第 27 卷第 2 期
2010 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 2
Feb. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)02−0193−06

连续系统下的一种容偏估计策略

戚国庆, 陈 黎, 李银伢, 盛安冬

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 目标跟踪系统中为降低系统复杂度和保证估计的平稳性常常选择尽可能低阶次的模型, 当目标出现较高阶次的机动时, 则很容易丢失目标. 在假定目标的机动时间与强度均有限时, 提出了容偏估计的思想, 将稳态误差系数约束连同区域极点、估计误差方差上界指标一起构成估计系统的约束指标集, 寻求使得稳态误差系数尽可能小的滤波器, 以使得对机动目标跟踪的系统偏差尽可能小. 通过将约束指标集转化为一组双线性矩阵不等式(BMIs), 并利用迭代求解线性矩阵不等式(LMIs)近似BMIs的方法, 得到了满足给定指标约束要求的容偏估计策略, 所设计的容偏估计策略可同时保证估计的准确性和精确性的要求, 从而保证了在目标出现机动时, 估计输出具有尽可能小的系统偏差. 最后数值算例对所提出的结论进行了说明.

关键词: 目标跟踪; 容偏估计; 线性矩阵不等式; 稳态误差系数; 多指标约束

中图分类号: TP202 **文献标识码**: A

A bias-allowable estimator for continuous-time system

QI Guo-qing, CHEN Li, LI Yin-ya, SHENG An-dong

(Automatic School, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: In an object-tracking system, the order of system model is often chosen as low as possible for reducing the computational complexity and ensuring the estimation smoothness. If the object makes a higher order maneuvering, the tracking system may lose the object. By assuming that the intensity and duration of the target maneuver are finite, we introduce the idea of bias-allowable estimation. The purpose is to find an estimator that makes the steady error coefficient as small as possible for minimizing the tracking system bias, under the constraints of regional poles and the upper bound of the error variance, along with the constraint of steady error coefficient index. The constraint index set is transformed to a set of bilinear matrix inequalities(BMIs). The expected bias-allowable estimator is obtained by iteratively solving linear matrix inequalities(LMIs) to approximate the solutions of BMIs. The proposed bias-allowable estimator ensures the accuracy and smoothness of the estimation output and guarantees the tracking system bias to be small as possible, when the target is maneuvering. Finally, a numerical example is given to illustrate the design of the bias-allowable estimation.

Key words: target tracking; bias-allowable estimation; linear matrix inequality; steady error coefficient; multiindex constraint

1 引言(Introduction)

对于传统的目标跟踪及状态估计问题, 首要准则是无偏最小方差[1∼3]. 只有当测量数据无偏且系统的估计模型与目标的运动模态相一致时, 才能保证估计输出的无偏性. 因此, 对于给定阶次的估计系统, 当被跟踪的目标做突然的机动时, 状态估计结果将会产生系统偏差, 甚至导致跟踪系统丢失目标. 工程中, 为降低计算量和保证目标跟踪的平滑性, 常采用尽可能低阶次的系统模型(如等速直线模型). 因此, 设计一种能够同时令估计结果的系统偏差和随机误差满足给定指标要求的低阶估计策略具有重要工程意义. 对于实际的目标, 由于受到设备性能、工作任务等因素的约束, 其进行机动的强度和时间必然是有限的. 另外, 实际工程中, 对于估计随机误差的要求常常只需满足给定的上界指标而非最小方差即可. 于是, 这就为设计一种使估计结果的系统误差尽可能小的容偏滤波器提供了可能.

对于估计中的系统偏差问题, 文献[4∼6]讨论了多种有偏估计算法, 但所研究的属于参数估计问题, 常用于自回归分析中, 而不适合于实时的目标状态估计与跟踪. 众所周知, 稳态误差系数是衡量系统偏差的一个有效指标, 合理地配置稳态误差系数将可以有效降低估计系统的稳态偏差. 目前, 有关稳态误差系数的研究主要集中于对控制策略的设计方

收稿日期: 2009−06−23; 收修改稿日期: 2009−11−11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60804019); 南京理工大学科技发展基金资助项目(XKF09020).

法上, 如文献[7]利用广义稳态误差系数, 分析了伺服控制系统中, 对不同的输入信号采用反馈补偿器和鲁棒补偿器时, 稳态误差的差异. 文献[8]给出了一种广义误差系数方法来分析非单位反馈线性系统的性能. 文献[7,8]仅仅讨论了控制系统设计中误差系数一项指标, 而实际工程中, 在设计估计或控制策略时, 还有诸如响应速度以及输出的精度等其他指标需要考虑. 如文献[9]研究了控制系统中稳态误差系数指标、圆形极点指标及稳态输出误差上界指标间的相容性问题, 并给出了PID控制器最优参数的选取方法. 文献[10]对带有稳态误差系数上界约束的跟踪系统研究了有关满意状态反馈控制问题, 该文将稳态误差系数指标用一组线性矩阵不等式描述, 在稳态误差方差及稳定裕度指标约束下, 通过求解线性矩阵不等式组得到了满意的跟踪控制策略. 然而, 关于含有稳态误差系数上界等多指标约束的估计策略设计问题的相关研究仍较为少见.

本文研究了一种连续时间系统的容偏估计策略设计方法. 首先, 给出了系统测量到输出误差间的传递函数, 从而得到了稳态误差系数的表达式. 其次, 将稳态误差系数上界约束指标描述为关于滤波增益的矩阵不等式, 并分析了降低误差系数的方法. 然后, 利用迭代求解线性矩阵不等式组的方法, 以近似由稳态误差系数上界指标、区域极点指标及稳态误差方差上界指标约束所描述的双线性矩阵不等式组, 得到了期望的容偏估计策略. 最后通过数值算例, 对文章的结论进行了说明.

2 问题描述(Problem description)

考虑如下线性时不变随机系统的稳态估计问题:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bw(t), \\ y(t) = CX(t) + v(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $X(t)$为n维状态向量, $y(t)$为m维测量向量, $w(t)$及$v(t)$为互不相关的零均值、方差分别为W, V的模型及测量噪声, 且$w(t), v(t)$与初始状态$X(0)$相互独立. A, B, C为适维参数矩阵. 设计如下稳态滤波器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + K[y(t) - C\hat{X}(t)] = \\ [A - KC]\hat{X}(t) + Ky(t). \end{aligned} \tag{2}$$

其中K为待求的滤波增益阵. 滤波误差 $\tilde{X}(t) = X(t) - \hat{X}(t)$满足如下方程:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = [A - KC]\tilde{X}(t) - Kv(t) + Bw(t). \tag{3}$$

而$\hat{X}(0) = X(0)$, $\tilde{X}(0) = 0$. 如果K为一稳定滤波器, 则稳态误差方差$P = \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{E}\{\tilde{X}(t)\cdot\tilde{X}^{\mathrm{T}}(t)\}$必然存在, 且$P$为如下连续型李雅普诺夫方程的唯一正定解:

$$\begin{aligned} f(P, K) = [A - KC]P + P[A - KC]^{\mathrm{T}} + \\ KVK^{\mathrm{T}} + BWB^{\mathrm{T}} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

令t时刻目标真实位置为$r(t)$, 则有

$$r(t) = \mathrm{E}[y(t)]. \tag{5}$$

对式(3)两侧同时求期望, 得

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\dot{\hat{X}}(t)] = [A - KC]\mathrm{E}[\hat{X}(t)] + K\mathrm{E}[y(t)] = \\ [A - KC]\mathrm{E}[\hat{X}(t)] + Kr(t). \end{aligned} \tag{6}$$

再对式(6)两侧同时求取拉普拉斯变换, 得

$$\hat{X}(s) = [sI - (A - KC)]^{-1}Kr(s). \tag{7}$$

滤波输出则为

$$\hat{y}(s) = C\hat{X}(s) = C[sI - (A - KC)]^{-1}Kr(s).$$

于是滤波输出误差为

$$\begin{aligned} & e(s) = r(s) - \hat{y}(s) = \\ & \{I_1 - C[sI - (A - KC)]^{-1}K\}r(s) = \\ & \varPhi_e(s)r(s), \end{aligned} \tag{8}$$

其中I_1, I为适维单位阵. 目标真实位置到滤波输出误差的传递函数则为

$$\varPhi_e(s) = I_1 - C[sI - (A - KC)]^{-1}K. \tag{9}$$

为便于问题分析, 假定系统状态向量为

$$X = [x\ \dot{x}\ \cdots\ x^{(n)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

且系统输出为标量, 于是有

$$A = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right\} n,\ C = \underbrace{[1\ 0\ \cdots\ 0]}_{n}.$$

对于具有多输出的系统, 研究方法相似. 在上述假定下, 系统的误差传递函数为

$$\begin{aligned} \varPhi_e(s) = I_1 - C[sI - (A - KC)]^{-1}K = \\ \frac{s^n}{s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_{n-1}s + k_n}. \end{aligned} \tag{10}$$

其中$k_i (i = 1, 2, \cdots, n)$为$K$的第$i$个元素. 由于实际的目标测量一般可分解为随机噪声和由阶跃、斜坡、加速度等确定性函数所构成的信号, 所以它们对滤波精度的影响可分别由稳态滤波误差方差和稳态误差系数的大小来描述. 对于n阶系统, 若目标运动模态最高阶次为m, 令

$$r(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m.$$

其中$a_i(i=0,1,\cdots,m)$为未知实常数, $r(t)$的拉普拉斯变换为

$$r(s)=a_0\frac{1}{s}+a_1\frac{1}{s^2}+\cdots+a_m\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

于是输出误差为

$$e(s)=\frac{s^n(a_0\frac{1}{s}+a_1\frac{1}{s^2}+\cdots+a_m\frac{m!}{s^{m+1}})}{s^n+k_1s^{n-1}+\cdots+k_{n-1}s+k_n}. \quad (11)$$

利用拉普拉斯变化的终值定理, 稳态输出误差为

$$e_{\rm ss}=\lim_{s\to 0}se(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s^n(a_0\frac{1}{s}+a_1\frac{1}{s^2}+\cdots+a_m\frac{m!}{s^{m+1}})}{s^n+k_1s^{n-1}+\cdots+k_{n-1}s+k_n}=$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+(m-1)!a_{m-1}s^{n-m+1}+m!a_ms^{n-m}}{s^n+k_1s^{n-1}+\cdots+k_{n-1}s+k_n}=\begin{cases}0, & m<n,\\ \dfrac{n!a_n}{k_n}, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases} \quad (12)$$

显然, 只有在$m\leqslant n$的情况下研究稳态系统误差问题才有实际意义, 由式(12), 式

$$|e_{\rm ss}|=|a_n|\frac{n!}{|k_n|}<+\infty$$

在$|a_n|<+\infty$时将始终成立. 于是, $e_{\rm ss}$将仅与k_n有关. 因此, 研究$|e_{\rm ss}|$的大小即可转化为研究k_n的大小. 假定$K>0$(如果$K<0$, 则研究方法相似), 令$c_n=1/k_n=(e_nK)^{-1}$, 其中$e_n=[0\ \cdots\ 0\ 1]_n$. 本文的研究目标即可归纳为如下问题.

问题 1 寻找滤波增益阵K, 使得在如下a)~c)约束下, 估计系统(2)的误差系数c_n取极小:

a) $(A-KC)$的所有极点满足$\Lambda[(A-KC)]\subset F(q,l)$;

b) 稳态估计误差方差P满足$CPC^{\rm T}<\sigma^2$;

c) 稳态误差系数$c_n<\gamma$.

其中: $F(q,l)$为复平面上中心在$(-q,0)$, 半径为$l(0<l<q)$的开圆盘, σ及γ为给定正数.

3 主要结论(Main results)

本节中, 问题1的约束将转换为一组双线性矩阵不等式, 并给出关于期望的容偏估计策略的求解方法. 首先给出解决问题的相关引理、定理及推论.

引理 1 对误差系统(3), 存在满足约束a)的滤波增益K的充分必要条件是, 如下关于(Q_1, Q_2,K)的双线性矩阵不等式组有解[11]:

$$(A-KC+qI)Q_1(A-KC+qI)^{\rm T}-l^2Q_1<0, \quad (13)$$

$$(A-KC)Q_2+Q_2(I-KC)^{\rm T}+KVK^{\rm T}+BWB^{\rm T}<0, \quad (14)$$

$$Q_1>0,\ Q_2>0. \quad (15)$$

若(Q_1,Q_2,K)是上述不等式组的任一解, 则滤波增益K必使误差系统(3)的稳态滤波误差方差阵P满足关系: $P<Q_2$, 且满足约束a)的稳态误差方差下界P_l可通过对不等式组(13)~(15)求解极小值问题$\min\{{\rm tr}(Q_2)\}$而得到.

${\rm tr}(\cdot)$为求迹运算. 由引理1易见, 对于滤波系统(2), 所有满足$CP_lC^{\rm T}<\sigma^2$的方差上界指标σ^2均与极点约束指标$F(q,l)$相容, 即式(13)~(15)及

$$CQ_2C^{\rm T}<\sigma^2 \quad (16)$$

总存在可行解(Q_1,Q_2,K). 于是, 可得到如下结论:

定理 1 对任一满足$CP_lC^{\rm T}<\sigma^2$的方差上界指标σ^2, 如果关于(Q_1,Q_2,K)的双线性矩阵不等式组(14)~(16)及

$$(e_nK)^{-1}<\gamma \quad (17)$$

具有可行解(Q_1,Q_2,K), 则K即为使得误差系统(3满足问题1中约束a)~c)的滤波增益.

证 式(17)等价于约束c), 由引理1以及约束a)b) 的相容条件易得定理1成立.

由引理1及定理1, 可得如下推论:

推论 1 若对关于变量(Q_1,Q_2,K)的矩阵不等式组(13)~(15)(17)及

$$CPC^{\rm T}<\sigma^2, \quad (18)$$

求解约束极大值问题$\max(e_nK)$有解, 令(Q_1,Q_2, K)为任一解, 则K为满足问题1的容偏滤波增益.

推论1给出了求解问题1的思路. MATLAB软件的LMI工具箱是求解矩阵不等式问题的有效工具, 但对于求解双线性矩阵不等式则非常困难. 因此为方便问题求解, 需对不等式(13)及(14)进行转换. 根据文献[12]所提供的方法, 在滤波增益上叠加

一个微小摄动量δK以期达到减小c_n的目的, 其中$e_n\delta K > 0$. 于是, 可以找到一条通路$K_{k+1} = K_k+\delta K$使得c_n持续减小, 并利用不等式$CP_kC^{\mathrm{T}} < \sigma^2$同时约束$K_k$, 其中$P_k$为相应于$K_k$的稳态滤波误差方差. 另外, 对$Q_1$和$Q_2$也分别叠加微小摄动:

$$Q_{1(k+1)} = Q_{1k} + \delta Q_1,\ Q_{2(k+1)} = Q_{2k} + \delta Q_2.$$

于是式(13)可以转化为如下关于$\delta K, \delta Q_1$的不等式:

$$\begin{aligned}&(A-K_kC+qI)Q_{1k}(A-K_kC+qI)^{\mathrm{T}}-\\&l^2Q_{1k} - \delta KCQ_{1k}(A - K_kC + qI) -\\&(A - K_kC + qI)^{\mathrm{T}}Q_{1k}C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} + (A-\\&K_kC+qI)\delta Q_1(A-K_kC+qI)-l^2\delta Q_1-\\&\delta KCQ_{1k}(A-K_kC+qI)-(A-K_kC+\\&qI)^{\mathrm{T}}Q_{1k}C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} + \delta KC\delta Q_1C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} +\\&\delta KCQ_{1k}C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} < 0.\end{aligned}\tag{19}$$

而式(14)可以转换为如下关于$\delta K, \delta Q_2$的不等式:

$$\begin{aligned}&(A - K_kC)Q_{2k} + Q_{2k}(A - K_kC)^{\mathrm{T}} +\\&K_kVK_k^{\mathrm{T}} + BWB^{\mathrm{T}} + \delta KV\delta K^{\mathrm{T}} +\\&(A - K_kC)\delta Q_{2k} + \delta Q_{2k}(A - K_kC)^{\mathrm{T}} +\\&\delta K(VK_k^{\mathrm{T}} - CQ_{2k}) + (VK_k^{\mathrm{T}} - CQ_{2k})^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} -\\&\delta KC\delta Q_2 - \delta Q_2(\delta KC)^{\mathrm{T}} < 0.\end{aligned}\tag{20}$$

不等式(19)(20)中仍然含有非线性项, 即

$$\delta KCQ_{1k}(A - K_kC + qI),$$
$$(A - K_kC + qI)^{\mathrm{T}}Q_{1k}C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}},$$

$\delta KC\delta Q_2$及$\delta Q_2(\delta KC)^{\mathrm{T}}$, 因此, 式(19)(20)暂时仍无法利用Schur补引理[13]转换为线性矩阵不等式. 为此, 引入如下引理.

引理 2 对任一矩阵适维M及N, 如下不等式恒成立[14]:

$$MN^{\mathrm{T}} + NM^{\mathrm{T}} \leqslant MM^{\mathrm{T}} + NN^{\mathrm{T}}.\tag{21}$$

由引理2, 并忽略3阶无穷小项, 式(19)(20)可以转化为如下不等式:

$$\begin{aligned}&(A - K_kC + qI)Q_{1k}(A - K_kC + qI)^{\mathrm{T}} -\\&l^2Q_{1k} - l^2\delta Q_1 - \delta KCQ_{1k}(A - K_kC + qI) -\\&(A - K_kC + qI)^{\mathrm{T}}Q_{1k}C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} + (A -\\&K_kC + qI)\delta Q_1(A - K_kC + qI) + (A -\\&K_kC + qI)\delta Q_1\delta Q_1(A - K_kC + qI)^{\mathrm{T}} +\\&\delta KC(I + Q_{1k})C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} < 0,\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&(A - K_kC)Q_{2k} + Q_{2k}(A - K_kC)^{\mathrm{T}} +\\&K_kVK_k^{\mathrm{T}} + BWB^{\mathrm{T}} + (A - K_kC)\delta Q_{2k} +\\&\delta Q_{2k}(A - K_kC)^{\mathrm{T}} + \delta K(VK_k^{\mathrm{T}} - CQ_{2k}) +\\&(VK_k^{\mathrm{T}} - CQ_{2k})^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} + \delta K(CC^{\mathrm{T}} +\\&V)\delta K^{\mathrm{T}} + \delta Q_2\delta Q_2 < 0.\end{aligned}\tag{23}$$

利用Schur补引理, 式(22)等价于如下块对称矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}\varPi(\delta K, \delta Q_1) & (A-K_kC+qI)\delta Q_1 & \delta KC\\ * & -I & 0\\ * & * & -(I + Q_{1k})^{-1}\end{bmatrix}<0.\tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varPi(\delta K, \delta Q_1) =\\&(A - K_kC + qI)Q_{1k}(A - K_kC + qI)^{\mathrm{T}} -\\&l^2\delta Q_1 - l^2Q_{1k} - \delta KCQ_{1k}(A - K_kC +\\&qI) - (A - K_kC + qI)^{\mathrm{T}}Q_{1k}C^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}} +\\&(A - K_kC + qI)\delta Q_1(A - K_kC + qI).\end{aligned}$$

而式(23)等价于如下块对称矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}\varPsi(\delta K, \delta Q_2) & \delta K & \delta Q_2\\ \delta K^{\mathrm{T}} & -(CC^{\mathrm{T}} + V)^{-1} & 0\\ \delta Q_2 & 0 & -I\end{bmatrix} < 0.\tag{25}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varPsi(\delta K, \delta Q_2) =\\&(A - K_kC)Q_{2k} + Q_{2k}(A - K_kC)^{\mathrm{T}} +\\&K_kVK_k^{\mathrm{T}} + BWB^{\mathrm{T}} + (A -\\&K_kC)\delta Q_{2k} + \delta Q_{2k}(A - K_kC)^{\mathrm{T}} +\\&\delta K(VK_k^{\mathrm{T}} - CQ_{2k}) + (VK_k^{\mathrm{T}} - CQ_{2k})^{\mathrm{T}}\delta K^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

下面给出问题1中容偏滤波增益的求解步骤.

迭代算法 1 本算法目的在于寻找最小稳态误差系数上界γ_{u}.

步骤 1 由引理1, 令

$$Q_1 = Q_2,$$

利用LMI工具箱求解关于圆形极点约束a) 的极值问题$\min\{\mathrm{tr}\{Q_2\}\}$, 可得到一个稳态滤波增益$K_1$及其相应的稳态滤波方差阵$P_1$. 令

$$Q_{10} = P_1,\ Q_{20} = P_1,\ K_0 = K_1.$$

设置迭代次数$k = 0$,

步骤 2 考虑如下极值问题:

$\max(\operatorname{inv}\gamma)$:

$(\operatorname{inv}\gamma, \delta Q_1, \delta Q_2, \delta K)$满足不等式(24)(25)及

$$\begin{cases} 0 < \delta Q_1 < 0.01I, \\ 0 < \delta Q_2 < 0.01I, \\ 0 < \delta K^{\mathrm{T}}\delta K < 0.01I, \end{cases} \tag{26}$$

$$\operatorname{inv}\gamma > 0,\ e_n\delta K > 0, \tag{27}$$

$$\operatorname{inv}\gamma - e_n(K_k + \delta K) < 0, \tag{28}$$

其中I为适维单位阵. 如果解$(\operatorname{inv}\gamma, \delta Q_1, \delta Q_2, \delta K)$存在, 令

$$Q_{1(k+1)} = Q_{1k} + \delta Q_1,\ Q_{2(k+1)} = Q_{2k} + \delta Q_2,$$
$$K_{k+1} = K_k + \delta K,\ \gamma_{\mathrm{u}} = 1/(e_n K_k).$$

如果相应于 K_{k+1} 的稳态误差方差 P_{k+1} 满足$CP_{k+1}C^{\mathrm{T}} < \sigma^2$, 则令$k \leftarrow k+1$, 并重新进行步骤2. 如果$CP_{k+1}C^{\mathrm{T}} \geqslant \sigma^2$, 则令$P_{\mathrm{m}} = P_k$, $K_{\mathrm{m}} = K_k$.

迭代算法 2 本算法的目的在于寻求满足问题1的滤波增益阵K.

步骤 1 令$Q_{10} = P_{\mathrm{m}}$, $Q_{20} = P_{\mathrm{m}}$, $K_0 = K_{\mathrm{m}}$, 其中P_{m}及K_{m}为算法1的迭代结果, 置迭代次数$k = 0$.

步骤 2 考虑如下极值问题:

$\min(e_n\delta K)$:

$(\delta Q_1, \delta Q_2, \delta K)$满足不等式(24) ~ (26)及

$$1/\gamma_{\mathrm{u}} - e_n(K_k + \delta K) < 0, \tag{29}$$

$$e_n\delta K > 0. \tag{30}$$

其中γ_{u}为算法1的迭代结果. 如果解$(\delta Q_1, \delta Q_2, \delta K)$存在, 则令

$$Q_{1(k+1)} = Q_{1k} + \delta Q_1,$$
$$Q_{2(k+1)} = Q_{2k} + \delta Q_2,$$
$$K_{k+1} = K_k + \delta K.$$

如果相应于K_{k+1}的稳态滤波误差方差阵P_{k+1}满足$CP_{k+1}C^{\mathrm{T}} < \sigma^2$, 且$CP_{k+1}C^{\mathrm{T}} - CP_kC^{\mathrm{T}} \geqslant \zeta$($\zeta$为一给定的正实数), 则令$k \leftarrow k+1$, 并重新进行步骤2. 如果$CP_{k+1}C^{\mathrm{T}} - CP_kC^{\mathrm{T}} < \zeta$, 或者$CP_{k+1}C^{\mathrm{T}} \geqslant \sigma^2$, 则令$K_{\mathrm{u}} = K_k$, $P_{\mathrm{u}} = P_k$, 迭代结束, K_{u}即为满足问题1的容偏滤波增益阵.

4 数值算例(Numerical example)

本节给出一个2阶系统的数值算例, 对第3节中的迭代算法进行说明. 假定系统系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = [1\ \ 0],\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

且已知

$$W = 5,\ V = 25,\ q = 3,\ l = 2.5.$$

由引理1, 求解上述2阶系统的约束极值$\min\{\mathrm{tr}(Q_2)\}$问题, 可得到如下稳态滤波误差方差及稳态滤波增益:

$$P_{\mathrm{l}} = \begin{bmatrix} 23.9267 & 11.2026 \\ 11.2026 & 10.6224 \end{bmatrix},\ K_{\mathrm{l}} = \begin{bmatrix} 1.0977 \\ 0.4763 \end{bmatrix}.$$

此时, 相应的稳态误差系数为$c_2 = 2.10$. 下面, 利用一个3阶系统给出稳态滤波误差方差上界参考值, 假定系统系数矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_1 = [1\ \ 0\ \ 0],\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

W及V保持不变. 再次利用引理1, 求解约束极值$\min\{\mathrm{tr}(Q_2)\}$问题, 得到该3阶系统的稳态滤波方差阵为

$$P_{1\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} 48.0647 & 37.6251 & 9.3724 \\ 37.6251 & 39.8998 & 10.3101 \\ 9.3724 & 10.3101 & 3.2424 \end{bmatrix}.$$

令稳态滤波误差方差上界为$\sigma^2 = 48.0647$. 由算法1, 经过85次迭代得到稳态误差系数最小上界为$\gamma_{\mathrm{u}} = 0.4853$, 且有

$$K_{\mathrm{m}} = [3.1594\ \ 2.0605]^{\mathrm{T}},$$

$$P_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} 48.0285 & 26.9694 \\ 26.9694 & 21.4223 \end{bmatrix}.$$

令$\zeta = 0.0001$, 由算法2, 经过5次迭代, 得到

$$K_{\mathrm{u}} = [3.1627\ \ 2.0614]^{\mathrm{T}},$$

相应的稳态滤波误差方差为

$$P_{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} 48.0645 & 26.9802 \\ 26.9802 & 21.4208 \end{bmatrix},$$

则系统极点为$(-2.2441, -0.9186)$, 相应稳态误差系数为$c_{2\mathrm{l}} = 0.4851 < c_2$. 于是$K_{\mathrm{u}}$即为满足问题1的容偏估计策略.

5 结论(Conclusions)

本文对连续时间情形下的估计系统, 研究了一种容偏滤波器的设计问题. 首先, 对容偏滤波器的

理论及工程意义进行了分析. 其次, 将稳态误差系数上界约束指标纳入系统的约束指标集, 并采用矩阵不等式刻画稳态误差系数上界指标. 然后, 针对由多指标约束构成的双线性矩阵不等式组, 采用摄动法, 转换为一组线性矩阵不等式, 并采用迭代求解的方法, 给出了期望的容偏滤波增益阵. 所给出的估计策略可允许采用低阶次的估计系统跟踪具有相对较高阶次运动模态的目标, 并可同时保证估计结果的系统误差及随机误差满足期望的指标要求. 最后, 利用数值算例对本文所提出的求解算法进行了说明. 由于采用迭代算法近似求解双线性矩阵不等式, 因此本文的结论仅仅是求解容偏滤波器的充分条件, 算法具有一定的保守性; 另外, 为更有效地抑制估计系统模型中的不确定因素所导致的系统偏差, 对估计系统的动态特性仍需考虑, 上述问题将在以后的工作中加以分析.

参考文献(References):

[1] BAR-SHALOM Y, LI X R. *Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software*[M]. MA, Boston: Artech House, 1993.

[2] ZHANG H C, BASIN M, SKLIAR M. Optimal state estimation for continuous stochastic state-space system with hybrid measurements[J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2006, 2(2): 356 – 370.

[3] BASIN M, PEREZ J, MARTINEZ-ZUNIGA R. Optimal filter for nolinear polynomial systems over linear observations with delay[J]. *International Journal of Innovative Computing*, 2006, 2(4): 863 – 874.

[4] MASSY W F. Principle components regression in exploratory statistics research[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1965, 60(2): 234 – 266.

[5] BYRTEK M, O'SULLIVAN F, MUZI M, et al. An adaptation of ridge regression for improved estimation of kinetic model parameters from PET studies[J]. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2005, 52(1): 63 – 68.

[6] VANDEN B K, HUBERT M. Robustness properties of a robust partial least squares regression method[J]. *Analytica Chimica Acta*, 2004, 515(1): 229 – 241.

[7] SCHERZINGER B M, DAVISON E J. Generalized error coefficients for the multivariable servomechanism problem[C] //*Proceedings of 20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*. USA: IEEE, 1981, 20: 1459 – 1465.

[8] HAU F J. Linear systems and nonunity feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, 18(3): 319 – 321.

[9] 臧文利, 郭治. 随机穿越特征指标下的满意激光回波问题[C] //第24届中国控制会议论文集. 沈阳: 东北大学出版社, 2005: 892 – 894.
(ZANG Wenli, GUO Zhi. The consistency analysis of PID regulator with input disturbance[C] //*Proceedings of the 24th Chinese Control Conference*. Shenyang, CHINA: Sount China University of Technology Press, 2005: 892 – 894.)

[10] 钱龙军, 佘炎, 郭治. 跟踪系统的满意控制研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 591 – 594.
(QIAN Longjun, SHE Yan, GUO Zhi. On satisfactory control for tracking systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(4): 591 – 594.)

[11] 王远钢, 夏璇. 离散控制系统中圆形极点与方差上界约束的相容性[J]. 南昌航空工业学院学报, 1999, 13(4): 13 – 16.
(WANG Yuangang, XIA Xuan. Consistency of circular pole and upper stat-variance constraints for discrete-time control systems[J]. *Journal of Nanchang Institute of Aeronautical Technology*, 1999, 13(4): 13 – 16.)

[12] HASSIBI A, HOW J, BOYD S. A path-following method for solving BMI problems in control[C] //*Proceedings of the American Control Conference*. USA: IEEE, 1999: 1385 – 1389.

[13] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM Series in Systems and Control, 1994.

[14] SHIMOMURA T, FUJII T. Multiobjective control design via successive over-bounding of quadratic terms[C] //*Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control Sydney*. USA: IEEE, 2000: 2763 – 2768.

作者简介:

戚国庆 (1977—), 男, 讲师, 博士, 主要研究领域为随机状态估计与多传感器数据融合等, E-mail: qiguoqing@mail.njust.edu.cn;

陈 黎 (1981—), 男, 博士研究生, 主要研究领域为机动目标跟踪与多传感器数据融合等, E-mail: hncschenli@126.com;

李银伢 (1976—), 男, 副教授, 博士, 主要研究领域为过程控制、PID控制、数字图像处理等, E-mail: liyinya@mail.njust.edu.cn;

盛安冬 (1964—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要研究领域为多源信息融合理论及应用、机动目标跟踪、非线性估计理论及应用、现代火控理论及应用, E-mail: shengandong@ mail.njust.edu.cn.