

# 面向后件集的模糊推理机制: 用于区间型type-2模糊逻辑系统

岳菊梅<sup>†</sup>, 陈秋双, 陈增强

(南开大学 信息技术科学学院, 天津 300071)

**摘要:**目前, 大多数模糊推理都是利用 $t$ -范数和 $t$ -余范数或其改进形式对连接词进行建模, 这些模型不能将模糊规则中前件集与后件集之间的相关性信息引入到模糊推理过程, 这会丢失蕴含在规则中的一些信息甚至导致推理结果与实际经验严重不符. 为解决此问题, 本文首先引入模糊集合面向对象变换的概念, 并将其推广, 建立了合成type-2模糊集合模型. 基于此模型, 针对区间型type-2模糊逻辑系统, 提出一种面向后件集的模糊推理机制, 该机制能将前件集与后件集的相关性信息(包括清晰数和模糊数两种情形)引入到模糊推理过程. 仿真结果表明, 该方法能捕获到模糊规则中更多的不确定性信息, 并为模糊逻辑系统的设计提供更大的自由度.

**关键词:** 区间型type-2模糊逻辑系统; 模糊推理; 模糊连接词; 模糊化算子

中图分类号: TP181 文献标识码: A

## Consequent-oriented fuzzy inference: for interval type-2 fuzzy logic systems

YUE Ju-mei<sup>†</sup>, CHEN Qiu-shuang, CHEN Zeng-qiang

(College of Information Technical Sciences, Nankai University, Tianjin 300071, China)

**Abstract:** Most fuzzy inference methods usually use some kind of  $t$ -norm and  $t$ -conorm, or their improved forms, to model the connectives. Unfortunately, those models are unable to bring the relationship between antecedents and consequents into the process of fuzzy inference. This may lose some information implied in the rule and even leads to the inference results inconsistent with practical experiences. To solve this problem, the concept of object-oriented transform on fuzzy sets is introduced and extended to establish a compound type-2 fuzzy set model, by which a consequent-oriented fuzzy inference mechanism is developed. The mechanism can introduce the relationship between antecedents and consequents, including crisp numbers and fuzzy number, to the process of fuzzy inference. Simulation results indicate that the proposed method can capture more information about rule uncertainties, and provide more choices in designing a fuzzy logic system.

**Key words:** interval type-2 fuzzy logic systems; fuzzy reasoning; fuzzy connectives; fuzzify operator

### 1 引言(Introduction)

模糊逻辑系统能有效处理系统的不确定性和不精确性, 现已成为设计非线性系统的有力工具, 并在多种领域得到广泛应用<sup>[1-5]</sup>. 模糊逻辑系统通常由模糊化模块(fuzzifier)、规则库(rule base)、推理引擎(inference engine)和清晰化模块(defuzzifier)组成. 其中, 规则库是由IF-THEN规则集组成, 是模糊逻辑系统的核心, 其他组成部分均以一种合理有效的方式来执行这些规则. 所以, 规则中的不确定性在模糊逻辑系统的推理中起着关键作用. 规则的不确定性不仅存在于规则中的前件集和后件集, 而且也存在于连接词(connector words), 即AND/OR算子中. 其中, 前件集与后件集通常采用type-1(T1)模糊集合进行建模. 自从Zadeh提出type-2模糊集合概念以来, 对规则的前件

集和后件集在理论研究上也采用了2-型模糊集合进行建模, 包括区间型type-2(IT2)模糊集合和一般型type-2(T2)模糊集合. 所以, 前件集与后件集本身的模糊性得到了充分体现<sup>[6]</sup>.

Türksen和Yao指出, 对模糊规则的连接词及其不确定性进行建模对设计一个模糊逻辑系统而言至关重要<sup>[7-10]</sup>. 目前, AND算子的建模通常是利用某种 $t$ -范数或其改进形式, 如在工业中得到广泛应用的取小和乘积 $t$ -范数. 然而, 取小 $t$ -范数往往使激活规则(fired rule)由某一个前件集决定. 换言之, 它忽略了其他前件集的信息. 虽然乘积 $t$ -范数考虑了所有前件集, 但推理结果不是由每个前件集根据其其与后件集的关系度(relationship degree)所共同决定, 即忽略了前件集与后件集的相关性信息. 这些丢失的信息在一些应

用中会导致模糊逻辑系统产生不合理的结果<sup>[11-12]</sup>.

这种概念间的相关性在模糊推理中也起着重要作用, 因为规则中不同的前件集对后件集可能有不同的影响程度. 如洗衣机洗衣服, 衣服上等量的泥沙和油脂对洗涤时间就有明显不同的影响. 又如, 设模糊集合  $A$  和  $I$  分别表示“高能力”和“好品德”两个模糊概念, 它们分别为论域  $U$  上的模糊集合.  $U = \{a, b\}$ ,  $a, b$  表示两个人. 如果  $A(a) = 0.9$ ,  $I(a) = 0.6$ ,  $A(b) = 0.6$ ,  $I(b) = 0.7$ , 现用“德才兼备”的标准在二者中选拔一人去担任一件具有“挑战性的工作”. 这里“德才兼备”用模糊集合  $A \cap I$  表示, “挑战性的工作”用模糊集合  $J$  表示. 采用扎德的取小  $t$ -范数进行模糊推理, 结果是  $(A \cap I)(a) = 0.9 \wedge 0.6 = 0.6$  和  $(A \cap I)(b) = 0.6 \wedge 0.7 = 0.6$ , 即两人具有同样的竞争力, 因此难于做出决策. 而事实上, 这项“挑战性的工作”可能对“好品德”和“高能力”有着不同的要求. 如“技术攻关”和“爱心大使”对“能力”和“品德”就有明显不同的要求. 由此可以看出, 在模糊集相互独立的环境下进行模糊推理会丢失模糊集之间的相关性信息.

Capitaine和Frélicot提出一种新的模糊连接词模型<sup>[13]</sup>, 这种模型是对通常模糊连接词的一般化, 可以用于评估无约束模糊集(unconstrained fuzzy sets)中值的大小程度. 也有其他学者对AND/OR算子及其不确定性提出一些建模方法, 如参数化  $t$ -范数和  $t$ -余范数(parametric  $t$ -norms and  $t$ -conorms), 补偿 AND 算子(compensatory AND), 以及S-OWA算子等<sup>[14-16]</sup>. 这些建模方法均未考虑规则中前件集与后件集的相关性信息. 事实上, 基于  $t$ -范数或其改进形式的建模方法均不能将这种相关性引入到模糊推理过程.

本文的目的是对区间型type-2模糊逻辑系统的AND连接词进行建模, 并提出与之对应的面向后件集的模糊推理方法(consequent-oriented fuzzy inference, COFI), 使得规则中前件集与后件集的相关性信息参与模糊推理. 首先提出模糊集合间关系度的概念, 并将其引入到AND算子的模型中. 基于此模型, 模糊规则中的所有前件集均是在一个模糊集合是相互关联的环境下参与模糊推理, 该推理方法即为面向后件集的模糊推理方法. 本文主要研究前件集与后件集的关系度分别是清晰数和模糊数两种情形, 即具有清晰关系度(crisp relationship degree, CRD)和模糊关系度(fuzzy relationship degree, FRD)的面向后件集的模糊推理方法(COFI with CRD和COFI with FRD).

## 2 具有清晰关系度的COFI(COFI with crisp relationship degree)

本节讨论简单的情况: 前件集与后件集的关系度可用一个清晰数表示. 为了将这种关系度引入到模糊推理过程, 首先需要对前件集进行一种变换, 即下文

提出的模糊集合的OO变换.

### 2.1 模糊集合的OO变换(Object-oriented transformation on fuzzy sets)

**定义 1** 设  $\tilde{A}$  是论域  $X$  上的一个区间型type-2模糊集合, 其FOU(footprint of uncertainty)由下、上隶属度函数  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  和  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  围成.  $\tilde{G}$  是论域  $Z$  上的一个区间型type-2模糊集, 称为目标集.  $\tilde{A}$  的OO变换是将  $\tilde{A}$  变换为区间型type-2模糊集合  $\tilde{A}_{\tilde{G}}$  的映射:  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}_{\tilde{G}}$ ,  $\tilde{A}_{\tilde{G}} \in \mathcal{F}_2(X)$ . 其中:

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_{\tilde{A}_{\tilde{G}}}(x) &= c_{\tilde{A}\tilde{G}} \cdot \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \\ \bar{\mu}_{\tilde{A}_{\tilde{G}}}(x) &= c_{\tilde{A}\tilde{G}} \cdot \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x),\end{aligned}\quad (1)$$

$c_{\tilde{A}\tilde{G}}$  是  $\tilde{A}$  与  $\tilde{G}$  的关系度, 通常由专家经验给出或从实际数据提取出的清晰数  $r$ ,  $r \in [0, 1]$ , 这里称其为变换因子.  $\mathcal{F}_2(X)$  为论域  $X$  的type-2幂集.  $\tilde{A}_{\tilde{G}}$  叫做  $\tilde{A}$  的OO变换集.

下面将OO变换的概念应用到引言中提到的选拔问题上. 假定“高能力” $A$ 与“挑战性工作” $J$ 的相关度是0.4, “好品德” $I$ 与“挑战性工作” $J$ 的相关度是0.7, 即  $c_{AJ} = 0.4$ ,  $c_{IJ} = 0.7$ . 从而有

$$A_J = \frac{0.36}{a} + \frac{0.24}{b}, \quad I_J = \frac{0.42}{a} + \frac{0.49}{b},$$

以及

$$(A_J \cap I_J)(a) = 0.36, \quad (A_J \cap I_J)(b) = 0.24.$$

所以, 对于这项“挑战性工作”,  $a$ 比 $b$ 更合适.

如果“高能力” $A$ 与“挑战性工作” $J$ 的相关度是0.7, 而“好品德” $I$ 与“挑战性工作” $J$ 的相关度是0.4, 此时有

$$(A_J \cap I_J)(a) = 0.24, \quad (A_J \cap I_J)(b) = 0.28.$$

从而 $b$ 比 $a$ 更合适. 由此可见, 模糊集合的OO变换能将模糊概念间的相关性信息引入到模糊推理过程.

**注 1** 1) 当定义1中的  $\tilde{A}$  与  $\tilde{G}$  均退化为type-1模糊集合  $A$  与  $G$  时, 即  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  时, OO变换的概念也相应退化为type-1模糊集合的OO变换, 即

$$\mu_{AG}(x) = c_{AG} \cdot \mu_A(x). \quad (2)$$

2) 尽管利用其他  $t$ -范数, 如LUK, PRODUCT或者其他代数  $t$ -范数(archimedean  $t$ -norms)也可选拔出  $a$  或  $b$  担任这项工作. 但这些模糊推理并没有考虑“挑战性的工作”对“能力”和“品德”的实际相关性, 因此并不能很好地反映客观实际. 对于模糊逻辑系统而言, 这种没有反映前件集与后件集关系度的推理可能会导致不合理的输出. 所以, 如果前件集在参与模糊推理之前, 先做一OO变换(后件集作为参考集), 然后再参与模糊推理, 即让前件集的OO变换集而不是前件集本身参与模糊推理, 那么前件集与后件集的相关性信息就会引入到模糊推理过程, 其推理结果无疑包含了规则中更多的不确定性信息.

**2.2 具有清晰关系度的COFI(COFI with crisp relationship degree)**

本文考虑的是具有 $p$ 个输入 $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_p \in X_p$ 、一个输出 $y \in Y$ 、 $M$ 条规则的区间型type-2模糊逻辑系统. 设第 $l$ 条规则为

$R^l$ : IF  $x_1$  is  $\tilde{F}_1^l$  and  $x_2$  is  $\tilde{F}_2^l \dots$  and  $x_p$  is  $\tilde{F}_p^l$ ,  
THEN  $y$  is  $\tilde{G}^l$ .

为了符号简洁,下文将 $\tilde{F}_i^l$ 表示为 $\tilde{F}_i, i = 1, 2, \dots, p$ . 并设前件集 $\tilde{F}_j$ 与后件集 $\tilde{G}$ 的关系度为 $i_{\tilde{F}_j \tilde{G}}$ .  $\tilde{F}_j$ 的OO变换集为 $\tilde{F}_{j\tilde{G}}$ (后件集 $\tilde{G}$ 作为参考集), 其中变换因子为

$$c_{\tilde{F}_j \tilde{G}} = i_{\tilde{F}_j \tilde{G}} / \sum_{j=1}^p i_{\tilde{F}_j \tilde{G}}. \tag{3}$$

**定义 2** 设 $\tilde{F}_1$ 和 $\tilde{F}_2$ 是区间型type-2模糊逻辑系统第 $l$ 条规则的前件集,  $\tilde{G}$ 是后件集.  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ 和 $\tilde{G}$ 的FOU分别由下列下、上隶属度函数对围成:  $\underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1), \underline{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2), \underline{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ . 当输入 $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2$ 时, 基于区间型type-2模糊逻辑系统的面向后件集的模糊推理按以下步骤进行:

**步骤 1** 计算激活区间(firing interval):  $f'(x) = [f(x'), \bar{f}(x')]$ .

$$f(x') = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1 \tilde{G}}(x'_1) + \underline{\mu}_{\tilde{F}_2 \tilde{G}}(x'_2), \tag{4}$$

$$\bar{f}(x') = \bar{\mu}_{\tilde{F}_1 \tilde{G}}(x'_1) + \bar{\mu}_{\tilde{F}_2 \tilde{G}}(x'_2). \tag{5}$$

**步骤 2** 下、上激活水平 $f(x')$ 和 $\bar{f}(x')$ 分别与后件集 $\tilde{G}$ 的下、上隶属度函数 $\underline{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ 进行 $t$ -范

数运算, 所产生的FOU定义为该规则的输出(rule output).

若规则有 $p$ 个前件集, 如“IF  $x_1$  is  $\tilde{F}_1$  and  $x_2$  is  $\tilde{F}_2$  and  $\dots$  and  $x_p$  is  $\tilde{F}_p$ , THEN  $y$  is  $\tilde{G}$ ”, 当输入 $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_p = x'_p$ 时, 激活区间由下式计算:

$$\underline{f}(x') = \sum_{i=1}^p \underline{\mu}_{\tilde{F}_i \tilde{G}}(x'_i), \tag{6}$$

$$\bar{f}(x') = \sum_{i=1}^p \bar{\mu}_{\tilde{F}_i \tilde{G}}(x'_i). \tag{7}$$

**2.3 COFI with CRD 的实施(Implementation of COFI with CRD)**

图1给出了区间型type-2模糊逻辑系统采用COFI with CRD时输入与前件集的运算过程. 其中, 规则具有 $p$ 个前件集 $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_p$ , 一个后件集 $\tilde{G}$ , 模糊化采用单点模糊化方法(singleton fuzzification).

当输入 $x_1 = x'_1$ 时, 位于 $x'_1$ 处的垂线与 $\tilde{F}_1$ 的FOU相交于区间 $[\underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x'_1)]$ , 与此类似, 当 $x_p = x'_p$ 时, 位于 $x'_p$ 处的垂线与 $\tilde{F}_p$ 的FOU相交于区间 $[\underline{\mu}_{\tilde{F}_p}(x'_p), \bar{\mu}_{\tilde{F}_p}(x'_p)]$ . 从而由式(4)和式(5)可求得下、上激活水平 $f(x')$ 和 $\bar{f}(x')$ . 图1显示, 输入与前件集的运算结果, 即激活区间 $f(x') = [f(x'), \bar{f}(x')]$ , 包含了各个前件集 $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_p$ 对后件集 $\tilde{G}$ 的关系度. 然后, 下、上激活水平 $f(x')$ 和 $\bar{f}(x')$ 分别与 $\tilde{G}$ 的下、上隶属度函数 $\underline{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ 取范数运算. 当 $\tilde{G}$ 的FOU是三角形区域且 $t$ -范数采用取小 $t$ -范数时, 所得的规则输出为图1中梯形部分所围成的FOU.

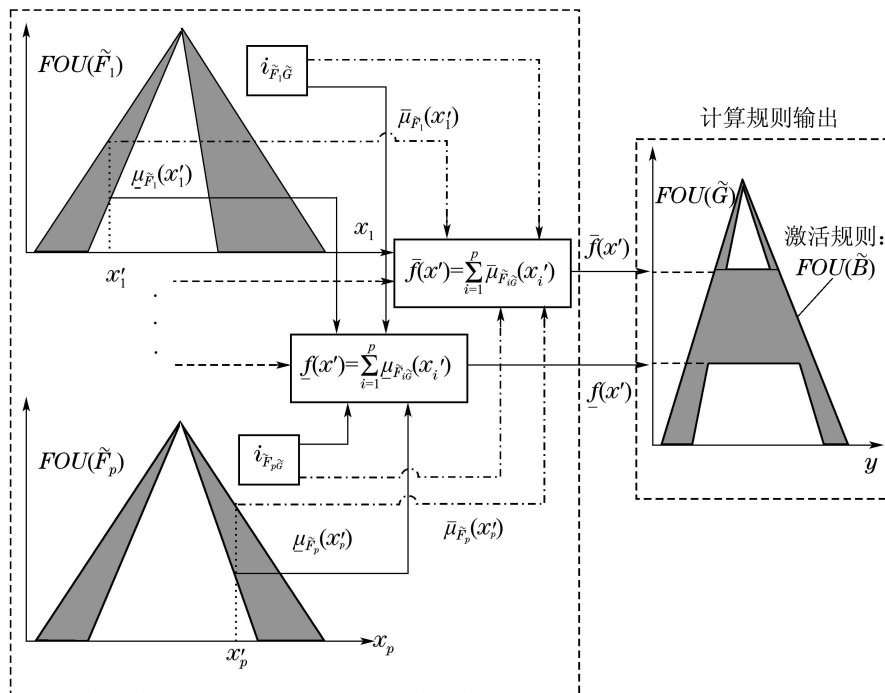


图 1 区间型T2模糊逻辑系统的COFI: 从激活区间到规则输出

Fig. 1 COFI for IT2 FLS: from firing level to rule output

**注 2** 从形式上看, COFI 的实施较复杂. 实际上, 从计算复杂性的角度来看, COFI 只是将前件集与后件集的关系度引入到推理过程. 而且, 此关系度通常由专家经验给出或者从实际操作数据提取出的清晰数, 因此 COFI 在模糊推理过程中只额外引入一步乘法运算, 所以, 与传统的推理方法相比, 计算复杂性不变.

**3 具有模糊关系度的 COFI (COFI with fuzzy relationship degree)**

在实际应用中, 有时不易或不宜给出明确的关系度, 一个自然的方法是利用 type-1 模糊集对关系度进行建模. 此时为了扩展 COFI 的功能, 即将这种模糊的关系度引入到模糊推理过程, 必须将 OO 变换的概念进行推广, 即下文提出的合成 type-2 模糊集的概念. 在此基础上, 将具有清晰关系度的 COFI 推广到具有模糊关系度的 COFI.

**3.1 合成 type-2 模糊集合 (Compound type-2 fuzzy set)**

**定义 3** 设  $A$  是论域  $X$  上的 type-1 模糊集, 其隶属度函数为  $\mu_A(x)$ . ( $X \subseteq [0, 1]$ ). 设  $\tilde{G}$  是论域  $Y$  上的区间型 type-2 模糊集, 其下、上隶属度函数分别为  $\underline{\mu}_{\tilde{G}}(y)$  和  $\bar{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ . 由  $A$  和  $\tilde{B}$  合成的 type-2 模糊集由以

下 3 步定义. 该步骤也称为  $A$  和  $\tilde{B}$  的合成运算.

**步骤 1** 令论域  $X$  中的点  $x_i$  分别与  $\underline{\mu}_{\tilde{G}}(y)$  和  $\bar{\mu}_{\tilde{G}}(y)$  取范数, 得到的 FOU 记为  $FOU_{x_i}$ , 如图 2(a) 中深色阴影部分所示. 为了易于理解, 将  $\mu_A(x)$  和  $\tilde{B}$  放在三维坐标系中, 如图 2(b) 示.

**步骤 2** 赋予  $FOU_{x_i}$  一个次隶属度  $\mu_A(x_i)$ , 从而得到一个 type-2 模糊集, 记为  $\tilde{B}_{x_i}$ , 即  $FOU_{x_i}$  内的每一点的次隶属度均等于  $\mu_A(x_i)$ .

**步骤 3** 将步骤 1 和 2 应用到论域  $X$  上的所有点, 对应于每一点, 均产生一个 type-2 模糊集, 从而  $\tilde{B}$  的 FOU 上某些点会具有多个次隶属度, 取最小者得到的 type-2 模糊集即为由  $A$  和  $\tilde{B}$  合成的 type-2 模糊集, 记为  $\tilde{C}_{A\tilde{B}}$ , 或简记为  $\tilde{C}$ . 如图 2(c) 所示.

设  $X_\alpha (X_\alpha = [\alpha_L, \alpha_R] \subseteq X)$  表示  $A$  中隶属度大于或等于  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  的元素组成的集合,  $\alpha$  称为不确定性水平. 令  $\alpha_L$  和  $\alpha_R$  分别与  $A$  和  $\tilde{B}$  合成的 type-2 模糊集  $\tilde{C}$  的下、上隶属度函数  $\underline{\mu}_{\tilde{C}}(y)$  和  $\bar{\mu}_{\tilde{C}}(y)$  取范数, 得到  $FOU_\alpha$ . 称由  $FOU_\alpha$  确定的区间型 type-2 模糊集为  $\tilde{C}$  的  $\alpha$ -主内嵌 (primary embedded) 区间型 type-2 模糊集, 记为  $\tilde{B}_A$ . 如图 2(c) 所示.

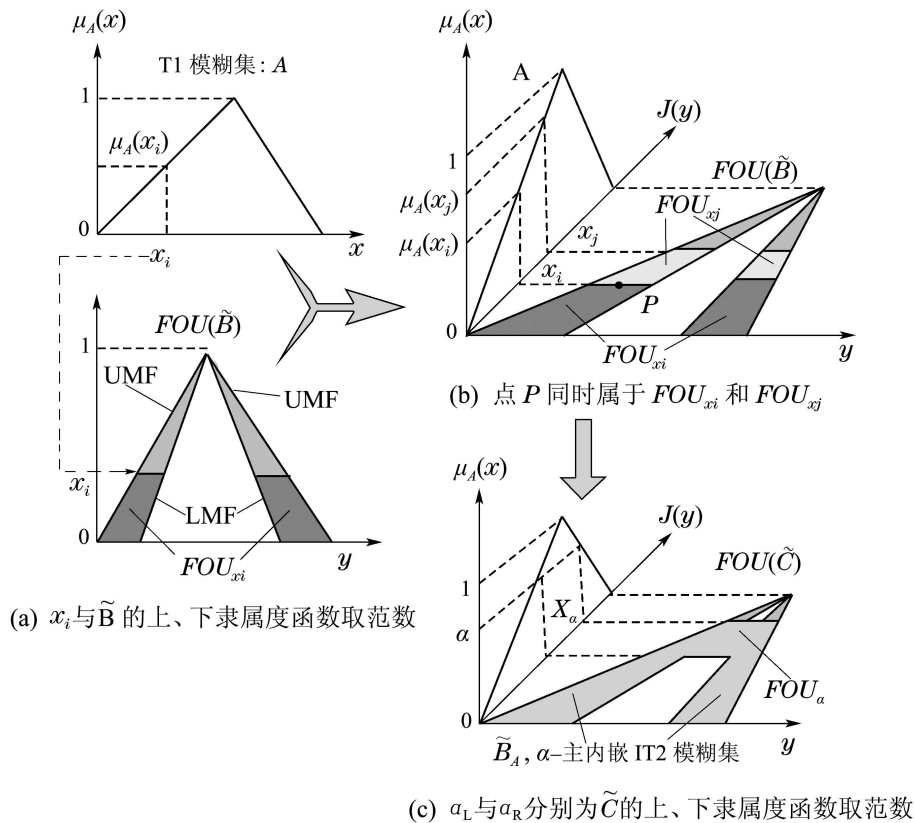


图 2 合成 type-2 模糊集合示意图  
Fig. 2 Diagram for compound type-2 fuzzy sets

$\alpha$ -主内嵌区间型type-2模糊集给含有合成Type-2模糊集的模糊逻辑系统提供了更大的设计自由度,因为设计者可以根据不同的应用选取不同的不确定性水平.

### 3.2 具有模糊关系度的COFI(COFI with fuzzy relationship degree)

在下面定义中用 $r_{\tilde{F}\tilde{G}}$ 表示区间型type-2模糊集 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{G}$ 的模糊关系度, $r_{\tilde{F}\tilde{G}}$ 为区间 $[0, 1]$ 上的模糊数.

**定义4** 设 $\tilde{F}_1$ 和 $\tilde{F}_2$ 是区间型type-2模糊逻辑系统第 $l$ 条规则的前件集, $\tilde{G}$ 是后件集. $\tilde{F}_1$ , $\tilde{F}_2$ 和 $\tilde{G}$ 的FOU分别由下列下、上隶属度函数对围成: $\underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1)$ , $\underline{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2)$ , $\underline{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ 和 $\bar{\mu}_{\tilde{G}}(y)$ .当输入 $x_1 = x'_1$ , $x_2 = x'_2$ 时,基于区间型type-2模糊逻辑系统的面向后件集的模糊推理按以下步骤进行:

**步骤1** 激活区间 $f(x') = [f(x'), \bar{f}(x')]$ 由以下激活模糊集 $F$ 代替:

$$F = \frac{\mu_{\tilde{F}_1}(x'_1) \cdot r_{\tilde{F}_1\tilde{G}} + \mu_{\tilde{F}_2}(x'_2) \cdot r_{\tilde{F}_2\tilde{G}}}{r_{\tilde{F}_1\tilde{G}} + r_{\tilde{F}_2\tilde{G}}}, \quad (8)$$

其中 $\mu_{\tilde{F}_1}(x'_1)$ 和 $\mu_{\tilde{F}_2}(x'_2)$ 均是区间值,即

$$\mu_{\tilde{F}_1}(x'_1) = [\underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x'_1)],$$

$$\mu_{\tilde{F}_2}(x'_2) = [\underline{\mu}_{\tilde{F}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{F}_2}(x'_2)].$$

**步骤2** 激活模糊集 $F$ 与后件集 $\tilde{G}$ 进行合成运算,得到合成type-2模糊集 $\tilde{C}_{F\tilde{G}}$ .

**步骤3** 取定不确定性水平 $\alpha$ , $\tilde{C}_{F\tilde{G}}$ 的 $\alpha$ -主内嵌区间型T2模糊集即为规则的输出集,也称 $\alpha$ -激活规则.

对于具有 $p$ 个输入的规则:“IF  $x_1$  is  $\tilde{F}_1$  and  $x_2$  is  $\tilde{F}_2$  and  $\dots$  and  $x_p$  is  $\tilde{F}_p$ , THEN  $y$  is  $\tilde{G}$ ”.当输入 $x_1 = x'_1$ , $x_2 = x'_2, \dots, x_p = x'_p$ 时,激活模糊集由下式计算:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i}(x'_i) \cdot r_{\tilde{F}_i\tilde{G}}}{\sum_{i=1}^p r_{\tilde{F}_i\tilde{G}}}, \quad (9)$$

其中 $\mu_{\tilde{F}_i}(x'_i)$ 均是区间值,即

$$\mu_{\tilde{F}_i}(x'_i) = [\underline{\mu}_{\tilde{F}_i}(x'_i), \bar{\mu}_{\tilde{F}_i}(x'_i)], \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

**注3** 1) 由于清晰数和区间值均可看做type-1模糊集的特例,所以传统模糊推理方法是具有模糊关系度的COFI的特例.

2) 对于区间型type-2模糊逻辑系统来说,采用传统推理方法与采用具有模糊关系度的COFI相比,前者的激活区间由后者的激活模糊集取代.所以,后者能将规则中前件集与后件

集的模糊关系度引入到模糊推理过程,从而能够捕获到规则中更多的不确定性信息.

### 3.3 COFI with FRD 的实施 (Implementation of COFI with FRD)

图3给出了区间型type-2模糊逻辑系统采用COFI with FRD时输入与前件集的运算过程.当输入 $x_1 = x'_1$ 时,位于 $x'_1$ 处的垂线与 $\tilde{F}_1$ 的FOU相交于区间 $[\underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x'_1)]$ ,同样,当 $x_p = x'_p$ 时,位于 $x'_p$ 处的垂线与 $\tilde{F}_p$ 的FOU相交于区间 $[\underline{\mu}_{\tilde{F}_p}(x'_p), \bar{\mu}_{\tilde{F}_p}(x'_p)]$ .从而激活模糊集可由式(9)计算.图3显示,输入与前件集的运算结果是一个type-1模糊集 $F$ ,该模糊集包含了各个前件集 $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_p$ 与后件集 $\tilde{G}$ 之间的模糊关系度.然后,激活模糊集 $F$ 与后件集进行合成运算,得到合成type-2模糊集 $\tilde{C}_{F\tilde{G}}$ .最后,确定不确定性水平 $\alpha$ , $\alpha \in [0, 1]$ ,则可得 $\tilde{C}_{F\tilde{G}}$ 的 $\alpha$ -主内嵌区间型type-2模糊集,即规则输出集 $FOU_\alpha$ .当后件集 $\tilde{G}$ 的FOU是三角形区域, $t$ -范数为取小 $t$ -范数时,规则输出集如图3(c)中梯形部分所示的FOU.

### 4 仿真实例(Simulation examples)

由于一个多输入多输出(MIMO)模糊系统可以看做一组多输入单输出(MISO)模糊系统.不失一般性,仿真中采用双输入单输出的区间型type-2模糊逻辑系统.下面是仿真中用到的区间型type-2模糊集合及其含义. $\tilde{S}\tilde{S}$ , $\tilde{M}\tilde{S}$ 和 $\tilde{L}\tilde{S}$ 分别表示泥沙量小、中、大; $\tilde{S}\tilde{G}$ , $\tilde{M}\tilde{G}$ 和 $\tilde{L}\tilde{G}$ 分别表示油脂量小、中、大; $\tilde{V}\tilde{S}$ , $\tilde{S}$ , $\tilde{M}$ , $\tilde{L}$ 和 $\tilde{V}\tilde{L}$ 分别表示洗涤时间很短、短、中、长、很长; $\tilde{M}(t)$ 表示 $\tilde{M}$ 的隶属度函数; $\star$ 表示范数运算.

#### 4.1 实例1: 具有CRD的COFI(Example 1: COFI with CRD)

本实例将COFI with CRD应用到模糊自动洗衣机控制器的简化设计中,并与在工程领域中得到广泛应用的取小模糊推理和乘积模糊推理比较,以表明COFI的特性.

**控制器的输入/输出** 控制器有两个输入:衣服上的泥沙量和油脂量.二者可由感光传感器测得.由于只考虑洗涤时间,因此控制器的输入输出设计成双输入单输出的结构.

**定义输入/输出变量** 为使输入变量的值覆盖感光传感器的测量范围,把输入变量的值标准化(normalized)为 $[0, 100]$ .输入输出变量的隶属函数如图4所示.

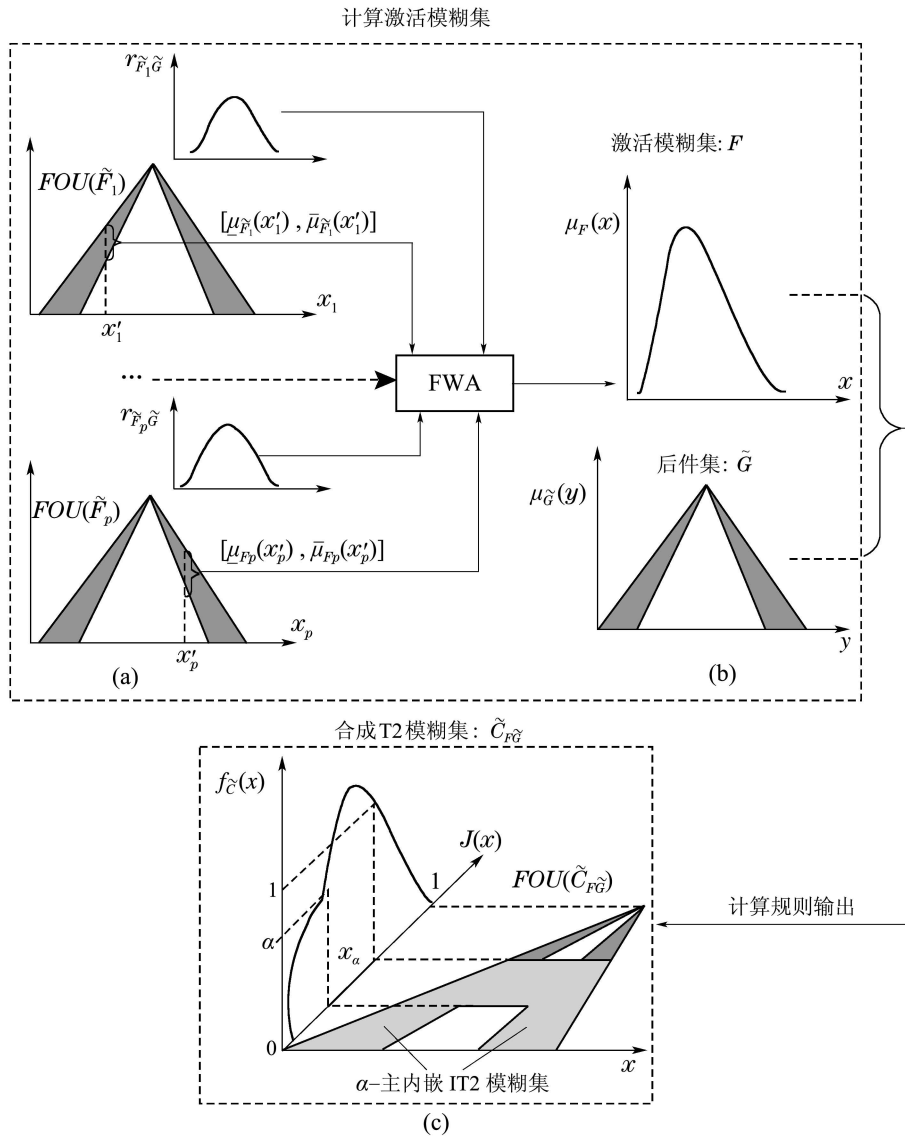


图 3 具有模糊关系的COFI: 从激活模糊集到规则输出  
 Fig. 3 COFI with FRD: form firing fuzzy set to rule output

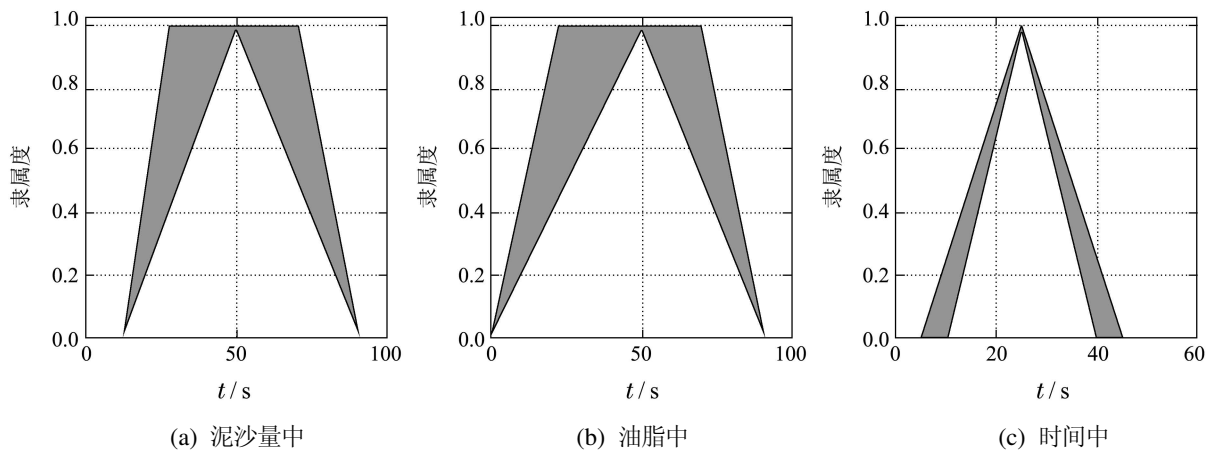


图 4 输入输出变量的隶属函数  
 Fig. 4 Membership functions of input and output variables

**模糊规则** 模糊控制器的规则集如表1所列, 其中, (1)–(9)表示9条模糊规则的序号.

表1 模糊控制规则集

Table 1 Fuzzy control rules

	$\widetilde{SG}$	$\widetilde{MG}$	$\widetilde{LG}$
$\widetilde{SS}$	$\widetilde{VS}(1)$	$\widetilde{M}(4)$	$\widetilde{L}(7)$
$\widetilde{MG}$	$\widetilde{S}(2)$	$\widetilde{M}(5)$	$\widetilde{L}(8)$
$\widetilde{LS}$	$\widetilde{M}(3)$	$\widetilde{L}(6)$	$\widetilde{VL}(9)$

**模糊推理** 为便于比较, 将油脂量固定为15, 让泥沙量在74, 20和15(较大、小、较小)之间变化. 当 $x'$ 分别取74, 20, 15,  $y'$ 取15时, 对应的主隶属度分别是 $J_{\widetilde{MS}}(74)=[0.3, 0.4]$ ,  $J_{\widetilde{MS}}(20)=[0.2, 0.6]$ ,  $J_{\widetilde{MS}}(15)=[0.1, 0.3]$ 和 $J_{\widetilde{MG}}(15)=[0.2, 0.5]$ . 其中,  $x'=74, y'=15$ 激活(5)–(6)(8)–(9)4条规则.  $x'=20, y'=15$ 和 $x'=15, y'=15$ 激活另外4条规则(4)–(5)(7)–(8). 限于篇幅, 仅以较复杂的第5条和第8条规则进行比较. 并设泥沙和油脂对时间的影响度分别是0.3和0.8. 模糊推理的结果总结在表2–4中. 泥沙量、油脂量及关系度变化时的推理结果总结在表5–8中.

表2 当 $J_{\widetilde{MS}}(74)=[0.3, 0.4]$ 时的比较结果

Table 2 Comparisons when  $J_{\widetilde{MS}}(74)=[0.3, 0.4]$

	取小推理	乘积推理	COFI CRD
激活区间	[0.2, 0.4]	[0.06, 0.2]	[0.23, 0.47]
规则输出	$[0.2, 0.4] * \widetilde{M}$	$[0.06, 0.2] * \widetilde{M}$	$[0.23, 0.47] * \widetilde{M}$

最小推理

COFI with CRD

由于 $A(x) * B(x)$ 总小于 $A(x) \wedge B(x)$ (\*和 $\wedge$ 分别表示乘积和取小 $t$ -范数), 所以, 如果COFI优于取小推理, 则也必然优于乘积推理. 这里的“优劣”指的是模糊推理所得的fired-rule面积的大小, 面积越大说明模糊推理捕获到规则中的不确定性信息越多. 因此表2–4没有列出乘积推理的fired-rule示意图.

由表2可见, 当泥沙量远大于油脂量时, 取小推理的规则输出仍由油脂量唯一决定( $[0.2, 0.4] * \widetilde{M}$ ); 乘积推理的结果没有反映泥沙含量对时间的影响( $[0.06, 0.2] \cap J_{\widetilde{MG}}(15) = \emptyset$ ); COFI则同时考虑了泥

沙量和油脂量两个因素( $[0.23, 0.47] * \widetilde{M}$ ), 并且所得FOU的面积(梯形部分, 下同)较二者大(左右两侧FOU的面积分别为7.35和7.38).

表3 当 $J_{\widetilde{MS}}(20)=[0.2, 0.6]$ 时的比较结果

Table 3 Comparisons when  $J_{\widetilde{MS}}(20)=[0.2, 0.6]$

	取小推理	乘积推理	COFI CRD
激活区间	[0.2, 0.5]	[0.04, 0.3]	[0.2, 0.53]
规则输出	$[0.2, 0.5] * \widetilde{M}$	$[0.04, 0.3] * \widetilde{M}$	$[0.2, 0.53] * \widetilde{M}$

最小推理

COFI with CRD

表3表明, 当泥沙量减小时, 取小和乘积推理的结果与表2相似, 均由油脂量唯一决定; COFI则不完全考虑了泥沙因素( $[0.2, 0.5] \subset [0.2, 0.53]$ ), 而且也较好地考虑了油脂因素( $[0.04, 0.3] \cap [0.2, 0.53] \neq \emptyset$ ), 并且FOU面积显著增大.

表4 当 $J_{\widetilde{MS}}(15)=[0.1, 0.3]$ 时的比较结果

Table 4 Comparisons when  $J_{\widetilde{MS}}(15)=[0.1, 0.3]$

	取小推理	乘积推理	COFI CRD
激活区间	[0.1, 0.3]	[0.02, 0.15]	[0.17, 0.45]
规则输出	$[0.1, 0.3] * \widetilde{M}$	$[0.02, 0.15] * \widetilde{M}$	$[0.17, 0.45] * \widetilde{M}$

最小推理

COFI with CRD

表4反映, 当油脂量等于泥沙量时, 取小和乘积推理的结果却由泥沙唯一决定, 这与实际经验不符; COFI仍兼顾了两种因素, 并且FOU的面积明显较大, 这是由于考虑了每个前件集(泥沙量和油脂量)对后件集(洗涤时间)的相关性信息.

以上表2–4表明, 取小和乘积模糊推理得到的激活规则有时仅由其中一个前件集决定, 而忽略了他前件集. 这会丢失后件集与某些前件集之间的一些信息. 表5给出了当关系度 $r_1, r_2$ 变化时COFI推理的FOU的面积, 此时取小模糊推理所得的面积为5.20. 表6给出了当泥沙量和油脂量变化时COFI的

推理结果. 表7和表8给出了第8条规则的相应推理结果. 其中, 表7是当关系度 $r_1, r_2$ 变化时COFI推理的FOU的面积, 此时取小模糊推理所得的面积为4.24. 表8给出了泥沙量和油脂量变化时的推理结果.

表 5 关系度 $r_1, r_2$ 在 $[0, 1]$ 变化时的推理结果

Table 5 Fuzzy inference results when the relationship degrees  $r_1, r_2$  change within  $[0, 1]$

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.1	8.21	7.95	7.9	7.84	7.81	7.78	7.74	7.71	6.88	6.84
0.2	8.44	8.41	8.37	8.35	8.28	8.23	8.16	8.09	7.87	7.64
0.3	9.21	9.18	9.06	9.02	8.78	8.74	8.64	8.61	8.58	8.46
0.4	9.33	9.3	9.28	9.24	9.17	8.85	8.76	8.68	8.62	8.58
0.5	9.38	9.35	9.3	9.27	9.22	9.17	9.13	9.06	9.01	8.76
0.6	9.42	9.38	9.35	9.3	9.26	9.23	9.12	9.08	9.02	8.54
0.7	9.47	9.44	9.38	9.33	9.3	9.27	9.24	9.19	9.05	9.02
0.8	9.53	9.48	9.43	9.41	9.37	9.34	9.27	9.22	9.18	9.14
0.9	10.14	10.11	10.07	9.86	9.75	9.68	9.62	9.51	9.47	9.36
1	10.2	10.13	10.07	10.02	9.85	9.76	9.73	9.69	9.64	9.55

表 6 泥沙量和油脂量变化时的推理结果

Table 6 Fuzzy inference results when the sediment and grease take different values

$x'$	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70
$y'$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
COIF	8.14	9.79	12.4	11.5	10.4	9.62	8.92	7.66	6.04	6.64
Min	3.49	4.28	6.36	2.51	2.65	3.29	3.74	2.04	4.01	5.5
$x'$	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90
$y'$	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
COFI	9.52	9.36	7.47	7.58	8.81	8.77	7.85	7.51	6.33	4.06
Min	4.87	5.62	6.33	7.26	8.07	6.24	3.68	6.39	4.62	2.77

表 7 关系度 $r_1, r_2$ 在 $[0, 1]$ 变化时的推理结果

Table 7 Fuzzy inference results when the relationship degrees  $r_1, r_2$  change within  $[0, 1]$

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.1	8.52	8.48	8.43	8.4	8.37	6.75	6.64	6.58	6.42	6.36
0.2	8.71	8.65	8.62	8.58	8.49	8.33	7.87	7.62	7.58	6.64
0.3	8.9	8.86	8.74	8.53	8.5	8.48	8.44	8.31	8.24	7.82
0.4	9.06	9.02	8.87	8.81	8.76	8.66	8.58	8.41	8.37	7.93
0.5	9.32	9.26	9.19	9.13	9.08	9.02	8.68	8.78	8.63	8.34
0.6	9.48	9.41	9.38	9.3	9.27	9.19	9.13	9.05	8.92	8.75
0.7	9.61	9.59	9.54	9.47	9.41	9.34	9.29	9.24	9.16	8.82
0.8	9.8	9.76	9.71	9.69	9.64	9.57	9.52	9.47	9.43	9.37
0.9	9.86	9.82	9.77	9.72	9.69	9.61	9.59	9.56	9.54	9.43
1	9.93	9.87	9.81	9.79	9.74	9.68	9.66	9.61	9.57	9.52

表 8 泥沙量和油脂量变化时的推理结果

Table 8 Fuzzy inference results when the sediment and grease change take different values

$y'$	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48
COFI	7.68	7.62	7.59	7.55	7.46	7.43	7.39	7.35	7.28	7.13
Min	4.86	4.82	4.76	4.72	4.69	4.66	4.57	4.53	4.17	3.98
$y'$	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68
COFI	6.35	6.31	6.27	6.24	6.18	5.8	5.74	5.71	5.66	5.62
Min	3.46	3.41	3.37	3.32	3.29	3.25	3.2	3.18	3.13	2.82
$x'$	70	71.5	73	74.5	76	77.5	79	80.5	82	83.5
COFI	6.42	6.38	6.34	6.48	6.43	6.39	6.33	6.27	6.23	6.21
Min	6.36	6.33	5.85	5.81	5.76	5.73	5.64	5.58	5.53	5.46
$x'$	85	86.5	88	89.5	91	92.5	94	95.5	97	98.5
COFI	8.83	8.78	8.73	8.67	8.54	8.47	8.38	8.32	8.26	8.14
Min	6.43	6.41	6.37	6.33	6.29	6.23	6.17	5.58	5.52	5.46

**注 4** 关于降型和清晰化. 由上述模糊推理可知, 推理引擎的输出集完全反映了COFI与其他模糊推理的区别. 而输出模块处理的是推理引擎的输出集, 生成降型集和清晰数. 采用不同的降型方法, 得到不同的降型集和清晰数, 因此降型集和清晰数不能反映COFI与其他模糊推理过程的差异. 故此略去降型和清晰化部分. 关于降型和清晰化的具体方法详见文献[17-19].

#### 4.2 实例2: 具有FRD的COFI(Example 2: COFI with FRD)

该实例以一个抽象的例子来演示COFI with FRD的实现过程. 先做以下设定: 1)  $x_1$ 和 $x_2$ 为主变量; 2) 区间型type-2模糊逻辑系统中的第 $l$ 条规则为 $R^l$ : IF  $x_1$  is  $\tilde{F}_1^l$  and  $x_2$  is  $\tilde{F}_2^l$ , THEN  $y$  is  $\tilde{G}^l$ . 其中 $\tilde{F}_1^l, \tilde{F}_2^l$ 和 $\tilde{G}^l$ 的FOU如图4所示; 3)  $\tilde{F}_1^l$ 对 $\tilde{G}^l$ 和 $\tilde{F}_2^l$ 对 $\tilde{G}^l$ 的模糊关系度分别是 $r_1$ 和 $r_2$ , 其隶属函数如式(10)所示; 4) 在某特定时刻测得的输入值为20和15, 即 $x'_1 = 20, x'_2 = 15$ , 从而对应的主隶属度分别为 $[0.2, 0.5]$ 和 $[0.3, 0.7]$ , 即 $J(20) = [0.2, 0.5], J(15) = [0.3, 0.7]$ .

$$\mu_{r_1}(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}x, & 0 \leq x < 0.8, \\ -5x + 5, & 0.8 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mu_{r_2}(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}x, & 0 \leq x < 0.3, \\ -\frac{10}{7}x + \frac{10}{7}, & 0.3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**计算激活模糊集** 将 $r_1$ 和 $r_2$ 的论域 $[0, 1]$ 离散化. 这里将其离散为 $0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$ , 即对应的11个 $\alpha$ 截点(cut)为

$$\alpha_i = 0.1 \times i, i = 0, 1, \dots, 10. \quad (11)$$



对每个截点 $\alpha_i$ , 激活模糊集 $F$ 中与其对应的截区间 $F_i$ 如表9所示.

表 9  $\alpha$ 截点对应的区间

Table 9 Intervals correspond to  $\alpha$  cuts

$\alpha$	$F_i$	$\alpha$	$F_i$
0	[0.2000, 0.7000]	0.6	[0.2170, 0.6094]
0.1	[0.2030, 0.6842]	0.7	[0.2196, 0.5953]
0.2	[0.2059, 0.6686]	0.8	[0.2222, 0.5815]
0.3	[0.2087, 0.6534]	0.9	[0.2248, 0.5679]
0.4	[0.2115, 0.6385]	1	[0.2273, 0.5545]
0.5	[0.2143, 0.6238]		

由此, 采用曲线拟合法得到激活模糊集 $F$ 的隶属度函数为

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 36.63x - 7.33, & 0.2 \leq x < 0.2273, \\ 1, & 0.2273 \leq x < 0.5545, \\ -6.87x + 4.81, & 0.5545 \leq x \leq 0.7. \end{cases} \quad (12)$$

其函数图像如图5所示.

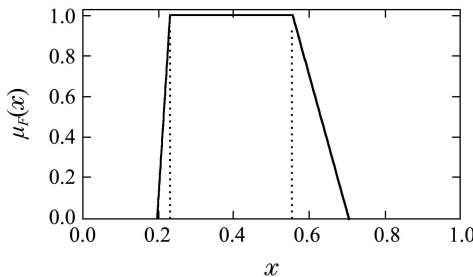


图 5 激活模糊集的隶属度函数图像

Fig. 5 Graphic of membership function of the firing fuzzy set

**计算规则输出** 设不确定性水平 $\alpha = 1$ , 由式(10)可得 $X_\alpha = X_1 = [0.2273 \ 0.5545]$ (见图5). 根据定义3, 可得合成type-2模糊集 $\tilde{C}_{F\tilde{G}}$ 及其1-主内嵌区间型type-2模糊集. 其示意图如图6所示.

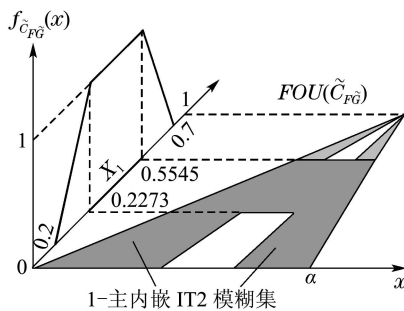


图 6 规则输出集及其1-主内嵌IT2模糊集

Fig. 6 Rule oupt and its 1-primary embedded IT2 fuzzy set

**比较结果** 类似与实例1, 由于 $A(x) * B(x)$ 总是小于 $A(x) \wedge B(x)$ , 所以, 如果COFI with FRD优

于取小模糊推理, 则也必然优于乘积推理. COFI with FRD与取小模糊推理的比较结果(激活区间/激活模糊集、规则输出等)列在表10中.

表 10 具有FRD的COFI与取小模糊推理的比较结果

Table 10 Comparison between minimum fuzzy inference and COFI with FRD

	激活区间	规则输出
取小推理	[0.2,0.5]	$[0.2,0.5] * \tilde{G}^l$
COFI	[0.2273,0.5545]	$[0.2273,0.5545] * \tilde{G}^l$

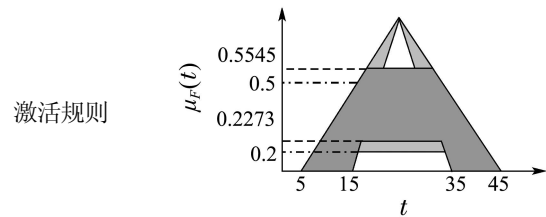


表10表明, 由COFI with FRD得到的激活规则的FOU面积比由取小模糊推理得到的大. 这说明前者比后者能够捕获到规则中更多的不确定性信息. 原因是COFI with FRD不仅考虑了规则中的所有前件集, 而且将前件集与后件集之间的模糊关系度也引入到了模糊推理过程. 如果设定不确定性水平 $\alpha$ 小于1, 如 $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7$ 或其他值, 由COFI with FRD得到的激活规则的FOU面积会更大. 因此, COFI with FRD使模糊逻辑系统的设计具有更大的自由度, 因为设计者可以根据不同的要求设定不同的不确定性水平 $\alpha$ .

### 5 结论(Conclusions)

事物之间总是相互联系、相互影响. 模糊规则中不同的前件集对同一个后件集也存在着不同的相关性. 所以在模糊推理中, 如果不考虑这种相关性, 则蕴含在模糊规则中的一些信息则会丢失. 在某些情况下, 这会导致模糊逻辑系统产生不合理的结果. 本文首先引入模糊集的OO变换及合成type-2模糊集的概念. 基于此, 提出用于区间型type-2模糊逻辑系统的面向后件集的模糊推理机制, 即COFI with CRD和COFI with FRD. 这种机制能将规则中前件集与后件集之间的相关性信息引入到推理过程, 使推理结果包含了规则中更多的不确定性信息. 实际上, COFI表明, 模糊逻辑系统可以在前件集与后件集相互关联的环境下进行研究. 并且, type-2模糊集合及其相关概念, 如质心(centroid)、降型(type reduction)、相似度与不确定性测度(similarities and

uncertainty measures)等都可以在这种模糊集合是相互关联的环境下进一步研究.

### 参考文献(References):

- [1] LI H X, DUAN X G, LIU Z. Three-dimensional fuzzy logic system for process modeling and control [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(3): 280 – 285.
- [2] ZHANG L, PANG Y J, SU Y M, et al. HPSO-based fuzzy neural network control for AUV [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2008, 6(3): 322 – 326.
- [3] XIA J W, SUN C Y. Energy-to-peak control for a class of discrete stochastic fuzzy systems with time-delay [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 9(4): 624 – 628.
- [4] HAGRAS H, WAGNER C. Towards the wide spread use of type-2 fuzzy logic systems in real world applications [J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2012, 7(3): 14 – 24.
- [5] BARKAT S, TLEMCANI A, NOURI H. Noninteracting adaptive control of PMSM using interval type-2 fuzzy logic systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, 19(5): 925 – 936.
- [6] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-1 [J]. *Information Science*, 1975, 8(3): 199 – 249.
- [7] TÜRKSEN I B, YAO D W. Representation of connectives in fuzzy reasoning: the view through normal forms [J]. *IEEE Transactions Systems Man, Cybernetics*, 1984, 14(1): 146 – 150.
- [8] TÜRKSEN I B. Interval-valued fuzzy sets based on normal forms [J]. *Fuzzy Sets and System*, 1986, 20(2): 191 – 210.
- [9] TÜRKSEN I B. Interval valued fuzzy sets and fuzzy connectives [J]. *Interval Computations*, 1993, 4(7): 125 – 142.
- [10] TÜRKSEN I B. Type-2 representation and reasoning for CWW [J]. *Fuzzy Sets and System*, 2002, 127(1): 17 – 36.
- [11] LEE C S, WANG M H. A fuzzy expert system for diabetes decision support application [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2011, 41(1): 139 – 153.
- [12] CHEN S M, LEE L W. Fuzzy decision-making based on likelihood-based comparison relations [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(3): 613 – 628.
- [13] CAPITAINE H, FRÉLICOT C. On (weighted) k-order fuzzy connectives[C] // *Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Barcelona, Spain: IEEE, 2010: 1 – 8.
- [14] CERAMI M, GARCIA-CERDANA A, ESTEVA F. From classical description logic to n-graded fuzzy description logic [C] // *Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Barcelona, Spain: IEEE, 2010: 1506 – 1513.
- [15] WU H W, MENDEL J M. Antecedent connector word models for interval type-2 fuzzy logic systems [C] // *Proceedings of 2004 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Budapest, Hungary: IEEE, 2004, 8: 1099 – 1104.
- [16] KARNIK N N, MENDEL J M. Introduction to type-2 fuzzy logic systems [C] // *Fuzzy Systems Proceedings*. Anchorage, AK: IEEE, 1998, 2: 915 – 920.
- [17] LINDA O, MANIC M. Monotone centroid flow algorithm for type-reduction of general type-2 fuzzy sets [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(5): 805 – 819.
- [18] WU H J, SU Y L, LEE S J. A fast method for computing the centroid of a type-2 fuzzy set [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2012, 42(3): 764 – 777.
- [19] NIE M W, TAN W W. Analytical structure and characteristics of symmetric karnik-mendel type-reduced interval type-2 fuzzy pi and pd controllers [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(3): 416 – 430.

### 作者简介:

**岳菊梅** (1983–), 女, 博士, 研究领域为type-2模糊逻辑理论和应用、模糊逻辑在复杂系统中的应用、智能控制, E-mail: yjm@mail.nankai.edu.cn;

**陈秋双** (1966–), 女, 博士, 教授, 研究方向为CIMS、APS、供应链管理与物流系统优化;

**陈增强** (1964–), 男, 博士, 教授, 研究为智能预测控制、混沌系统与复杂动态网络、多智能体系统控制.