第8卷第3期
1991年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 3
Sept., 1991

离散事件动态系统的代数理论及其应用
——现状与展望

刘　克　沈美娥
(北京科技大学自动化系)

郑应平
(中国科学院自动化所,北京)

摘要: 确定性、无决策的离散事件动态系统(DEDS)可以表述为代数系 Dioid 上的线性模型并由此进行一些有效的分析. 本文首先对 Dioid 理论做了简单介绍,综述了 Dioid 上发展起来的系统论及控制论的研究成果,对代数方法在计算机集成制造系统(CIMS)中的应用、现存问题和发展方向进行了探讨.

关键词: Dioid 理论;极大代数;线性模型;特征值;Petri 网;生产系统;缓冲区;托盘;决策;随机性

1 概　述

离散事件动态系统的进程由离散时刻发生的事件所驱动,其动态特性难以用传统的微分方程或差分方程来描述,同时也缺乏其它的数学工具来进行有效的描述和分析,这种状况激发了学者们从不同的角度来研究和探讨这类系统并取得了一些可喜的结果,已有的方法包括自动机理论、Petri 网理论、极大代数方法、摄动分析法、排队网络理论以及纯仿真的方法,各种方法在不同的层次和角度上具有分析上的优越性并且随着时间的延续在不断地互相渗透和融合.

极大代数是一个定义了两种运算并满足一定条件的集合,其中$\oplus$(取大)运算较好地描述了事件对其前向事件的等待与比较的关系,而$\otimes$(加法)运算则比较好地对应了系统随时间的递增而逐步深入的进程,还由于在极大代数上建立的线性模型与经典的线性系统模型有较好的平行相似性,使得这种方法受到不少学者的重视并期待着得到一些与经典线性系统理论相平行的结论. 事实上早在1962年[1]中就指出了极大代数在工业过程分析中的一些应用前景,只是在近些年来 DEDS 逐渐变为一个清晰的概念时其应用研究才有突破[2].

Petri 网作为一种图形建模工具用来描述和分析 DEDS 的并发、异步、分布并行、不确定性和随机性等特征具有一定的优越性,无冲突、无竞争的一类 Petri 网称为事件图,附上转换持续时间即为计时的事件图,这一部分 Petri 网可以转述为极大代数上的线性模型,进一步的研究结果表明,事件图所能描述的一类 DEDS 在各种 Dioid 上均有线性表述,因此本文先简单介绍一些有关 Dioid 的理论.

2 Dioid(双子)理论

2.1 Dioid 理论简介

集合 D 上定义两个内部运算$\oplus$和$\otimes$,满足以下条件则为一个 Dioid.

本文于1990年11月16日收到. 1991年7月5日收到修改稿.

1° 结合律 $\forall\ a,b,c\in D,(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c),(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$

2° 加法交换律 $\forall\ a,b\in D,a\oplus b=b\oplus a$

3° 分配律 $\forall\ a,b,c\in D,(a\oplus b)\otimes c=(a\otimes c)\oplus(b\otimes c),c\otimes(a\oplus b)=(c\otimes a)\oplus(c\otimes b)$

4° 零元与幺元 $\exists\ \varepsilon\in D:\forall\ a\in D,a\oplus\varepsilon=a$ $\exists\ e\in D:\forall\ a\in D,a\otimes e=e\otimes a=a$

5° 零元吸收 $\forall\ a\in D,a\otimes\varepsilon=\varepsilon\otimes a=\varepsilon$

6° 加法幂等律 $\forall\ a\in D,a\oplus a=a$

关于 Dioid 如何通过增加一些条件和增加运算($\wedge$)而逐渐构成一个近似格的代数系以及一些重要性质,[3]中有较详尽的叙述,这里不再赘述.总的来说,Dioid 理论中的难点在于$\oplus$运算不存在逆运算,致使在一般代数系里很容易求解的一些线性方程(组)在 Dioid 里就变得比较复杂.

对于一般线性方程 $ax\oplus b=cx\oplus d$,要研究的仍然是两个基本问题:1)解的存在性及条件,2)解或通解的表达.为此[3]中引入了除法及特定变换来进行求解,基本指导思想是利用不等式的解的集合去逼近等式的解,这里,不等式中的$\leqslant$系指 Dioid 上的一种偏序关系.

1.方程 $ax\oplus b=c$ 的解

满足 $ax\oplus b\leqslant c$ 的 x 称为方程的一个次解,当且仅当 $b\leqslant c$ 时,次解集合非空并有一上界,这个上界也是方程 $ax=c$ 的最大次解.

2.方程 $x=ax\oplus b$ 的解

a^*b 是方程的最小解,对所有的解 x,有 $x=a^*x$ 成立,x 可以表示为 $y\oplus a^*b$,y 是方程的一个解.

3.齐次方程 $x=ax$ 和 $X=AX$ 的解

标量情况下的解可以表述为:如果 a 可以写成可逆元素$\{a_k|k=1,\cdots,p\}$的有限和,则 $x=\bigoplus\limits_{k=1}^{p}a_k^{\#}y_ka^*$,$y_k$ 是 D 上的任意元素,$a^{\#}=a\otimes a^*=a^*\otimes a$.

矢量情况下的解可以表述为 $X=\bigoplus\limits_{K\in\Gamma}w_K^{\#}y_K(A^*)_{i_K}$,$\Gamma$ 是 A 对应的图中的基本回路集合,对任意回路 $K\in\Gamma$,权重 w_K 可逆,y_K 是 D 上任意元素,$(A^*)_{i_K}$是 A^* 的第 i_K 列,i_K 为回路 K 上的任意节点.

4.方程 $x=ax\oplus xb\oplus c$ 的解

a^*cb^*是其最小解.

2.2 极大代数

若令 $D=\overline{R}=R\cup\{-\infty\}$,且定义

$$a\oplus b\triangleq\max(a,b),\quad a\otimes b\triangleq a+b,\quad\forall\ a,b\in\overline{R}$$

则$(\overline{R},\max,+)$称为极大代数,若$\oplus$定义为取小运算则称为极小代数.

在极大代数上有一些重要的理论结果,[4]中证明了 Cramer 法则的对等情况,行列式在极大代数中的平行概念是主导式,记为 $\mathrm{dom}(A)$,比较容易理解的算法是:

$$\mathrm{dom}(A)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\ln|\det(\exp(sA))|.$$

s 是一个实参数.对于线性方程 $AX=B$ 来说,当矩阵 A 及 $A_i(i=1,\cdots,n)$满足一定条件时有

$$x_i = \frac{\mathrm{dom}(A_i)}{\mathrm{dom}(A)}.$$

这是解存在的一个充分条件.

[4]中还证明了极大代数上 Cayley-Hamilton 定理的对等情况，即任意矩阵 A 都满足其特征方程

$$\lambda^n \oplus \sum_{k\in N} C^*_{n-k}\lambda^{n-k} = C^*_{n-1}\lambda^{n-1} \oplus \sum_{k\in \bar{N}} C^*_{n-k}\lambda^{n-k}.$$

C^*_i 由 A 得来，上式分为两部分是因为没有减运算，将各项按系数的正负分放方程两边. 上式的标量解称为 A 的特征值.

3　系统论与控制论

3.1　极大代数上的线性模型及分析

用计时事件图所描述的一类 $DEDS$ 可以表述为如下的线性模型

$$\xi(n) = F\xi(n-1) \oplus GU(n),$$
$$Y(n) = H\xi(n).$$

$U(n)$是第 n 批资源的最早可得到时间，$Y(n)$是系统释放第 n 批资源的最早时间，状态变量的最初定义是事件第 n 次发生的最早开始时间，当事件图中的某些库所(place)包含多于一个的令牌(token)时，相应的状态方程包含多步延迟项，经过一定的变换后才能形如上式，这时 $\xi(n)$不全是原来意义上的事件开始的最早时间，$\xi(n)$的最大维数与事件图的初始令牌数相同，最小维数问题尚未解决[5].

由前式得到输入输出表达式：

$$Y(z) = H(z^{-1}F)^*GU(z).$$

这里，$(z^{-1}F)^* = E\oplus z^{-1}F\oplus z^{-2}F^2\oplus\cdots$，$H(z^{-1}F)^*G$ 是系统的“脉冲响应”的变换，即传递函数或传输矩阵.

建模问题的反问题是如何根据系统的脉冲响应求系统的最小实现，[6]中对单输入单输出的情况给出了结果，已知脉冲响应$\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$，定义 Hankel 矩阵 H：

$$H = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots \\ g_2 & g_3 & g_4 & \cdots \\ g_3 & g_4 & g_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

H 中相邻列(或行)中线性相关的最小数 n 所对应的实现为最小实现，最小实现的参数矩阵可相应求出. 因为不同的系统可能对应着相同的脉冲响应，这种实现是非唯一的.

对于一般的确定性、无决策的生产系统，可建立如下的状态方程：

$$X(n) = AX(n) \oplus BU(n),$$
$$Y(n) = CX(n).$$

此时 $X(n)$中的元素对应着系统中各事件第 n 次活动的最早开始时间，取反馈律 $U(n) = KY(n-1)$，即构成闭环动态系统，输出的递推式是

$$Y(n) = MY(n-1), \qquad M = CA^*BK.$$

矩阵 M 的特征值对应于图 $G(M)$中关键回路的平均权重，是系统稳态输出率的表

征.它是极大代数方法中一个十分重要的概念,其个数及有效求解是分析与应用中的重要问题.

Karp[7]提供了一个十分有效的算法:

$$\forall\ i,\quad \lambda = \max_{j=1,N}\ \min_{0\leqslant k\leqslant N-1} \frac{M_{ij}^{N}-M_{ij}^{k}}{N-k}.$$

[8]中提供了一个直观的有效算法:

$$\lambda = \mathrm{tr}[M \oplus \frac{M^2}{2} \oplus \cdots \oplus \frac{M^n}{n}].$$

当 M 为不可约矩阵,即 $G(M)$ 是一个强连通图时,有唯一特征根.[5]中指出当 $G(M)$ 包含两个强连通的子图时,将根据两个强连通子图的相对位置而表现为一个或两个特征值.[9]中利用矩阵变换及图论的一些结果讨论了多个强连通图的情况并给出了相应的结论.

与特征值相对应的是特征向量,即满足 $\lambda V=MV$ 的向量 V,当系统的初态取为特征向量时可以不经过瞬态过程而直接进入周期稳态.关于特征向量集合的维数问题,[5]中给出结果:如果 M 的关键图 $G_c(M)$ 包含 K 个连通部分,则特征向量集合具有 K 维.[10]中把初始状态空间进行了划分,不同空间区域里的初值对应于以不同的拍数进入周期稳态.

关于系统稳定性的概念各种文献都有一个比较相同的观点,即当且仅当存在一个 λ 使得对所有的初始条件和所有的 i 有

$$\lim_{n\to\infty}(x_i(n))^{\frac{1}{n}} = \lambda$$

系统才是稳定的,这个概念的物理意义很明确,稳定系统中各事件的发生必须有相同节奏.而对系统的可控性和可观性的研究还很不够,[5]中给出了一个初步的定义:当且仅当系统的每个内部变迁(非输入、输出变迁)与某个输入变迁相连时,系统是可控的;与某个输出变迁相连时,系统是可观的.[11]和[12]中对系统的可控性定义做了进一步的阐述并给出了系统完全可控的充要条件,[12]中还讨论了可观性的定义及条件.

[5]中提到过利用反馈来镇定系统,这类似于极点配置问题,由于反馈回路的出现,系统具有更强的连通性和更好的稳定性,但代价是要增加一些资源,如何用最少的资源达到最佳效果是一个有待研究的问题.

随机系统的研究是确定性的代数模型走向实用化的重要一步,作为第一步的工作,[13]中对参数发生摄动时系统稳态效率的变化给出了估计式,[14]和[15]中利用代数工具对摄动分析进行了研究和验证.[16]中在假设模型中参数为同分布的随机量的情况下,对状态周期的存在性及概率分布做了初步的尝试.文中对模型进行了降维处理,实际上研究的是一维的情况,递推已是十分艰难.

随着系统规模的增加,分解(以至降维)与综合问题也将成为一个研究内容[17].

3.2 两维代数系 min max《γ,δ》

[18]中又将极大代数发展为两维的代数系 min max《γ,δ》,这也是一个特定的双子,引入了两个标准变量 γ 与 δ 分别作为次数与时间的后移算子.这样,1)事件活动次数成为一个显式变量参加运算并相对取小,2)事件持续时间被分为若干基本时间单位而以 δ 代替.此时在时间-事件平面上的一个点 (n,t) 是一个等价类的代表,等价类的其它元素是点 (n,t) 右下方的锥形区域里的所有点集.一条信息 $\gamma^n\delta^t$ 被解释为:t 时刻事件发生的最多可

能次数为 n，或事件第 n 次发生的最早可能时间为 t. 信息合成的规则是

$$\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^{n'}\delta^t = \gamma^{\min(n,n')}\delta^t,$$

$$\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^n\delta^{t'} = \gamma^n\delta^{\max(t,t')}.$$

状态方程改写为

$$X(\gamma,\delta) = A(\gamma,\delta)X(\gamma,\delta) \oplus B(\gamma,\delta)U(\gamma,\delta), \quad Y(\gamma,\delta) = C(\gamma,\delta)X(\gamma,\delta).$$

在这种新的代数系上重新定义了矩阵的有理性、可实现性和周期性，其中，可实现性的具体表述是矩阵 H 可写为如下形式（充要条件）：

$$H = C(\gamma A_1 \oplus \delta A_2)^* B.$$

而任一元素 h 是周期性的充要条件是存在有限非负整数 v,τ,r,s（r,s 不全为零）使得 h 可以写为

$$h = P_{v-1,\tau-1} \oplus [\gamma^v\delta^\tau \otimes Q_{r-1,s-1} \otimes (\gamma^r\delta^s)^*].$$

式中 P 和 Q 均是多项式，下标分别表示 γ 与 δ 的（非负）最高指数.

[3]中证明了这三个概念的等价性，同时重述了一维情况下的某些重要结果（如特征值问题），但至今为止尚没有新的重要结果出现.

3.3 有限递推过程模型（FRP）

作为逻辑级的新的代数模型，[19]中建立了一种有限递推过程模型，起源于[20]的确定性过程理论，与有限状态机有一定的相似性. 这里，过程 P 是用一个三元组（$trP, \alpha P, \tau P$）来描述的，三元组分别是：过程的轨迹集合、事件函数和终结函数. 对状态转移函数 f 定义了五种运算（包括串联、并联等运算）并讨论了相应的一些性质.

一个有限递推过程模型 Y 可以表述为

$$X = f(X), \quad Y = g(X).$$

任意的 Petri 网均可表述为一个有限递推过程，较之以往的有限状态机模型，有限递推过程模型具有描述简洁、分析及实施方便等特点.

4 在柔性生产系统分析中的应用

极大代数上的线性模型较多地用来分析确定性的生产系统，能方便地分析出系统的稳态运行效率及其它一些性能指标，从而对生产系统进行评估. 应该说，这种模型还比较理想化和简单化，用它来分析实际的生产系统还需要附加一些因素. 有限缓冲区及堵塞的发生就是一个必须考虑的问题，已有不少文章针对一些具体系统（如串行生产系统）把有限缓冲区的影响写入线性模型中并得到一些结果[21,22]，但在系统性与普遍性方面还有待深化，如何有效地寻求特定系统的最佳缓冲区容量应该是这种研究的目标.

托盘的配置数目也是一个应该研究的实际问题，已有文章将托盘对系统运行的影响写入线性方程，但随之而来的是状态维数的增大或者方程延迟阶数的增加，给分析造成不便. [23]中对系统中专用托盘的最少投入数目给出了一个算法.

作为复杂生产系统的分解与综合的第一步工作，[23]、[24]中对一些基本的生产系统（如串行生产线、装配线及拆卸线）的周期行为及相应的控制律进行了研究，而系统的分解与综合在概念上和方法上都有待进一步探讨.

5 现存问题及发展方向

除了前面提到的一些应用中的问题外，代数方法还要面临两个很突出的问题.

1)如何解决有决策部分的描述和分析.例如先到先服务的排队规则,这种自然性的决策过程应该能够通过一定的运算来实现迭代,当然,如果因为增加了运算或是记录了更多的信息而失去了模型的线性性也是得不偿失的,退一步说,能否以有决策部分作为分解的环节而在系统的分解与综合方面寻求一些解决途径应该是一个值得考虑的问题.前面曾经提到有的文章利用极大代数方法研究摄动问题,在解决有决策部分的描述和分析以前,这种研究只能是对确定相似意义下的摄动分析(IPA)进行代数表述和计算而难以做更深一步的工作.

2)如何进行随机系统的研究和分析.代数方法涉及较多的状态与矩阵的迭代过程,随着系统运行的深入,随机参数之间的相互作用变得越来越复杂以至于不能进行有效的分析,因此随机系统的运行情况的研究渴望着从一种全新的角度来进行,这是实用化的重要一步.[16]中假设服务时间为负指数分布,只是为了计算上的简化,实际的服务时间大多服从Γ分布、韦伯分布、β分布和对数正态分布,这些分布类型无疑加重了理论分析的负担,必要时不妨借助于仿真手段来做定性和定量研究,从一些初步结果来看,系统状态并不因服务参数的随机化而发散,而是与相应的确定系统有着较好的贴近度,这对系统状态的随机估计和控制无疑是有益的.除了服务时间的随机性以外,系统的随机性还包括顾客到达的随机性和路径选择的随机性,对后两类随机性的研究与1)密切相关,这是更深一层的研究内容了.

另外,作为与经典的线性系统理论有许多相类之处的理论体系,一些对等的概念如可控性、可观性及反馈镇定等问题还有待深化,例如可控性问题,从经典控制论中移植过来的控制概念未免有些狭窄,以一个生产系统为例,控制至少要包含这样三个内容:①工件的排序,②工件路径的静态调度与动态调度,③工件到达时间与机器开关时间的控制.目前在代数模型之上研究的控制与可控性问题(U与X的关系)大多局限在③上,同样,可观性的意义、定义及实现方法也是个有待研究的问题,相信在不远的将来这些问题都会逐步得到解决.

离散事件动态系统理论是近年来控制理论中一个很活跃的分支,新文章出现的速度很快,本文在综述代数方法及其重要结果时难免会有理解上的偏差和总结上的疏漏,相信读者会有所考虑.

参考文献

[1] Cuninghame-Green, R. A.. Describing Industrial Processes and Approximating Their Steady-State Behavior. Opt. Res. Quart., 1962, 13: 95—100

[2] Cohen, G. et al. A Linear-System-Theoretic View of Discrete-Event Processes and Its Use for performance Evaluation in Manufacturing. IEEE Trans., 1985, AC-30(3): 210—220

[3] Cohen, G. et al. Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. Proc. IEEE DEDS, 1989, 77(1): 39—58

[4] Olsder, G. J. et al. Cramer and Cayley-Hamilton in the Max-algebra. Linear Algebra and Its Applications, 1988, 101: 87—108

[5] Cohen, G. et al. Linear System Theory for Discrete Event System. 23rd IEEE CDC, Las Vegas, NV, 1984, 539—544

[6] Olsder, G. J.. Some Results on the Minial Realization of Discrete-Event Dynamic Systems. 25rd IEEE CDC, Athens Greece, 1986
[7] Karp, R. M.. A Characterization of the Minimum Cycle Mean in A Diagraph. Discrete Math., 1987, 23: 309—311
[8] 王龙,郑大钟. 极大代数上的线性系统理论. 离散事件动态系统理论及其在 CIMS 中的应用学术会议论文集,北京,1988,79—87
[9] 陈文德,齐向东,邓述慧. 离散事件系统的周期分析. 控制理论及其应用年会论文集,1989
[10] 李彦平,王梅生,徐心和. 离散事件动态系统的稳态分析. 辽宁省自动化学会 1989 年学术年会论文集,1989
[11] 吴铁军. 一类离散事件动态系统:状态空间模型、分析及应用. 浙江大学博士学位论文,1988
[12] 张梅,吴智铭. 可控可观性分析在 FMS 中的应用. 控制与决策,1991,6(1):20—24
[13] 郑大钟,王龙. 参数摄动下一类离散事件动态系统的性能估计和鲁棒性条件. 控制理论与应用,1989,6(3):47—55
[14] 涂菶生. 离散事件动态系统的关键路径与扰动分析. 离散事件动态系统理论及其在 CIMS 中的应用学术会议论文集,北京,1988,44—47
[15] 高建强,程新刚. 关于加工生产线的一种新模型及其扰动分析. 自动化学报,1990,16(3):226—233
[16] Olsder, G. J. et al. Discrete Event System with Stochastic Processing Times. Trans. IEEE 1991, AC-36(2)
[17] 于海斌,徐心和. 离散事件系统的简化、分解技术及其应用. 第六届全国系统与控制科学青年讨论会论文集,杭州,1990,573—578
[18] Cohen, G. et al. Dating and Counting Events in Discrete-Event Systems. 25th IEEE CDC, Athens, Greece, 1986
[19] Inan, K. et al. Finitely Recursive Process Models for Discrete Event Systems. IEEE Trans., 1988, AC-33(7): 626—639
[20] Hoare, C. A. R.. Communicating Sequential Processes. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall International, 1985
[21] 涂菶生,乞敬换. 具有存贮器的生产线的状态方程描述及其性能分析. 离散事件动态系统理论及其在 CIMS 中的应用学术会议论文集,北京,1988,88—92
[22] 刘克,沈美娥,郑应平. 缓冲区有限的生产系统建模与分析. 控制与决策,1991,6(4):241—246
[23] 程新刚,郑应平. 关于生产线的一些稳态分析结果. 离散事件动态系统理论及其在 CIMS 中应用学术会议论文集,北京,1988,93—96
[24] 刘克,郑应平. 每台机器多种加工的基本生产线的周期及控制. 控制理论及其应用年会论文集,杭州,1990

Algebra Theory and Its Applications in the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems

Liu Ke, Shen Mei'e
(Department of Automation University of Science & Technoloty Beijing)
Zheng Yingping
(Automation Institute of Academia Sinica, Beijing)

Abstract: On dioid algebra deterministic and decision-free discrete event dynamic systems (DEDS) can be expressed as linear models by means of which some effective analysis can be carried on. In this paper dioid theory is briefly introduced and important conclusions on system and control theory developed from dioid algebra are summarized. Applications of this algebraic method on the analysis of computer-integrated manufacturing systems (CIMS) are also introduced. This paper concludes with the discussion about open problems and the way forward.

Key words: dioid theory; max-algebra; linear model; eigenvalue; petrinet; manufacturing system; buffer; pallet; decision; stochasticity