文章编号: 1000−8152(2010)12−1793−05

单机调度问题对偶集结迭代算法

左 燕, 薛安克, 王建中

(杭州电子科技大学 信息与控制研究所, 浙江 杭州 310018)

摘要: 具有到达时间约束、目标为最小化加权完工时间之和的单机调度问题是一个典型的NP-hard问题, 采用时间下标建模的线性规划松弛方法可提供一个很强的下界, 但优化求解存在维数困难. 为此, 本文提出了一种对偶集结优化策略, 通过选择一个衰减集结矩阵集结对偶乘子变量, 利用对偶理论获得模型的约束集结, 从而降低计算复杂度. 同时分析了集结模型的结构特性, 并提出一种迭代算法来改善下界. 仿真结果表明对偶集结迭代算法能够减少计算时间, 同时改善下界性能, 适用于大规模调度问题.

关键词: 单机调度; 线性规划松弛; 对偶集结; 时间下标建模

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

A dual aggregated iterative algorithm for single machine scheduling problems

ZUO Yan, XUE An-ke, WANG Jian-zhong

(Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: The scheduling problem of minimizing the weighted completion time of n jobs with release dates on a single machine is strongly NP-hard. Its linear-programming relaxation based on time-indexed formulation provides a strong lower bound. However the number of constraints and variables can be large even for relative small instances. In this paper, a dual aggregated strategy is proposed to decrease the numbers of constraints by aggregating the dual multipliers with a decaying aggregation matrix. The structural properties of the aggregated model are also analyzed. An iterative method is proposed to improve the lower bound. Simulation results show that the dual aggregated iterative algorithm can reduce running time and improve lower bound. The application of these techniques still allows large-scale scheduling problems.

Key words: single machine scheduling; linear-programming relaxation; dual aggregation; time-indexed formulation

1 引言(Introduction)

具有到达时间约束, 目标为最小化加权完工时间之和的单机调度问题$1|r_j|\sum w_jC_j$是典型的NP-hard问题, 存在优化求解困难[1]. 目前单机调度问题优化主要采用基于多面体理论的优化算法, 它将调度问题描述为整数规划模型, 通过线性规划(linear programming, LP) 松弛获得最优值的下界, 它可提供有效信息进行算法寻优[2,3].

基于多面体理论的隐枚举法和近似算法关键在于最优值下界的选择, 下界越紧, 调度性能越好[4]. 文[5] 指出单机调度问题$1|r_j|\sum w_jC_j$基于时间下标描述的LP松弛获得的下界最紧. 然而随着问题规模的增大, 基于时间下标描述的LP松弛问题维数呈指数增长, 优化求解非常困难. 为此, 文[6] 采用列生成法对可行域顶点进行凸组合描述, 部分降低计算复杂度. 但生成的列个数过多导致算法的收敛速度慢, 计算效率较低. 文[7] 采用代理松弛方法对约束进行线性组合, 减少约束个数, 虽可大大减少计算量, 但获得的下界值较弱. 因此, 有必要提供一种有效的算法求解基于时间下标的LP松弛问题, 在下界性能和计算效率之间获得一个好的均衡.

本文对单机调度$1|r_j|\sum w_jC_j$的LP松弛问题提出了一种对偶集结迭代算法, 选择合适的集结矩阵对LP松弛问题对偶乘子变量进行集结, 实现LP松弛问题模型的降维, 提高计算效率. 在此基础上, 设计了一种迭代算法, 理论上保证下界性能迭代改进, 最

收稿日期: 2010−05−07; 收修改稿日期: 2010−10−13.

基金项目: 国家“973”计划资助项目(2009CB320602); 国家自然科学基金资助项目(40974102,61004119).

后仿真测试验证了该算法的有效性.

2 基于时间下标的单机调度模型(Time-indexed formulation for single machine scheduling problems)

单机调度问题$1|r_j|\sum w_jC_j$描述如下: n个待加工工件在一台机器上加工, 工件一旦开工不允许中断, 任一时刻机器最多只能加工一个工件. 已知工件j的到达时间$r_j \geqslant 0$, 加工时间$p_j > 0$. 令工件j的完工时间为C_j, 目标函数为最小化加权完工时间之和$\sum w_jC_j$最小, 其中权值$w_j > 0$.

将整个调度时域T分解为T个单位时间长度的时段, 给出基于时间下标的单机调度模型如下[5]:

$$\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=r_j+p_j}^{T} w_j t x_{jt}, \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{t=r_j+p_j}^{T} x_{jt} = 1, j = 1,\cdots,n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=t}^{t+p_j-1} x_{js} \leqslant 1, t = 1,\cdots,T, \tag{3}$$

$$x_{jt}\in\{0,1\}, j=1,\cdots,n,\ t=1,\cdots,T, \tag{4}$$

其中二进制变量x_{jt}示工件j是否在时段$[t-1,t]$完工, 若是则$x_{jt}=1$, 否则$x_{jt}=0$. 目标函数(1)表示加权完工时间之和$\sum w_jC_j$, 其中$C_j = \sum\limits_{t=r_j+p_j}^{T} t x_{jt}$; 分配约束(2)表示每个工件在调度时域内仅能完工一次; 机器能力约束(3)表示任一时段机器最多加工一个工件.

松弛整数约束条件可获得单机调度问题的LP松弛模型, 变量整数约束(4)松弛为

$$0 \leqslant x_{jt} \leqslant 1, j = 1,\cdots,n,\ t = 1,\cdots,T. \tag{5}$$

基于时间下标的LP松弛模型中约束个数为$n+T$, 变量个数为nT, 其中调度时域$T \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} p_j$. 当工件数$n$很大且工件的加工时间$p_j$很长的情况下, 线性规划优化求解存储需求和计算时间非常大, 因此有必要提出一种有效的方法降低模型的维数, 在减少计算量的同时保证下界性能.

3 集结模型及迭代算法(Aggregated model and iterative algorithm)

从基于时间下标单机调度模型描述中可以看出, 优化问题的计算复杂度取决于问题规模n和调度时域T. 若能采用某种合理的降维方法, 将原来的优化变量用一组低维的集结变量代替, 则可大大减少优化计算量, 满足实时优化调度的要求.

3.1 对偶集结模型(Dual aggregated model)

将基于时间下标的LP松弛模型$P_{\rm LP}$, 写成如下矩阵结构形式:

$$(P_{\rm LP}) \begin{cases} \min CX, \\ A_1X = b_1,\ X \in \mathbb{R}_+^{nT}. \\ A_2X \leqslant b_2, \end{cases} \tag{6}$$

由对偶理论得到其对偶模型$D_{\rm LP}$矩阵结构如下:

$$(D_{\rm LP}) \begin{cases} \max(b_1^{\rm T}\pi + b_2^{\rm T}\lambda), \\ A_1^{\rm T}\pi + A_2^{\rm T}\lambda \leqslant C^{\rm T}, \\ \pi \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^{\rm T}, \end{cases} \tag{7}$$

其中: $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times(nT)}$和$A_2 \in \mathbb{R}_+^{T\times(nT)}$分别表示分配约束和机器能力约束系数矩阵, π和λ分别表示分配约束和机器能力约束的对偶乘子向量.

由对偶理论, 对偶乘子$\lambda = [\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_T]^{\rm T}$中每个元素$\lambda_i$的物理意义为第$i$个时间段使用机器的影子价格, 它反映了每个时间段机器的竞争程度. 某时段机器竞争越激烈, 对应该时段的影子价格越高. 根据机器不同时段竞争程度不同, 集结对偶乘子, 将调度时域进行不同时间尺度分解.

将调度时域T分割为$s(s<T)$段, 取集结变换形式为

$$\lambda = H\lambda_{\rm p}, \tag{8}$$

其中: s为集结变量个数, $\lambda_{\rm p}$为集结后对偶乘子向量, $\lambda_{\rm p} = \left[\lambda_{\rm p}^1\ \lambda_{\rm p}^2\ \cdots\ \lambda_{\rm p}^s\right]^{\rm T}$, 维数为$s\times 1$.

集结矩阵H采用如下衰减集结形式[8,9]:

$$H = {\rm diag}\{H_1,\ \cdots,\ H_s\}, \tag{9}$$

其中: H_i为$l_i \times 1$维的列向量$[1\ \cdots\ 1]^{\rm T}$, l_i为第i个时段的时间长度, $\sum\limits_{i=1}^{s} l_i = T$.

将式(8)代入对偶模型$D_{\rm LP}$得到对偶集结模型$D_{\rm a}$如下:

$$(D_{\rm a}) \begin{cases} \max(b_1^{\rm T}\pi + b_2^{\rm T}H\lambda_{\rm p}), \\ A_1^{\rm T}\pi + (A_2^{\rm T}H)\lambda_{\rm p} \leqslant C^{\rm T}, \\ \pi \in \mathbb{R}^n, \lambda_{\rm p} \in \mathbb{R}^s. \end{cases} \tag{10}$$

将对偶集结模型$D_{\rm a}$转换至原空间, 得到原问题的集结模型$P_{\rm a}$:

$$(P_{\rm a}) \begin{cases} \min CX, \\ A_1X = b_1, \qquad X \in \mathbb{R}_+^{nT}. \\ (H^{\rm T}A_2)X \leqslant H^{\rm T}b_2, \end{cases} \tag{11}$$

比较原模型$P_{\rm LP}$和集结模型$P_{\rm a}$的结构, 集结模型在结构上具有以下特点:

1) 矩阵结构不变, 目标函数和分配约束不变;

2) 机器能力约束进行凸组合, 原问题中表示单位长度时间段$[t-1,t]$内机器的能力约束, 集结模型中表示长度为l_i的时间段$[t-1,t]$内机器需要满足总的能力约束.

从计算角度看, 约束个数从$n+T$减少为$n+s(s<<T)$, 可大大降低计算量; 从理论分析角度看, 利用对偶理论建立原问题和集结问题优化解之间的关系, 可进行集结模型的性能分析.

引理 1 令可行域$S_1=\left\{X\in\mathbb{R}_+^n|AX\leqslant b\right\}$, 可行域$S_2=\left\{X\in\mathbb{R}_+^n|H^{\mathrm{T}}AX\leqslant H^{\mathrm{T}}b\right\}$, 若$H$采用式(9)形式, 则一定有$S_1\subseteq S_2$.

证 设X^0为可行域S_1的任意解, 即$X^0\in S_1$, 则X^0满足约束$AX^0\leqslant b$, 即$(AX^0-b)\leqslant 0_{T\times 1}$.

令$(AX^0-b)=[n_1\ n_2\ \cdots\ n_T]^{\mathrm{T}}$, 其中$n_i\leqslant 0$. 由式(9)有

$$H^{\mathrm{T}}(AX^0-b)=\begin{bmatrix} n_1+\cdots+n_{l_1}\\ n_{l_1+1}+\cdots+n_{l_1+l_2}\\ \vdots\\ n_{l_1+\cdots+l_{s-1}+1}+\cdots+n_T\end{bmatrix}\leqslant 0_{s\times 1},$$

故$X^0\in S_2$, 即$S_1\subseteq S_2$. 证毕.

定理 1 令原模型P_{LP}最优目标函数值为z_{LP}, 集结模型P_{a}最优目标函数值为z_{a}, 则有$z_{\mathrm{a}}\leqslant z_{\mathrm{LP}}$.

证 已知原模型P_{LP}和集结模型P_{a}的可行域分别为$S_{\mathrm{LP}}=\left\{X\in\mathbb{R}_+^n|A_1X=b_1,A_2X\leqslant b_2\right\}$, $S_{\mathrm{a}}=\left\{X\in\mathbb{R}_+^n|A_1X=b_1,H^{\mathrm{T}}A_2X\leqslant H^{\mathrm{T}}b_2\right\}$, 集结矩阵$H$采用式(9)形式, 由引理1可知$S_{\mathrm{LP}}\subseteq S_{\mathrm{a}}$, 目标函数为最小化问题, 故$z_{\mathrm{a}}\leqslant z_{\mathrm{LP}}$成立, 即对偶集结问题优化解为原问题提供一个下界. 证毕.

3.2 迭代优化算法(Iterative optimization algorithm)

采用对偶集结策略可大大减少计算量, 同时也得到原问题的一个下界, 该方法是以牺牲下界性能来换取计算量的减少. 为了提高该下界, 本文进一步提出一种迭代算法. 迭代过程中, 依次松弛集结约束, 改善下界同时保证计算效率.

将集结模型P_{a}中系数矩阵A_2和b_2展开如下:

$$A_2=\overbrace{\begin{bmatrix}A_{21}\\A_{22}\\\vdots\\A_{2s}\end{bmatrix}}^{T}\begin{matrix}\}\,l_1\\\}\,l_2\\ \\\}\,l_s\end{matrix},\ b_2=\overbrace{\begin{bmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2s}\end{bmatrix}}^{T}\begin{matrix}\}\,l_1\\\}\,l_2\\ \\\}\,l_s\end{matrix}.\tag{12}$$

集结变换(8)按块对角展开如下:

$$\lambda'_k=H_k\lambda_{\mathrm{p}}^k,k=1,\cdots,s,\tag{13}$$

其中$\lambda'_k=\left[\lambda_{l_0+\cdots+l_{k-1}+1}\ \cdots\ \lambda_{l_0+\cdots+l_k}\right]^{\mathrm{T}}, l_0=0$.

集结模型P_{a}按块对角形式重新描述如下:

$$(P_{\mathrm{a}}^0)\begin{cases}\min CX,\\ A_1X=b_1,\\ (H_1^{\mathrm{T}}A_{21})X\leqslant H_1^{\mathrm{T}}b_{21},\\ (H_2^{\mathrm{T}}A_{22})X\leqslant H_2^{\mathrm{T}}b_{22},\\ \quad\vdots\\ (H_s^{\mathrm{T}}A_{2s})X\leqslant H_s^{\mathrm{T}}b_{2s},\end{cases}\tag{14}$$

每次迭代k, 固定上一步迭代求得的对偶乘子λ'_{k-1}, 松弛对偶乘子集结约束$\lambda'_k=H_k\lambda_{\mathrm{p}}^k$, 能力约束$(H_k^{\mathrm{T}}A_{2k})X\leqslant H_k^{\mathrm{T}}b_{2k}$转化为$A_{2k}X\leqslant b_{2k}$. 给出第$k$次迭代集结模型如下:

$$(P_{\mathrm{a}}^k)\begin{cases}\min z_k=z_{k-1}+\lambda_{k-1}^{'\mathrm{T}}(b_{2,k-1}-A_{2,k-1}X),\\ A_1X=b_1,\\ \quad\vdots\\ A_{2k}X\leqslant b_{2k},\\ (H_{k+1}^{\mathrm{T}}A_{2,k+1})X\leqslant H_{k+1}^{\mathrm{T}}b_{2,k+1},\\ \quad\vdots\\ (H_s^{\mathrm{T}}A_{2s})X\leqslant H_s^{\mathrm{T}}b_{2s},\end{cases}\tag{15}$$

给出对偶集结迭代算法如下:

Step 0 令迭代次数$k=0$, $\lambda'_0=0$, $z_0=CX$, 对偶乘子$\lambda=H\lambda_{\mathrm{P}}$, 按式(9)选取集结矩阵$H$, 按式(14)建立集结模型$P_{\mathrm{a}}^0$;

Step 1 采用单纯形法求解模型P_{a}^k, 得到优化变量x_{jt}, 对偶乘子λ_{P}和下界值LB;

Step 2 采用α-points可行化方法[10], 得到可行调度和上界值UB; 如果$(UB-LB)/LB<0.05$, 则停止迭代, 转Step4; 否则转Step3;

Step 3 令$k=k+1$, 如果$k\geqslant s$, 则停止迭代, 转Step4; 否则按式(15)更新集结模型P_{a}^k, 转Step1;

Step 4 输出最优解和目标函数值.

定理 2 设集结模型P_{a}最优目标函数值为z_{a}, 第k次迭代集结模型P_{a}^k最优目标函数值为$z_k(k=1,\cdots,s)$, 原问题P_{LP}最优目标函数值为z_{LP}, 则有$z_{\mathrm{a}}\leqslant z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_s\leqslant z_{\mathrm{LP}}$, 即下界随迭代过程不断增强并接近原问题最优目标函数值.

证 集结模型的可行域S_{a}和迭代一次后集结模型的可行域S_1分别为:

$$S_{\mathrm{a}}=\{X\in\mathbb{R}_+^{nT}|A_1X=b_1,H_1^{\mathrm{T}}A_{21}X\leqslant H_1^{\mathrm{T}}b_{21},\\ H_2^{\mathrm{T}}A_{22}X\leqslant H_2^{\mathrm{T}}b_{22},\cdots,H_s^{\mathrm{T}}A_{2s}X\leqslant H_s^{\mathrm{T}}b_{2s}\},$$
$$S_1=\{X\in\mathbb{R}_+^{nT}|A_1X=b_1,A_{21}X\leqslant b_{21},\\ H_2^{\mathrm{T}}A_{22}X\leqslant H_2^{\mathrm{T}}b_{22},\cdots,H_s^{\mathrm{T}}A_{2s}X\leqslant H_s^{\mathrm{T}}b_{2s}\}.$$

由引理1可知$S_1\subseteq S_{\mathrm{a}}$, 目标函数相等且为最小化问题, 可得$z_{\mathrm{a}}\leqslant z_1$.

迭代一次后模型求得的最优对偶值为$\lambda_1'=[\lambda_1^*\ \cdots\ \lambda_{l_1}^*]^{\mathrm{T}}$, 由对偶原理有:

$$z_1=\min_{X\in S_1}CX=\min_{X\in S_1'}CX+\lambda_1^{'\mathrm{T}}(b_{21}-A_{21}X),$$
$$z_2=\min_{X\in S_2}CX+\lambda_1^{'\mathrm{T}}(b_{21}-A_{21}X),$$

其中:

$$S_1'=\{X\in\mathbb{R}_+^{nT}|A_1X=b_1,H_2^{\mathrm{T}}A_{22}X\leqslant H_2^{\mathrm{T}}b_{22},\\ \cdots,H_s^{\mathrm{T}}A_{2s}X\leqslant H_s^{\mathrm{T}}b_{2s}\},$$
$$S_2=\{X\in\mathbb{R}_+^{nT}|A_1X=b_1,A_{22}X\leqslant b_{22},\\ \cdots,H_s^{\mathrm{T}}A_{2s}X\leqslant H_s^{\mathrm{T}}b_{2s}\},$$

由引理1可知$S_2\subseteq S_1'$, 目标函数相等且为最小化问题, 可得$z_1\leqslant z_2$;

同理可得$z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_s$.

$$z_s=\min_{X\in S_s'}[CX+\lambda_1^{'\mathrm{T}}(b_{21}-A_{21}X)+\cdots+\\ \lambda_{s-1}^{'\mathrm{T}}(b_{2,s-1}-A_{2,s-1}X)]\leqslant\\ \max_{\lambda_1',\cdots,\lambda_{s-1}'}\min_{X\in S_s'}[CX+\lambda_1^{'\mathrm{T}}(b_{21}-A_{21}X)+\cdots+\\ \lambda_{s-1}^{'\mathrm{T}}(b_{2,s-1}-A_{2,s-1}X)]\leqslant\\ \min_{X\in S_{\mathrm{LP}}}CX=z_{\mathrm{LP}},$$

其中:

$$S_s'=\{X\in\mathbb{R}_+^{nT}|A_1X=b_1,A_{2s}X\leqslant b_{2s}\},$$
$$S_{\mathrm{LP}}=\{X\in\mathbb{R}_+^{nT}|A_1X=b_1,A_{21}X\leqslant b_{21},\\ \cdots,A_{2s}X\leqslant b_{2s}\},$$

故$z_{\mathrm{a}}\leqslant z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_s\leqslant z_{\mathrm{LP}}$成立.

证毕.

4 仿真测试与分析(Computational results)

按文[5]的方式随机生成数据: 工件个数n分别取100, 200, 300, 350; 加工时间p_j为1到$p_{\max}$的随机整数, 其中$p_{\max}$分别取10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100; 到达时间r_j服从$[0,\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}p_j]$均匀分布, 权值$w_j$为1到10的随机整数; 调度时域$T=\max\limits_{j=1,\cdots,n}\{r_j\}+\sum\limits_{j=1}^{n}p_j$. 对任意实例$(n,p_{\max})$(组合见表1)随机生成10组测试数据, 结果取均值.

衰减集结矩阵H中l_i分别取1, 2, 4, 8,$\cdots$. 采用α点可行化[10], 其中$\alpha=0.5$. 采用对偶间隙ρ_1来评价对偶集结迭代算法的调度性能: $\rho_1=(z_{\mathrm{UB}}-z_{\mathrm{LB}})/z_{\mathrm{LB}}$, 其中$z_{\mathrm{LB}}$和$z_{\mathrm{UB}}$分别为对偶集结迭代算法获得的下界和上界. 采用对偶间隙ρ_2来评价对偶集结迭代算法获得的下界性能: $\rho_2=(z_{\mathrm{LP}}-z_{\mathrm{LB}})/z_{\mathrm{LB}}$, 其中$z_{\mathrm{LP}}$为原LP问题最优目标函数值. 仿真测试采用C语言编程, 运行在主频为2GHz, 内存为256MB的机器上. 计算时间以秒为单位, 仿真结果见表1.

表 1 单机调度问题算法性能比较

Table 1 Performance comparison of the algorithms for single-machine scheduling problems

$(n,p_{\max})$	迭代算法		原LP问题优化算法	
	ρ_1/%	CPU/s	ρ_2	CPU/s
(100,10)	2.68	16	1.92%	193
(100,20)	2.08	40	1.31%	1072
(100,30)	2.28	69	2.22%	2880
(200,10)	2.99	138	2.18%	2473
(100,40)	3.49	75	N/A	N/A
(100,50)	2.25	114	N/A	N/A
(100,60)	3.27	251	N/A	N/A
(100,70)	3.12	211	N/A	N/A
(100,80)	1.30	262	N/A	N/A
(100,90)	2.74	320	N/A	N/A
(100,100)	2.39	336	N/A	N/A
(250,10)	2.94	336	N/A	N/A
(300,10)	2.75	659	N/A	N/A
(350,10)	2.88	920	N/A	N/A

仿真结果显示集结迭代算法可获得较好的调度性能(对偶间隙ρ_1均保持在5%范围内), 且优化计算量要远远小于原LP问题优化算法. 采用集结迭代算法对无法求解的中大规模问题亦能在较快的计算时间内获得好的调度结果(对偶间隙ρ_1在5%范围内). 由表中ρ_2亦可知, 集结迭代算法获得的下界性能较好, 该方法结合α点可行化方法不仅为单机调度问题优化求解提供了一种有效的近似算法, 还可推广至分支定界等精确算法的求解.

5 结论(Conclusion)

为提高单机调度问题优化求解效率, 本文提出了一种对偶集结策略. 采用衰减集结矩阵集结对偶乘子变量, 将调度时域按不同时间尺度分解, 通过对偶变换集结能力约束, 实现模型的降维, 提高计算效率. 在此基础上设计了一种对偶集结迭代算法, 理论上保证下界性能迭代改进, 仿真测试验证了算法的有效性. 对偶集结迭代算法可在调度性能和计算效

率之间获得一个好的均衡, 不仅为大规模调度问题近似算法提供好的下界, 而且可以应用于分支定界算法等精确算法中, 提高搜索效率, 降低计算时间. 尽管本文主要讨论单机调度问题, 但它对大规模、多机、复杂约束调度问题的优化求解提供了一种新的解决思路, 具有一定的研究意义.

参考文献(References):

[1] PINEDO M. *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2002.

[2] GOEMANS M X, QUEYRANNE M, SCHULZ A S, SKUTELLA M, et al. Single machine scheduling with release dates[J]. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2002, 15(2): 165 – 192.

[3] CORRREA J R, WAGNER M R. LP-based online scheduling: from single to parallel machines[J]. *Mathematical Programming*, 2009, 119(1): 109 – 136.

[4] UMA R N, WEIN J, WILLIANMSON D P. On the relationship between combinatorial and LP-based low bounds for NP-hard scheduling problems[J]. *Theoretical Computer Science*, 2006, 361(2/3): 241 – 256.

[5] SAVELSBERGH M W, UMA R, WEIN J. An experimental study of LP-based approximation algorithms for scheduling problems[J]. *Informs Journal on Computing*, 2005, 17(1): 123 – 136.

[6] AKKER J M, HURKENS C A J, SAVELSBERGH M W P. Time-indexed formulations for machine scheduling problems: column generation[J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2000, 12(2): 111 – 124.

[7] HALLAH R M, BULFIN R L. Minimizing the weighted number of tardy jobs on a single machine with release dates[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 176(2): 727 – 744.

[8] 杜晓宁, 席裕庚. 预测控制优化变量的集结策略[J]. 控制与决策, 2002, 17(5): 563 – 566.
(DU Xiaoning, XI Yugeng. Aggregation optimiztion strategy in model predictive control[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(5): 563 – 566.)

[9] 张群亮, 席裕庚. 基于线性集结的预测控制器[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 763 – 767.
(ZHANG Qunliang, XI Yugeng. Predictive controller based on linear aggregation[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 763 – 767.)

[10] GU H Y. Computation of approximate alpha-points for large scale single machine scheduling problem[J]. *Computers and Operations Research*, 2008, 35(12): 3262 – 3275.

作者简介:

左 燕 (1980—), 女, 博士, 副教授, 目前研究方向为优化调度、预测控制, E-mail: yzuo@hdu.edu.cn;

薛安克 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、信息融合、优化调度, E-mail: akxue@hdu.edu.cn;

王建中 (1963—), 男, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为复杂系统建模、优化调度, E-mail: wangjz@hdu.edu.cn.