

文章编号: 1000-8152(2010)02-0221-05

## 不确定时滞网络控制系统的状态反馈控制

周映江, 李训铭, 梁 华

(河海大学 电气工程学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 在网络传输过程中, 系统的稳定性受不确定, 网络延迟, 丢包和错序所影响. 本文针对这些非理想网络状况, 研究了网络控制系统状态反馈控制. 建立连续时间系统模型时, 还引入了一个定常状态时延, 使得模型更贴近实际. 随后, 运用改进的Lyapunov-Krasovskii函数, 推导出网络控制系统鲁棒稳定的充分条件, 并基于该充分条件得到利用线性矩阵不等式(LMI)的控制器设计方法, 再运用迭代算法求解相关系数. 最后通过MATLAB数值仿真算例, 证明了本文方法的正确性和有效性.

**关键词:** 网络控制系统; 不确定; 延迟; 丢包

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## State feedback control for networked control system with time-delay and uncertainties

ZHOU Ying-jiang, LI Xun-ming, LIANG Hua

(College of Electrical Engineering, Hohai University, Nanjing Jiangsu 210098, China)

**Abstract:** In the process of signal transmission in network, the stability of the system is affected by uncertainties, time-delay, data packet dropout, and sequence errors. This paper is concerned with the state feedback control of networked control systems(NCS) under these nonideal network conditions. To closely model the real system, a constant time-delay is introduced in the continuous-time system model. A sufficient condition of robust stability for NCS is derived by using an improved Lyapunov-Krasovskii functional. Based on this condition a controller design method is proposed by using linear matrix inequalities(LMI). The corresponding coefficients are obtained from the LMI by using an iterative algorithm. Simulation results of an example with MATLAB show the effectiveness and advantages of the proposed method.

**Key words:** networked control systems; uncertain; time delay; data packet dropout

### 1 引言(Introduction)

通过网络在被控对象, 传感器, 控制器和驱动器之间形成的反馈控制系统称为网络控制系统NCS(networked control systems). 目前的网络控制系统结构可以用图1描述. 相比于传统的控制系统, 网络控制系统具有更高的效率, 可靠性和灵活性. 它便于安装和维护, 而且由于连接线数的大大减少使系统成本得以下降. 但是由于带宽有限, 数据量的增加, 不可避免的产生了延迟, 丢包等现象. 这些非理想状况使得系统性能变差, 甚至导致系统不稳定. 因此, 对于网络控制系统的分析和设计已逐渐成为国际控制领域研究的热点<sup>[1~4]</sup>.

在对网络控制系统的分析和设计中, 针对时延的研究是最主要的, 近些年来, 这方面已有相当多的研究成果, 文献[2]研究了不同时延模型下LQG最优控

制的求解问题; 文献[3]针对连续被控对象, 研究了使得系统稳定的最大允许传输时间间隔(MATI). 文献[4]针对网络时延和丢包, 给出了一个分析系统鲁棒性的方法. 文献[5]给出了设计 $H_\infty$ 控制器的方法; 文献[6]综合考虑了网络传输中存在的时延、丢包等非理想情况, 研究了系统的鲁棒性, 并给出了控制器的设计方法; 文献[7]相比与前几篇是在一个原理上用更一般的方法去考虑, 减少了变量个数.

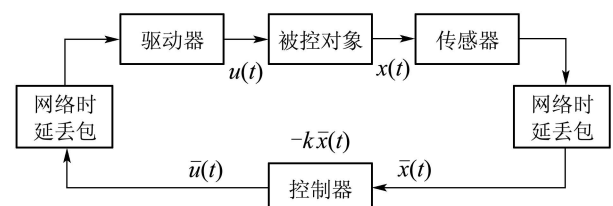


图 1 网络控制系统结构  
Fig. 1 The structure of the NCS

本文考虑了一个更一般的系统模型,综合考虑了网络传输过程中的网络延迟,不确定丢包和错序等非理想网络状况的影响.引入  $\int_{t-d}^t \dot{x}^T(v)S_2 \dot{x}(v)dv$  项,得出一个改进的Lyapunov-Krasovskii函数,并把最大允许时延和定常状态时延分开考虑,使其更能体现实际网络控制系统特性,保守性得到一定的改善.最后,通过算例验证了本文方法的正确性和有效性.

## 2 问题描述(Problem description)

考虑下面这个不确定线性时滞控制系统:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{A}_1x(t-d) + \bar{B}u(t) + \bar{B}_1w(t). \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  是状态向量,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  是控制输入,  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  是外部扰动且  $w(t) \in L_2(t_0, \infty)$ ,  $\bar{A} = A + \Delta A$ ,  $\bar{A}_1 = A_1 + \Delta A_1$ ,  $\bar{B} = B + \Delta B$ ,  $\bar{B}_1 = B_1 + \Delta B_1$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\Delta B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\Delta B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$  是常数矩阵,  $d$  为定常状态时延.  $\Delta A, \Delta A_1, \Delta B, \Delta B_1$  为具有时变特性的不确定参数矩阵,表示系统的不确定性,假定其范数有界且满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_1 & \Delta B & \Delta B_1 \end{bmatrix} = WF(t) \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

这里:  $F(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$  是一个具有Legesgue可测元的未知矩阵函数,且满足  $F^T(t)F(t) \leq I$ ;  $W, E_1, E_2, E_3, E_4$  是已知的具有适当维数的常数矩阵,它们反映了系统不确定性的结构.

为了讨论的方便,先给出如下4个假设:

**假设 1** 传感器是时钟驱动,控制器和执行器是事件驱动且仅考虑数据单包传送情况.

**假设 2** 在第一个信号到达被控对象前,控制输入  $u(t)$  为0,且式(1)中  $u(t)$  通过零阶保持器实现.

**假设 3** 本文考虑的是无记忆的静态状态反馈控制器.因此,从传感器到控制器的网络时延  $\tau_p^{sc} \in [0, \tau_{i_k}^{sc}]$  与从控制器到执行器的网络时延  $\tau_p^{ca} \in [0, \tau_{i_k}^{ca}]$  可直接加起来考虑,则控制回路总时延  $\tau_p = \tau_p^{sc} + \tau_p^{ca} \in [0, \tau_{i_k}]$ ,  $\tau_{i_k} = \tau_{i_k}^{sc} + \tau_{i_k}^{ca}$ .同理,也可把从传感器到控制器的连续丢包个数  $p^{sc} \in [0, i_k^{sc}]$  与从控制器到执行器的连续丢包个数  $p^{ca} \in [0, i_k^{ca}]$  直接合并起来考虑,则控制回路总丢包数  $p = p^{sc} + p^{ca} \in [0, i_k]$ ,  $i_k = i_k^{sc} + i_k^{ca}$ ,  $i_k$  是自然数.

**假设 4** 控制器和驱动器能够主动丢包,既当到达的是新数据包时,接收,  $k$  递增1;当到达的是旧数据包时,不接受,保持原样,  $k$  不变.

在上面4个假设下,闭环系统采用状态反馈控制

器,系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{A}_1x(t-d) + \bar{B}u(t) + \bar{B}_1w(t), \\ t &\in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}); \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(t^+) = Kx(t - \tau_{i_k}), \quad t \in [i_k h + \tau_{i_k}, k = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

其中:  $h$  为采样周期,  $u(t^+) = \lim_{t \rightarrow t^+} u(t)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

显然  $\bigcup_{k=1}^{\infty} [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}] = [t_0, \infty)$ ,  $t_0 \geq 0$ , 可知系统的解是连续的.

根据前面的分析,可知:  $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}})$ , 当  $i_k > i_{k+1}$  时,表示传输过程中有错序现象,后采样的信息可能经不同路由先到达控制器.当  $|i_{k+1} - i_k| > 1$  时,表示发生了丢包现象,丢包个数为  $(|i_{k+1} - i_k| > 1)$ .

网络控制系统的最大允许综合界  $\eta$  满足  $\eta \geq (i_{k+1} - i_k)h + \tau_{i_{k+1}}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

此时,闭环系统(3)(4)可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{A}_1x(t-d) + \bar{B}Kx(i_k h) + \bar{B}_1w(t), \\ t &\in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$x(t) = \phi(t) = x(t_0 - \eta) e^{A(t-t_0+\eta)}, \quad t \in [t_0 - \eta, t_0]. \quad (6)$$

**定义 1** 针对系统(5)(6),在  $w(t) \equiv 0$  时,如果存在Lyapunov-Krasovskii泛函  $V(t)$  满足  $V(t) > 0$ ,  $\dot{V}(t) < 0$ , 则称系统(5)(6)是鲁棒渐近稳定的.

## 3 主要结果(Main results)

下面首先给出一些引理和用到的公式,再建立网络控制系统(5)(6)的稳定条件,然后利用这些条件给出网络控制系统(5)(6)的状态反馈控制器设计方法.

**引理 1**<sup>[8]</sup>(Schur补性质) 对给定的对称矩阵  $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ , 其中  $S_{11}$  是  $r \times r$  维的. 以下3个条件是等价的:

- i)  $S < 0$ ;
- ii)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- iii)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

**引理 2**<sup>[4]</sup>(Newton-Leibniz公式)

$$x(t) - x(i_k h) - \int_{i_k h}^t \dot{x}(v) dv = 0. \quad (7)$$

**引理 3**<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} \int_a^b [\varepsilon^T(t)N + \dot{x}^T(v)L] L^{-1} [N^T \varepsilon(t) + L \dot{x}(v)] dv = \\ (b-a) \varepsilon^T(t) N L^{-1} N^T \varepsilon(t) + 2 \varepsilon^T(t) N \int_a^b \dot{x}(v) dv + \\ \int_a^b \dot{x}^T(v) L \dot{x}(v) dv. \end{aligned} \quad (8)$$

且当  $L > 0$  时, 上式  $> 0$ .

**引理 4**<sup>[9]</sup> 假设  $D, E$  和  $F$  为适当维数的实矩阵, 且  $F^T(t)F(t) \leq I$ , 则对任意向量  $\varepsilon > 0$ , 下述不等式成立:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E. \quad (9)$$

**定理 1** 给定  $\gamma > 0, \eta > 0, d > 0$  和控制器  $K$ , 若存在适当维数的矩阵  $P = P^T > 0, R_1 > 0, R_2 > 0, S_1 > 0, S_2 > 0, M_i, T_i$  和  $H_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 使如下矩阵不等式成立, 则闭环系统(5)(6)是鲁棒渐近稳定的:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} < 0. \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \begin{pmatrix} \varphi & * \\ B_1^T H^T & -\gamma^2 I \end{pmatrix}, \\ \Phi_{21} &= [L_1^T \quad L_2^T \quad L_3^T]^T, \\ \Phi_{22} &= \text{diag}\{-\eta S_1 \quad -d S_2 \quad -\xi I\}, \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_2^T + \varphi_3 + \varphi_3^T, \\ \varphi_1 &= \varphi_{11} + \varphi_{12}, \\ \varphi_{11} &= \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & 0 & 0 & P \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_1 & 0 \\ P & 0 & 0 & \eta S_1 + d S_2 \end{bmatrix}, \\ \varphi_{12} &= \begin{bmatrix} \varepsilon H_1 W W^T H_1^T & \varepsilon H_1 W W^T H_2^T \\ \varepsilon H_2 W W^T H_1^T & \varepsilon H_2 W W^T H_2^T \\ \varepsilon H_3 W W^T H_1^T & \varepsilon H_3 W W^T H_2^T \\ \varepsilon H_4 W W^T H_1^T & \varepsilon H_4 W W^T H_2^T \\ \varepsilon H_1 W W^T H_3^T & \varepsilon H_1 W W^T H_4^T \\ \varepsilon H_2 W W^T H_3^T & \varepsilon H_2 W W^T H_4^T \\ \varepsilon H_3 W W^T H_3^T & \varepsilon H_3 W W^T H_4^T \\ \varepsilon H_4 W W^T H_3^T & \varepsilon H_4 W W^T H_4^T \end{bmatrix}, \\ \varphi_2 &= [M + T \quad -T \quad -M \quad 0], \\ \varphi_3 &= [HA \quad HA_1 \quad HBK \quad -H], \\ L_1 &= [\eta M^T \quad 0], \quad L_2 = [dT^T \quad 0], \\ L_3 &= [E_1 \quad E_2 \quad E_3 K \quad 0 \quad E_4], \\ M &= \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**注 1** \*表示由矩阵的对称性得到的矩阵块.

**证** 构造如下的Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t). \quad (11)$$

这里:

$$V_1(t) = x^T(t)Px(t), \quad (12)$$

$$V_2(t) = \int_{i_k h}^t x^T(v)R_1 x(v)dv, \quad (13)$$

$$V_3(t) = \int_{-\eta}^0 \int_{t+v}^t \dot{x}^T(\theta)S_1 \dot{x}(\theta)d\theta dv, \quad (14)$$

$$V_4(t) = \int_{t-d}^t x^T(v)R_2 x(v)dv, \quad (15)$$

$$V_5(t) = \int_{-d}^0 \int_{t+v}^t \dot{x}^T(\theta)S_2 \dot{x}(\theta)d\theta dv. \quad (16)$$

其中:  $P = P^T > 0, R_1 > 0, R_2 > 0, S_1 > 0, S_2 > 0$ .

对  $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}})$ , 分别求  $V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t), V_5(t)$  关于时间  $t$  的导数, 得到

$$\dot{V}_1(t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t), \quad (17)$$

$$\dot{V}_2(t) = x^T(t)R_1 x(t) - x^T(i_k h)R_1 x(i_k h), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \eta \dot{x}^T(t)S_1 \dot{x}(t) - \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(v)S_1 \dot{x}(v)dv \leq \\ &\eta \dot{x}^T(t)S_1 \dot{x}(t) - \int_{i_k h}^t \dot{x}^T(v)S_1 \dot{x}(v)dv, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\dot{V}_4(t) = x^T(t)R_2 x(t) - x^T(t-d)R_2 x(t-d), \quad (20)$$

$$\dot{V}_5(t) = d \dot{x}^T(t)S_2 \dot{x}(t) - \int_{t-d}^t \dot{x}^T(v)S_2 \dot{x}(v)dv. \quad (21)$$

灵活运用引理2, 引理3及原模型表达式:

$$2\varepsilon^T(t)M[x(t) - x(i_k h) - \int_{i_k h}^t \dot{x}(v)dv] = 0, \quad (22)$$

$$2\varepsilon^T(t)T[x(t) - x(t-d) - \int_{t-d}^t \dot{x}(v)dv] = 0, \quad (23)$$

$$2\varepsilon^T(t)H[\bar{A}x(t) + \bar{A}_1 x(t-d) + \bar{B}u(t) + \bar{B}_1 w(t) - \dot{x}(t)] = 0. \quad (24)$$

这里:

$$\begin{aligned} \varepsilon^T(t) &= [x^T(t) \quad x^T(t-d) \quad x^T(i_k h) \quad \dot{x}^T(t)], \\ t &\in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}), \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix}.$$

且  $M_i, T_i$  和  $H_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为适当维数的矩阵.

当  $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}})$  时,

$$\begin{aligned} & - \int_{t-\eta}^t \dot{x}^T(v)S_1 \dot{x}(v)dv \leq \\ & - \int_{i_k h}^t \dot{x}^T(v)S_1 \dot{x}(v)dv. \quad (25) \end{aligned}$$

结合式(17)~(25), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T [\Phi_{11} + \Omega] \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \gamma^2 w^T(t) w(t) - \\ & \int_{i_k h}^t [\varepsilon^T(t) M + \dot{x}^T(v) S_1] S_1^{-1} [M^T \varepsilon(t) + \\ & S_1 \dot{x}(v)] dv - \int_{t-d}^t [\varepsilon^T(t) T + \\ & \dot{x}^T(v) S_2] S_2^{-1} [T^T \varepsilon(t) + S_2 \dot{x}(v)] dv. \end{aligned} \quad (26)$$

这里  $\Omega = \begin{pmatrix} \eta M S_1^{-1} M^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d T S_2^{-1} T^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
由于  $S_1 > 0, S_2 > 0$ , 根据引理3, 知式(26)的后4项之和小于0.

所以当  $w(t) \equiv 0$ , 结合引理1, 由式(10)及式(26), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T [\Phi_{11} + \Omega] \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - \int_{i_k h}^t [\varepsilon^T(t) M + \\ & \dot{x}^T(v) S_1] S_1^{-1} [M^T \varepsilon(t) + S_1 \dot{x}(v)] dv - \\ & \int_{t-d}^t [\varepsilon^T(t) T + \dot{x}^T(v) S_2] S_2^{-1} [T^T \varepsilon(t) + \\ & S_2 \dot{x}(v)] dv < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

根据定义1, 可知定理1结论成立.

证毕.

定理1给出了系统(5)(6)是鲁棒渐近稳定的一个充分条件.

由于矩阵不等式(10)不是线性矩阵不等式, 无法据此使用LMI工具箱来帮助解决问题. 下面的工作就是把不等式(10)经过适当变形, 变成含有可变参数的线性矩阵不等式, 最后通过一个算法, 运用LMI工具箱, 使问题得以解决.

**定理2** 给定  $\gamma > 0, \eta > 0, d > 0, \rho_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, 3, 4)$ , 其中  $\rho_4 > 0, \rho_1 = 1$ . 若存在标量  $\varepsilon > 0$ , 有适当维数的矩阵  $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0, \tilde{R}_1 > 0, \tilde{R}_2 > 0, \tilde{S}_1 > 0, \tilde{S}_2 > 0, \tilde{M}_i, T_i (i = 1, 2, 3, 4), Y$  和非奇异矩阵  $X$ , 使如下线性矩阵不等式(LMI)成立, 则闭环系统(5)(6)具有状态反馈增益  $K = Y X^{-T}$  且是鲁棒渐近稳定的.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & * \\ \tilde{\Phi}_{21} & \tilde{\Phi}_{22} \end{pmatrix} < 0. \quad (28)$$

其中:

$$\tilde{\Phi}_{11} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} & * \\ \rho_i B_1^T & -\gamma^2 I \end{pmatrix}, \tilde{\Phi}_{21} = [\tilde{L}_1^T \quad \tilde{L}_2^T \quad \tilde{L}_3^T]^T,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{22} &= \text{diag}\{-\eta \tilde{S}_1 \quad -d \tilde{S}_2 \quad -\xi I\}, \\ \tilde{\varphi} &= \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2^T + \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_3^T, \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\varphi}_{12}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 & 0 & 0 & \tilde{P} \\ 0 & -\tilde{R}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{R}_1 & 0 \\ \tilde{P} & 0 & 0 & \eta \tilde{S}_1 + d \tilde{S}_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}_{12} = \begin{bmatrix} \varepsilon \rho_1 W W^T & \varepsilon \rho_1 \rho_2 W W^T \\ \varepsilon \rho_2 W W^T & \varepsilon \rho_2 \rho_2 W W^T \\ \varepsilon \rho_3 W W^T & \varepsilon \rho_3 \rho_2 W W^T \\ \varepsilon \rho_4 W W^T & \varepsilon \rho_4 \rho_2 W W^T \\ \varepsilon \rho_1 \rho_3 W W^T & \varepsilon \rho_1 \rho_4 W W^T \\ \varepsilon \rho_2 \rho_3 W W^T & \varepsilon \rho_2 \rho_4 W W^T \\ \varepsilon \rho_3 \rho_3 W W^T & \varepsilon \rho_3 \rho_4 W W^T \\ \varepsilon \rho_4 \rho_3 W W^T & \varepsilon \rho_4 \rho_4 W W^T \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2 &= [\tilde{M} + \tilde{T} \quad -\tilde{T} \quad -\tilde{M} \quad 0], \\ \tilde{\varphi}_3 &= [\rho_i A X^T \quad \rho_i A_1 X^T \quad \rho_i B Y \quad -\rho_i X^T], \\ \tilde{L}_1 &= [\eta \tilde{M}^T \quad 0], \tilde{L}_2 = [d \tilde{T}^T \quad 0], \\ \tilde{L}_3 &= [E_1 X^T \quad E_2 X^T \quad E_3 Y \quad 0 \quad E_4]. \end{aligned}$$

证 定义  $H_1 = \rho_1 H_0 = H_0 (\rho_1 = 1), H_2 = \rho_2 H_0, H_3 = \rho_3 H_0, H_4 = \rho_4 H_0$ , 这里  $\rho_4 > 0, \rho_1 = 1$ . 由不等式(10)知  $H_0$  是非奇异的, 故可定义  $X = H_0^{-1}$ . 用  $\text{diag}\{X, X, X, X, I, X, X, I\}$  和它的转置矩阵分别左乘右乘式(10)两边. 定义

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= X P X^T, \tilde{R}_1 = X R_1 X^T, \tilde{R}_2 = X R_2 X^T, \\ \tilde{S}_1 &= X S_1 X^T, \tilde{S}_2 = X S_2 X^T, \tilde{M}_i = X M_i X^T, \\ \tilde{T}_i &= X T_i X^T (i = 1, 2, 3, 4), Y = K X^T, \end{aligned}$$

最终, 可得线性矩阵不等式(28). 并且由  $Y = K X^T$ , 得  $K = Y X^{-T}$ . 根据以上证明, 可知定理2结论成立. 证毕.

但是定理2的求解与  $\rho_i$  相关, 可以采用下面的算法来实现:

#### 算法<sup>[10]</sup>

1) 给定初始的  $\rho_i (i = 2, 3, 4), \rho_i$  的上界,  $\rho_i$  的一个小增量  $\varepsilon$  和  $\eta$  的一个小增量  $u$ , 并且假定  $K(0) = 0, \eta(0) = 0$ .

2) 当  $\rho_i$  在允许范围内时, 依据不等式(28), 利用循环语句,  $\lambda_i = \lambda_i + \varepsilon, \eta(0) = \eta(0) + u$ , 求取  $\eta_{\max}$ , 同时求出  $K = K(\lambda_i)$ .

3) 当  $\rho_i$  大于上界, 循环终止.

4) 输出  $\eta_{\max}$  和  $K$ .

## 4 实例仿真(Numerical example)

根据本文的要求, 并且为了能够与先前的文章进

行比较, 考虑如下被控对象:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.1 \sin t & 1 \\ 0 & -0.1 + 0.1 \sin t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.1 + 0.5 \sin t & 0.4 \sin t \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t-d) + \begin{bmatrix} 0.1 \sin t \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.1 + 0.1 \sin t \\ 0.1 + 0.1 \sin t \end{bmatrix} w(t).$$

由上面的表达式可以得到

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ E_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin t \end{bmatrix}.$$

运用定理2和算法, 通过循环算法, 选取 $\rho_2 = 4.72$ ,  $\rho_3 = -0.07$ ,  $\rho_4 = 3.98$ 及 $\gamma = 1$ . 当给定一个 $d$ 时, 都可以求得相应的 $\eta = \eta_{\max}$ . 具体的如表1所示.

通过仿真知道, 在本算例中 $d$ 最大能取到0.87,  $\eta$ 最大能取到0.64. 而当 $d = 0.6$ ,  $\eta = 0.35$ 或 $d = 0.7$ ,  $\eta = 0.25$ 时,  $d + \eta$ 最大能取到0.95, 此时 $K$ 分别为 $K = [-4.5014 \quad -6.6576]$ 或者 $K = [-4.3012 \quad -7.2853]$ . 通过比较, 笔者发现采用本文方法可以减小保守性.

表1  $d$ 和 $\eta$ 关系表

Table 1 The relationship between  $d$  and  $\eta$

$d$	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.870
$\eta$	0.640	0.620	0.580	0.520	0.440	0.350	0.250	0.120	0.007
$d + \eta$	0.740	0.820	0.880	0.920	0.940	0.950	0.950	0.920	0.877

## 5 结论(Conclusion)

本文针对含有网络延迟, 扰动, 不确定性的更一般的连续系统模型, 给出一个改进的Lyapunov-Krasovskii泛函方程, 研究了一类网络控制系统状态反馈控制器设计方法. 本文的一个突出优点是把最大允许综合界和状态时延分开考虑, 使得后面运用线性矩阵不等式(LMI)得到的结果保守性更小. 最后通过MATLAB数值仿真算例, 证明了本文方法的正确性和有效性. 下一步的工作应着手放在 $\rho_i$ 的最佳选取上, 当然多包传输也是一个值得深入的方面.

## 参考文献(References):

- [1] ZHANG W, BRANIKY M S, PHILLIPS M S. Stability of networked control systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1): 84 - 99.
- [2] NILSSON J, BEMHARDSSON B, WITTENMARK B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays[J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 57 - 64.
- [3] WALSH G C, YE H, BUSHNELL L G. Stability analysis of networked control systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(3): 438 - 446.
- [4] YUE D, HAN Q L, PENG C. State feedback controller design of networked control systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2004, 51(11): 640 - 644.
- [5] YUE D, HAN Q L, LAM J. Network-based robust  $H_\infty$  control of systems with uncertainty[J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 999 - 1007.
- [6] 彭晨, 岳东. 网络环境下不确定时滞系统鲁棒 $H_\infty$ 控制[J]. *自动化学报*, 2007, 33(10): 1093 - 1096.
- (PENG Chen, YUE Dong. Network-based robust  $H_\infty$  control of systems with state-delay and uncertainty[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(10): 1093 - 1096.)
- [7] 郭亚锋, 李少远. 网络控制系统的 $H_\infty$ 状态反馈控制器设计[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(3): 414 - 420.
- (GUO Yafeng, LI Shaoyuan.  $H_\infty$  state-feedback controller design for networked control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 414 - 420.)
- [8] 岳东, 彭晨, 韩清龙. 网络控制系统的分析与综合[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- (YUE Dong, PENG Chen, HAN Qinglong. *Analysis and Synthesis of Networked Control System*[M]. Beijing: Press of Science, 2006.)
- [9] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- (YU Li. *Robust Control-LMI Approach*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [10] GHAOUI L E, OUSTRY F, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 - 1176.

## 作者简介:

周映江 (1984—), 男, 研究方向为网络控制系统、鲁棒控制, E-mail: zhou.4714@163.com;

李训铭 (1949—), 男, 教授, 主要研究方向为微机测控自动化系统、公路收费自动化管理系统、优化与最优控制, E-mail: daisuixin520@sina.com;

梁华 (1978—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为模式识别、优化与最优控制, E-mail: yifan3971@163.com.