	2.20×10^{-3}
比较方法2	9.96×10^{-4}	1.30×10^{-3}

注1 本文方法: 10条规则的模糊树模型逼近未知函数。

比较方法1: 25条规则的Mamdani模型逼近未知函数, 没有监督控制器且控制律的设计没有采用投影算法。

比较方法2: 25条规则的Mamdani模型逼近未知函数, 带有监督控制器且控制律的设计采用了投影算法。

6 结论(Conclusion)

本文基于模糊树模型, 结合滑模控制方法, 针对单输入-单输出的非线性系统, 提出了一种自适应模糊控制器的设计方法。主要思想是离线建立模糊树模型, 逼近系统中的未知非线性函数, 得到初始的控制器, 然后在线调节模糊树模型中的线性参数, 改善控制器的性能, 最终实现对参考信号的跟踪控制。由于模糊树模型是一种高效的T-S模糊模型辨识方法, 可以有效减少模型中模糊规则的数目, 因此, 与采用网格法划分输入空间建立Mamdani型模糊模型构造自适应模糊控制器的方法相比, 可以用较少的模糊规则达到更好的控制效果, 在一定程度上可以缓解困扰模糊控制应用的“规则爆炸”的问题。仿真结果表明本文提出的控制算法具有良好的跟踪性能, 而且不产生通常滑模控制所具有的颤动。

参考文献(References):

- [1] WANG J, RAD A B, CHAN P T. Indirect adaptive fuzzy sliding mode control-part I: fuzzy switching[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 122(1): 21 - 30.
- [2] HO H F, WONG Y K, RAD A B. Adaptive fuzzy sliding mode control design: Lyapunov approach[C] // *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*. Melbourne, Australia: IEEE, 2004: 1502 - 1507.
- [3] WANG T, TONG S C. Output feedback control of nonlinear systems using adaptive fuzzy sliding mode controller[C] // *Proceedings of the 4th International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Guangzhou: IEEE, 2005: 1345 - 1350.
- [4] WANG T, TONG S C. Adaptive fuzzy output feedback control for SISO nonlinear systems[C] // *IEEE Proceedings of the 3rd International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Shanghai: IEEE, 2004: 833 - 838.
- [5] HO H F, WONG Y K, RAD A B. Adaptive fuzzy sliding mode control for SISO nonlinear systems[C] // *The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Saint Louis, Missouri, USA: IEEE, 2003: 1344 - 1349.
- [6] 刘金琨. 滑模变结构控制MATLAB仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 150 - 161.
(LIU Jinkun. *MATLAB Simulations for Sliding Mode Variable Structure Control*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005, 150 - 161.)
- [7] 李莉. 基于T-S模型的自适应模糊系统的研究及应用[D]. 西安: 西北工业大学, 2003.
(LI Li. *Adaptive fuzzy system based on T-S fuzzy model and its application research*[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2003.)
- [8] YING H. General SISO Takagi-Sugeno fuzzy system with linear rule consequent are approximators[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, 6(4): 582 - 587.
- [9] 张建刚, 毛剑琴, 夏天, 等. 模糊树模型及其在复杂系统辨识中的应用[J]. *自动化学报*, 2000, 26(3): 378 - 381.
(ZHANG Jiangan, MAO Jianqin, XIA Tian, et al. Fuzzy-tree model and its applications to complex system modeling[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(3): 378 - 381.)
- [10] MAO J Q, ZHANG J G, YUE Y F, et al. Adaptive tree-structured-based fuzzy inference systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(1): 1 - 12.
- [11] GE S S, HANG C C, LEE T H. *Stable Adaptive Neural Network Control*[M]. Norwell, MA: Kluwer, 2001.
- [12] 毛剑琴, 岳玉芳, 张建刚, 等. 复杂系统模糊建模的模糊树方法[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(2): 153 - 156.
(MAO Jianqin, YUE Yufang, ZHANG Jiangan, et al. Fuzzy-tree method for complex system fuzzy modeling[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 153 - 156.)
- [13] 毛剑琴, 张建刚, 代冀阳, 等. 模糊数模型对有限样本集的逼近[J]. *北京航空航天大学学报*, 2000, 26(2): 231 - 234.
(MAO Jianqin, ZHANG Jiangan, DAI Jiyang, et al. Approximate limit sampling data using fuzzy tree model[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2000, 26(2): 231 - 234.)
- [14] 丁海山, 毛剑琴, 林岩. 基于模糊树模型的间接自适应模糊控制[J]. *自动化学报*, 2008, 34(6): 676 - 683.
(DING Haishan, MAO Jianqin, LIN Yan. Indirect adaptive fuzzy control based on fuzzy tree model[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(6): 676 - 683.)

作者简介:

张伟 (1981—), 女, 博士研究生, 从事模糊建模与控制研究,

E-mail: zhangwqq@163.com;

毛剑琴 (1940—), 女, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒和最优控制及

应用、模糊建模和控制及应用、智能结构动力学与控制研究, E-mail:

jqmao@buaa.edu.cn.