

基于Takagi-Sugeno模糊双线性模型的连续搅拌反应釜 H_∞ 控制

陈 珺, 刘 飞

(轻工过程先进控制教育部重点实验室; 江南大学 自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

摘要: 本文研究了一类连续搅拌反应釜(CSTR)系统的 H_∞ 控制问题. 系统中的非线性动态特性可采用Takagi-Sugeno(T-S)模糊双线性模型进行描述. 通过引入两个自由矩阵, 给出一个新的保证闭环模糊双线性系统在 H_∞ 性能指标下全局渐近稳定的充分条件和控制器设计方法, 并且该条件最终可归结为求解一组线性矩阵不等式的可行性问题. CSTR系统的仿真结果表明设计方法的有效性.

关键词: 连续搅拌反应釜; T-S模糊双线性模型; H_∞ 控制; 自由矩阵变量; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

H-infinity control for continuous stirred tank reactor based on Takagi-Sugeno fuzzy bilinear models

CHEN Jun, LIU Fei

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry, Ministry of Education; Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: This paper is concerned with the H-infinity control for a class of continuous stirred tank reactor (CSTR) systems, in which the nonlinear dynamics are described by Takagi-Sugeno fuzzy bilinear models. By introducing two free matrix variables, we derive a new sufficient condition, in terms of linear matrix inequalities, of the global stability with a prescribed H-infinity performance level for the closed-loop fuzzy bilinear systems. The controller design method is also given. Simulation results of a CSTR system illustrate the effectiveness of the design method.

Key words: continuous stirred tank reactor (CSTR); Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy bilinear models; H-infinity control; free matrix variables; linear matrix inequalities (LMIs)

1 引言(Introduction)

在实际问题中, 许多非线性动态特性会呈现自然的控制变量与状态变量相乘的现象. 比如在化工生产过程中, 很多控制系统常采用物料流量作为其控制变量. 通过物料和能量平衡原理建立的描述对象动态特性的数学模型中往往会出现状态变量(如温度和浓度)与控制变量(流量)的乘积项, 由此产生了双线性系统的控制问题. 双线性系统是一类非常特殊的非线性系统, 其特殊性主要表现在: 第一, 虽然是非线性系统, 但与一般的非线性系统相比, 其结构简单, 易于处理; 第二, 对于一些特殊的非线性系统, 其描述对象的近似程度要比传统的线性系统高得多^[1]. 正是由于这种特殊性, 使得双线性系统在生物工程、化工过程、社会经济以及人口等领域获得了广泛的应用^[1-2].

对于非线性系统而言, 具有线性后件的T-S模糊模型^[3]被证实可以以任意精度有效逼近实际被控对象. 特别是与并行分布补偿(parallel distributed com-

pensation, PDC)算法^[4]和线性矩阵不等式(LMI)技术^[5]的结合, 使其成为非线性系统稳定性分析和控制器设计的一种有效处理方法, 并涌现出了一大批有益的研究成果^[6-8].

鉴于双线性系统的特殊性和T-S模糊模型的高度逼近的特点, 台湾学者Li T H S和Tsai S H将双线性系统和T-S模糊模型相结合, 提出了T-S模糊双线性模型^[9]. 该模型模糊规则的后件部分是一个双线性模型, 可用来近似一些用T-S模糊线性模型不能近似的非线性系统. 此后, 对T-S模糊双线性系统(fuzzy bilinear systems, FBS)的研究引起了学者的广泛关注^[10-13]. 文献[9]研究了一类连续FBS的稳定性问题, 并把结果推广应用到了时滞FBS中^[10], 文献[11-12]则讨论了一类离散FBS的 H_∞ 稳定问题, 文献[13]对多输入双线性系统进行了鲁棒 H_∞ 控制的探讨. 然而, 在这些结果中, 控制器的设计都依赖于对称正定的Lyapunov矩阵, 这或多或少会给结果带来一定的保守性.

基于上述原因, 本文研究一类连续FBS的H_∞控制问题. 首先, 利用T-S模糊双线性模型对一类非线性系统进行模糊建模. 然后, 采用PDC结构对每个局部双线性模型进行状态反馈控制器的设计. 基于Lyapunov稳定性理论, 通过引入两个自由矩阵, 给出保证闭环FBS全局渐近稳定的充分条件和控制器设计方法. 在该条件中, Lyapunov矩阵和系统矩阵的乘积关系被解除, 使得控制器的增益可以独立于Lyapunov矩阵设计, 并且控制器的求解最终可转化为一组线性矩阵不等式的凸优化问题. 最后, 以连续搅拌反应釜(continuous stirred tank reactor, CSTR)系统为例进行仿真研究, 结果表明该设计方法的有效性.

2 问题描述(Problem description)

考虑一类由T-S模糊双线性模型描述的非线性系统, 其第*i*条规则如下:

Plant Rule *i*: IF $v_1(t)$ is M_{i1} and \dots and $v_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + N_i \mathbf{x}(t) \mathbf{u}(t) + B_i \mathbf{u}(t) + D_{1i} \mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) = C_i \mathbf{x}(t) + D_{2i} \mathbf{w}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$ 分别为系统的状态向量、控制输入向量和被控输出向量, $\mathbf{w}(t) \in L_2^q[0, \infty)$ 为平方可积的干扰输入向量; $v_1(t), \dots, v_p(t)$ 为模糊规则的前件变量, $M_{ij} (j = 1, 2, \dots, p)$ 为模糊集合, r 为模糊推理规则数. $A_i, N_i, B_i, D_{1i}, C_i, D_{2i}$ 为具有适当维数的已知常数矩阵.

采用单点模糊化、乘积推理以及加权平均反模糊化的方法, 可得模糊双线性系统的整体方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{v}) [A_i \mathbf{x}(t) + N_i \mathbf{x}(t) \mathbf{u}(t) + B_i \mathbf{u}(t) + D_{1i} \mathbf{w}(t)], \\ \mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{v}) [C_i \mathbf{x}(t) + D_{2i} \mathbf{w}(t)], \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{v} = [v_1(t) \ v_2(t) \ \dots \ v_p(t)]^T$, 且

$$h_i(\mathbf{v}) = \frac{\mu_i(\mathbf{v})}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{v})}, \quad \mu_i(\mathbf{v}) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(v_j(t)),$$

其中: $M_{ij}(v_j(t))$ 为 $v_j(t)$ 关于模糊集合 M_{ij} 的隶属度函数, $\mu_i(\mathbf{v})$ 为第 i 条规则的隶属度.

一般, 假设 $\mu_i(\mathbf{v})$ 满足 $\mu_i(\mathbf{v}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r,$
 $\sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{v}) > 0$. 因此, 有

$$h_i(\mathbf{v}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{v}) = 1$$

成立.

假定系统状态可测, 根据PDC算法对系统(1)设

计局部状态反馈控制器, 控制规则如下:

Controller Rule *i*: IF $v_1(t)$ is M_{i1} and \dots and $v_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\rho K_i \mathbf{x}(t)}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t) K_i^T K_i \mathbf{x}(t)}}, \quad (3)$$

其中: $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i = 1, 2, \dots, r$ 为对应子系统的状态反馈增益矩阵, $\rho > 0$ 为待定标量. 于是整个模糊双线性系统的状态反馈控制律为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{v}) \frac{\rho K_i \mathbf{x}(t)}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t) K_i^T K_i \mathbf{x}(t)}} = \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{v}) \cdot \rho \cdot \sin \theta_i = \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{v}) \cdot \rho \cdot \cos \theta_i \cdot K_i \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\begin{cases} \sin \theta_i = \frac{K_i \mathbf{x}(t)}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t) K_i^T K_i \mathbf{x}(t)}}, \\ \cos \theta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t) K_i^T K_i \mathbf{x}(t)}}. \end{cases}$$

为简化表述, 令 $h_i = h_i(\mathbf{v}), h_j = h_j(\mathbf{v})$. 将状态反馈控制律(4)代入系统(2)中, 可得整个闭环模糊双线性系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [A_{ij} \mathbf{x}(t) + D_{1i} \mathbf{w}(t)], \\ \mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^r h_i [C_i \mathbf{x}(t) + D_{2i} \mathbf{w}(t)], \end{cases} \quad (5)$$

式中 $A_{ij} = A_i + \rho N_i \sin \theta_j + \rho B_i K_j \cos \theta_j$.

本文研究的问题可描述为: 对于给定的模糊双线性系统(2)和常数 $\gamma > 0$, 确定状态反馈控制器(4), 使得闭环模糊双线性系统(5)满足以下两个条件:

1) 当 $\mathbf{w}(t) = 0$ 时, 闭环模糊双线性系统(5)是渐近稳定的;

2) 在零初始条件下, 对于任意非零向量 $\mathbf{w}(t) \in L_2^q[0, \infty)$, 系统的被控输出 $\mathbf{z}(t)$ 满足

$$\|\mathbf{z}(t)\|_2 < \gamma \|\mathbf{w}(t)\|_2.$$

3 稳定性分析及控制器设计(Stability analysis and controller design)

本节首先给出闭环模糊双线性系统(5)在H_∞性能指标 γ 下渐近稳定的充分条件.

定理 1 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 闭环模糊双线性系统(5)是渐近稳定的, 且满足H_∞性能指标 γ , 则存在对称正定矩阵 P , 使得下列矩阵不等式成立:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} A_{ij}^T P + P A_{ij} & P D_{1i} & C_i^T \\ D_{1i}^T P & -\gamma^2 I & D_{2i}^T \\ C_i & D_{2i} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

证 选取Lyapunov函数

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t),$$

其中 P 为对称正定矩阵. 由连续系统的有界实引理易证结论成立. 证毕.

以下通过引入两个自由矩阵, 给出一种新的系统渐近稳定的分析方法. 自由矩阵的引入解除了系统矩阵和Lyapunov矩阵之间的耦合关系, 使得控制器增益可以独立于Lyapunov矩阵进行设计.

定理 2 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 闭环模糊双线性系统(5)是渐近稳定的, 且满足 H_∞ 性能指标 γ , 如果存在对称正定矩阵 P 和矩阵 F, G , 使得下列矩阵不等式成立.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 & FD_{1i} & C_i^T \\ * & -G - G^T & G^T D_{1i} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{2i}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

其中:

$$\mathcal{F}_1 = A_{ij}^T F^T + F A_{ij}, \mathcal{F}_2 = P - F + A_{ij}^T G.$$

证 令

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & A_{ij}^T & 0 & 0 \\ 0 & D_{1i}^T & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T,$$

对矩阵不等式(7)左乘 Γ^T 和右乘 Γ , 即可得到矩阵不等式(6). 证毕.

为了得到控制器增益, 在定理2的基础上, 将模糊双线性系统的渐近稳定条件转化为一组线性矩阵不等式的可行性问题. 在此之前, 先给出定理证明中要用到的引理^[7].

引理 1 给定具有适当维数的矩阵 X 和 Y , 则存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y.$$

定理 3 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 闭环模糊双线性系统(5)是渐近稳定的, 且满足 H_∞ 性能指标 γ , 则存在正数 $\varepsilon_{ij} > 0$, 矩阵 $\tilde{P}, \tilde{F}, \tilde{G}$ 和矩阵 $Y_i, i, j = 1, 2, \dots, r$, 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ii} & \tilde{F} N_i^T & Y_i^T B_i^T \\ * & -\varepsilon_{ii} I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_{ii} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ij} + \Theta_{ji} & \tilde{F} N_i^T & \tilde{F} N_j^T & Y_j^T B_i^T & Y_i^T B_j^T \\ * & -\varepsilon_{ij} I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_{ji} I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_{ij} I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_{ji} I \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$i < j, i, j = 1, 2, \dots, r,$

式中:

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} \Theta_{1ij} & \tilde{P} - \tilde{G} + \tilde{F} A_i^T + \varepsilon_{ij} \rho^2 I & D_{1i} & \tilde{F} C_i^T \\ * & -\tilde{G}^T - \tilde{G} + \varepsilon_{ij} \rho^2 I & D_{1i} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{2i}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{1ij} = A_i \tilde{F}^T + \tilde{F} A_i^T + \varepsilon_{ij} \rho^2 I.$$

证 将 $A_{ij} = A_i + \rho N_i \sin \theta_j + \rho B_i K_j \cos \theta_j$ 代入矩阵不等式(7), 整理得到

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [\Xi_{ij} + \Pi_1^T \Pi_2 + \Pi_2^T \Pi_1 + \Phi_1^T \Phi_2 + \Phi_2^T \Phi_1] < 0, \quad (10)$$

式中:

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} A_i^T F^T + F A_i & P - F + A_i^T G & F D_{1i} & C_i^T \\ * & -G - G^T & G^T D_{1i} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{2i}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Pi_1 = [\rho F^T \sin \theta_j \quad \rho G \sin \theta_j \quad 0 \quad 0],$$

$$\Pi_2 = [N_i \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\Phi_1 = [\rho F^T \cos \theta_j \quad \rho G \cos \theta_j \quad 0 \quad 0],$$

$$\Phi_2 = [B_i K_j \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

由引理1可知, 存在标量 $\varepsilon_{ij} > 0, i, j = 1, 2, \dots, r$, 使得

$$\Pi_1^T \Pi_2 + \Pi_2^T \Pi_1 + \Phi_1^T \Phi_2 + \Phi_2^T \Phi_1 \leq \varepsilon_{ij} \Pi_1^T \Pi_1 + \varepsilon_{ij}^{-1} \Pi_2^T \Pi_2 + \varepsilon_{ij} \Phi_1^T \Phi_1 + \varepsilon_{ij}^{-1} \Phi_2^T \Phi_2.$$

将上述不等式关系代入矩阵不等式(10)中, 整理可得

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} \Psi_{1ij} & \Psi_{2ij} & F D_{1i} & C_i^T \\ * & \Psi_{3ij} & G^T D_{1i} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{2i}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

式中:

$$\Psi_{1ij} = A_i^T F^T + F A_i + \varepsilon_{ij} \rho^2 F F^T +$$

$$\varepsilon_{ij}^{-1} N_i^T N_i + \varepsilon_{ij}^{-1} K_j^T B_i^T B_i K_j,$$

$$\Psi_{2ij} = P - F + A_i^T G + \varepsilon_{ij} \rho^2 F G,$$

$$\Psi_{3ij} = -G - G^T + \varepsilon_{ij} \rho^2 G^T G,$$

即矩阵不等式(11)保证了矩阵不等式(10)的成立.

对矩阵不等式(11)两边同时左乘矩阵 $\text{diag}\{F^{-1}, G^{-T}, I, I\}$ 和右乘其转置, 并令 $\tilde{F} = F^{-1}, \tilde{G} = G^{-1}, \tilde{P} = \tilde{F} P \tilde{G}, Y_j = K_j \tilde{F}^T, j = 1, 2, \dots, r$, 则矩阵不等式(11)转化为

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \tilde{\Xi}_{ij} = \sum_{i=1}^r h_i^2 \tilde{\Xi}_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i h_j (\tilde{\Xi}_{ij} + \tilde{\Xi}_{ji}) < 0,$$

式中:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{ij} &= \Theta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{-1} \Omega_1 \Omega_1^T + \varepsilon_{ij}^{-1} \Omega_2 \Omega_2^T, \\ \Omega_1 &= [N_i \tilde{F}^T \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \Omega_2 &= [B_i Y_j \ 0 \ 0 \ 0]^T. \end{aligned}$$

对上述矩阵不等式应用Schur补引理, 即可得到线性矩阵不等式组(8)和(9). 证毕.

综上, 控制器的求解步骤归纳如下:

1) 求解定理3中的LMIs(8)和(9), 如果问题可行, 则可得到矩阵 \tilde{F} 和 $Y_i, i = 1, 2, \dots, r$;

2) 根据变量关系 $Y_i = K_i \tilde{F}^T$, 闭环模糊双线性系统(5)的局部状态反馈控制器增益为

$$K_i = Y_i \tilde{F}^{-T}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (12)$$

3) 将求解得到的局部状态反馈增益 K_i 代入表达式(4)中, 整理可得用于控制系统的总体控制器形式.

由此可见, 控制器增益(12)独立于Lyapunov矩阵, 只和引入的自由矩阵有关, 解除了Lyapunov矩阵对称正定的束缚.

进一步, 若令 $\gamma^2 = \beta$, 通过求解以下优化问题还可得到的最优解, 即

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta \\ \text{s.t.} \quad & \text{LMIs (8) 和 (9)}. \end{aligned} \quad (13)$$

此时, 对应的控制器称为最优H_∞控制器.

4 数值示例(Numerical example)

连续搅拌反应釜(CSTR)是实现聚合反应的一种广泛使用的化学反应器, 在石油、医药、试剂、食品以及合成材料等工业生产过程中占有相当重要的地位. 由于过程本身存在明显的非线性特征, 因此控制起来非常困难, 常规方法难以取得令人满意的效果. 为了验证本文方法的可行性, 以下将应用上述方法对CSTR系统进行仿真研究. CSTR状态方程^[11]如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -k_1 x_1(t) - k_3 x_1^2(t) + \\ \quad u(t)(C_{A0} - x_1(t)) - 5w(t), \\ \dot{x}_2(t) = k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) - \\ \quad u(t)x_2(t) + 15w(t), \end{cases} \quad (14)$$

其中: $x_1(t)$ 为反应釜中反应物的浓度(mol/L), $x_2(t)$ 为生成物的浓度(mol/L), 控制输入 $u(t)$ 为稀释比例(h⁻¹). 系统中动力参数选取为

$$\begin{aligned} k_1 &= 50 \text{ h}^{-1}, \quad k_2 = 100 \text{ h}^{-1}, \\ k_3 &= 10 \text{ L}/(\text{mol} \cdot \text{h}), \quad C_{A0} = 10 \text{ mol/L}. \end{aligned}$$

假设 $x_1(t) \in [0, 10]$, 采用两个T-S模糊双线性模型来逼近CSTR系统(14), 即

Rule 1: IF $x_1(t)$ is about 0, THEN

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A_1 \boldsymbol{x}(t) + N_1 \boldsymbol{x}(t) \boldsymbol{u}(t) + B_1 \boldsymbol{u}(t) + D_{11} \boldsymbol{w}(t), \\ \boldsymbol{z}(t) &= C_1 \boldsymbol{x}(t) + D_{21} \boldsymbol{w}(t). \end{aligned}$$

Rule 2: IF $x_1(t)$ is about 10, THEN

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A_2 \boldsymbol{x}(t) + N_2 \boldsymbol{x}(t) \boldsymbol{u}(t) + B_2 \boldsymbol{u}(t) + D_{12} \boldsymbol{w}(t), \\ \boldsymbol{z}(t) &= C_2 \boldsymbol{x}(t) + D_{22} \boldsymbol{w}(t). \end{aligned}$$

其中系统参数矩阵如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -50 & 0 \\ 50 & -100 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -150 & 0 \\ 50 & -100 \end{bmatrix}, \\ N_1 = N_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ D_{11} = D_{12} &= [-5 \ 15]^T, \quad C_1 = C_2 = [0 \ 1], \\ D_{21} = D_{22} &= 0. \end{aligned}$$

对应规则的模糊隶属度函数为

$$h_1(x_1(t)) = 1 - 0.1x_1(t), \quad h_1(x_2(t)) = 0.1x_1(t).$$

给定H_∞性能指标 $\gamma = 0.8, \rho = 0.5$, 选取控制器增益 $K_1 = [-0.5 \ -0.8], K_2 = [-2.5 \ -1.5]$. 求解LMIs(8)和(9), 可找到与之对应的可行解

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 10.2544 & 4.7797 \\ -0.4989 & 9.3795 \end{bmatrix}.$$

进一步, 求解优化问题(13), 可得 $\gamma_{\min} = 0.0197$.

为便于比较, 取系统(14)的一个平衡点

$$\boldsymbol{x}_d = [4.5 \ 1.266]^T, \quad u_d = 77.7272.$$

则此时控制器结构变换为

$$\Delta u(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) \frac{\rho K_i \Delta \boldsymbol{x}(t)}{\sqrt{1 + \Delta \boldsymbol{x}^T(t) K_i^T K_i \Delta \boldsymbol{x}(t)}}, \quad (15)$$

其中: $\Delta u(t) = u(t) - u_d, \Delta \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_d$.

假设干扰

$$\boldsymbol{w}(t) = e^{-t} \cdot \sin(5t), \quad t > 0,$$

将上述控制器应用于CSTR系统(14), 图1和图2分别给出了该系统在初始条件 $\boldsymbol{x}_0 = [5.5 \ -1.8]^T$ 下的状态响应和与之对应的控制曲线.

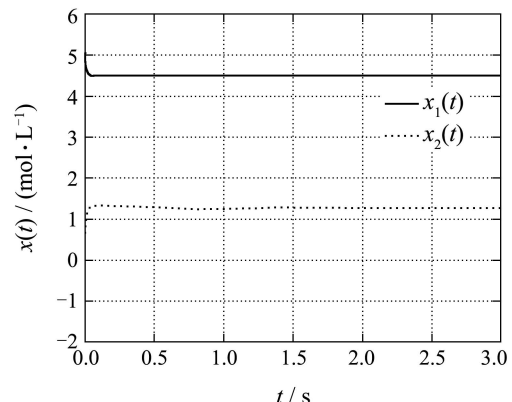


图1 系统的状态响应曲线

Fig. 1 State responses of system

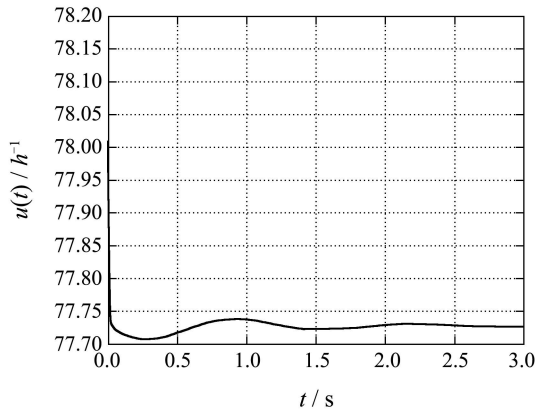


图2 系统的控制曲线
Fig. 2 Control curve of system

由仿真结果可以看出,在控制器(15)的作用下,状态响应经过短暂的过渡过程后均能维持在给定的平衡点 $\boldsymbol{x}_d = [4.5 \ 1.266]^T$ 附近,因此所设计的控制器可以保证FBS是渐近稳定的.对比文献[9,11]可知,文献[9]没有考虑干扰对系统的影响,而本文在干扰存在的情况下仍能取得较快的响应时间和较好的过渡过程特性;在相同初始条件下,文献[11]给出的状态曲线波动较大且响应时间较长,需要35s才能使系统到达所给的平衡点附近,而本文只需3s就能满足要求;此外,这两篇文献均采用了5条模糊规则对CSTR系统进行建模,而本文只采用了两条模糊规则,同样可使系统获得良好的响应效果.

进一步,假定系数矩阵 A_1 和 A_2 中的某些参数有10%的波动,即

$$A_1 = \begin{bmatrix} -50 + a & 0 \\ 50 & -100 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -150 + b & 0 \\ 50 & -100 \end{bmatrix},$$

其中: $a \in [-5, 5]$, $b \in [-15, 15]$,仍取相同的控制器增益求解LMIs(8)和(9).那么当参数 a 和 b 分别以步长1变化时,对于每一对 (a, b) ,LMIs(8)和(9)均可行.也就是说,当系统矩阵在给定的范围内波动时,用控制器(15)控制系统都适用,由此说明所设计的控制器(15)具有一定的鲁棒性.

5 结论(Conclusion)

本文以连续CSTR系统为研究对象,利用T-S模糊双线性模型对其进行建模.通过引入两个自由矩阵,给出一个新的保证闭环FBS全局渐近稳定的分析方法.自由矩阵的引入解除了Lyapunov矩阵和系统矩阵之间的耦合关系,使得控制器的设计不再只依赖于Lyapunov矩阵对称正定的条件.文中的结果最终

可全部归结为一组线性矩阵不等式的可行性问题,并通过仿真研究,验证了本文方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] MOHLER R R. *Bilinear Control Processes*[M]. New York: Academic, 1973: 1 – 20.
- [2] MOHLER R R. *Nonlinear Systems: Application to Bilinear Control*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991: 1 – 14.
- [3] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [4] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M F. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model[C] // *Proceedings of International Joint Conference of the 4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems and the 2nd International Fuzzy Engineering Symposium*. New York: IEEE, 1995: 531 – 538.
- [5] BOYD S, GHAOUIL E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [6] TANAKA K, WANG H O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: a Linear Matrix Inequality Approach*[M]. New York: Wiley, 2001: 1 – 82.
- [7] XU S, LAM J. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(1): 82 – 93.
- [8] JIANG X, HAN Q L. Robust H_∞ control for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with interval time-varying delay[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(2): 321 – 331.
- [9] LI T H S, TSAI S H. T-S fuzzy bilinear model and fuzzy controller design for a class of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(3): 494 – 506.
- [10] TSAI S H, LI T H S. Robust fuzzy control of a class fuzzy bilinear systems with time-delay[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 39(5): 2028 – 2040.
- [11] LI T H S, TSAI S H, LEE J Z, et al. Robust H_∞ fuzzy control for a class of uncertain discrete fuzzy bilinear systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 2008, 38(2): 510 – 527.
- [12] TSAI S H, HSIAO M Y, TSAI K L. LMI-based fuzzy control for a class of time-delay discrete fuzzy bilinear system[C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. New York: IEEE, 2009: 796 – 801.
- [13] 李俊民, 张果, 杜彩霞. 一类不确定多输入模糊双线性系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(11): 1298 – 1302. (LI Junmin, ZHANG Guo, DU Caixia. Robust H-infinity control for a class of multiple input fuzzy bilinear system with uncertainties[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(11): 1298 – 1302.)

作者简介:

陈 珺 (1980—), 女, 博士, 副教授, 目前研究领域为模糊控制理论及工业过程应用, E-mail: chenjun1860@126.com;

刘 飞 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为先进控制理论及应用、工业系统监控与诊断等, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn.