第 8 卷 第 3 期　　控制理论与应用　　Vol. 8, No. 3
1991 年 9 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1991

离散事件系统状态反馈控制的几何理论的进一步拓广

于景元　周　政　朱　岭
（北京信息控制研究所）

摘要：本文研究了定义在状态-事件序列上的谓词的离散事件系统的状态反馈控制问题.离散事件系统的数学模型是自动机.状态反馈与闭环过程的关系及许多基本的几何性质得到了详细的阐明；在这些几何背景下，解决了离散事件系统状态反馈控制的拓广问题，包括关于简单谓词与一般谓词的问题.

关键词：离散事件系统；状态反馈；自动机；谓词；最优解

1　概　　述

离散事件系统是一大类不能用传统的常微分方程、差分方程或偏微分方程来描述的系统.它的动力学特征是：状态的变化取决于一系列相互作用的离散事件的出现与消失.与连续时间系统相比，其特点是：(1)系统的状态只在离散的时间点上变化；(2)异步与并发性；(3)系统状态变化具有不确定性.例如，柔性制造系统(FMS)，计算机/通信网络等都是很典型的离散事件系统[7].

在 W. M. Wonham 及 P. J. Ramadge 等人的工作[1~3]中，离散事件系统的数学模型为自动机.自动机是一个四元组.

设　$G=(\Sigma, Q, \delta, q_0)$为一个自动机，其中 Q 为一个状态集，$q_0\in Q$ 为初始状态，Σ 为一个有限符号集，即事件集，且 $\delta: \Sigma\times Q\rightarrow Q$ 为状态迁移函数.

我们将 G 视为一个自初始状态 q_0 起，由函数 δ 确定状态迁移而产生事件序列的装置，它恰如其分地描述了离散事件系统的行为.

我们令：$\Sigma_c\subseteq\Sigma$，其中的事件是可以控制的，而 $\Sigma_u=\Sigma-\Sigma_c$，其中的事件是不可以控制的，是自由的.

设　$\Gamma=\{\gamma: \gamma: \Sigma\rightarrow\{0, 1\}$ 且 $\gamma(\sigma)=1, \forall\ \sigma\in\Sigma_u\}$，

那么有扩张过程

$$G_c=(\Gamma\times\Sigma, Q, \delta_c, q_0).$$

其中，

$$\delta_c: \Gamma\times\Sigma\times Q\rightarrow Q.$$

$$\delta_c(\gamma,\sigma,q)=\begin{cases}\delta(\sigma,q) & \text{若 } \gamma(\sigma)=1,\\ \text{无定义} & \text{否则}.\end{cases}$$

G_c 叫做“离散事件控制过程”.G_c 与 G 包含相同信息，但却具有控制机制.

G 的状态反馈为 $f: Q\rightarrow\Gamma$，从而生成一个闭环过程 G_c^f：

$$G_c^f=(\Sigma, Q_{ac}^f, \delta_c^f, q_0).$$

本文于1989年11月11日收到.1990年8月3日收到修改稿.

$$\delta_c^f(\sigma,q)=\begin{cases}\delta(\sigma,q) & 若\ f(q)(\sigma)=1,\\ 无定义 & 否则,\end{cases}$$

其中,

$$Q_{ac}^f=\{q\in Q: w\in\Sigma^*,\ \delta_c^f(w,q_0)=q\}.$$

[3]中解决的主要问题,就是如何构造最优的状态反馈 f, 以使控制要求谓词 $P: Q\to\{0,1\}$在闭环过程上为真. 在[3]中,形式推演较多,有关自动机本质的规律讨论较少,没有给出形式推演的几何背景,所研究的问题不易拓广. [8]针对这点,重点讨论了状态空间与状态反馈的相互关系,得到了许多有价值的性质,并在此基础上,阐明了形式演算的直观的几何意义,从而较[3]更加完善地解决了离散事件系统的一大类问题. [8]为简化计算,还提出了许多有效的方法,特别是递阶控制的方法,大大地降低了计算量.

由于[8]的工作,使我们对于反馈、自动机的直观几何的本质了解甚多,这样我们可以比较容易地将这种几何的思想拓广应用于更大的范围:关于定义在状态-事件序列上的谓词的离散事件系统状态反馈控制问题.

2 离散事件系统状态反馈控制问题的拓广

令 $SE=\{q_0\xrightarrow{\sigma_1}q_1\xrightarrow{\sigma_2}\cdots\xrightarrow{\sigma_n}q_n: q_0\xrightarrow{\sigma_1}q_1\xrightarrow{\sigma_2}\cdots\xrightarrow{\sigma_n}q_n\in G\}$,特别地 $q_0\in SE$. 实际上,SE 与 G 几乎是一回事,因此在不发生歧义时,我们有时将 SE 与 G 视为等同.

离散事件系统状态反馈控制问题的拓广(EPSFD):设 $G=(\Sigma,\ Q,\ \delta,\ q_0)$为一个自动机,$P: SE\to\{0,\ 1\}$为一个谓词,试构造状态反馈 $f: Q\to\Gamma$,使 P 在闭环过程 G_c^f 上为真,即 $\forall s\in G_c^f: P(s)=1$,记为 $G_c^f\to P$.

在一个 EPSFD 中,$P(q_0)=1$ 为最起码的先决条件,因此不予特别强调. 若$\exists\ s=q_0\xrightarrow{\sigma_1}q_1\xrightarrow{\sigma_2}\cdots\xrightarrow{\sigma_n}q_n\in SE$,且 $\sigma_i\in\Sigma_u,\forall\ i$ 但 $P(s)=0$,则此 EPSFD 无解. 否则一般的 EPSFD 均有解.

3 状态反馈与闭环过程的关系

设 $G=(\Sigma,\ Q,\ \delta\ ,q_0)$,$G'=(\Sigma,\ Q',\ \delta'\ ,q_0)$为两个自动机,如果对于 G' 的任意状态-事件序列 $s\in G'$均有 $s\in G$,则 G' 称为 G 的"子自动机",记为 $G'\subseteq G$.

如果 $G'\subseteq G$,则 $Q'\subseteq Q$ 且若 $\delta'(\sigma,q)$有定义那么 $\delta(\sigma,q)$有定义,$\delta(\sigma,q)=\delta'(\sigma,q)$.

对于自动机 $G_1=(\Sigma,\ Q_1,\ \delta_1,q_0)\subseteq G$,$G_2=(\Sigma,\ Q_2,\ \delta_2,q_0)\subseteq G$,则生成新自动机:$G_1\cap G_2=(\Sigma,\ Q_1\cap Q_2,\ \delta_1\wedge\delta_2,q_0)$.

其中,

$$\delta_1\wedge\delta_2: \Sigma\times Q_1\cap Q_2\to Q_1\cap Q_2,$$

$$(\delta_1\wedge\delta_2)(\sigma,q)=\begin{cases}\delta_1(\sigma,q) & 若\ \delta_1(\sigma,q)=\delta_2(\sigma,q)\in Q_1\cap Q_2,\\ 无定义 & 否则.\end{cases}$$

实际上 $G_1\cap G_2=\{s\in SE: s\in G_1 且 s\in G_2\}$,$G_1\cap G_2$ 叫做 G_1 与 G_2 之"交自动机".

又,$G_1\cup G_2=(\Sigma,\ Q_1\cup Q_2,\ \delta_1\vee\delta_2,q_0)$.

其中,

$$\delta_1\vee\delta_2: \Sigma\times Q_1\cup Q_2\to Q_1\cup Q_2,$$

$$(\delta_1\vee\delta_2)(\sigma,q)=\begin{cases}\delta_1(\sigma,q) & 若\ \delta_1(\sigma,q)\ 有定义而\ \delta_2(\sigma,q)\ 无定义,\\ \delta_2(\sigma,q) & 若\ \delta_1(\sigma,q)\ 无定义而\ \delta_2(\sigma,q)\ 有定义,\\ \delta_1(\sigma,q) & 若\ \delta_1(\sigma,q)\ 有定义,\delta_2(\sigma,q)\ 有定义且\ \delta_1(\sigma,q)=\delta_2(\sigma,q),\\ 无定义 & 否则.\end{cases}$$

(由于 $G_1,G_2\subseteq G$,故 $\delta_1(\sigma,q)$,$\delta_2(\sigma,q)$均有定义,但 $\delta_1(\sigma,q)\neq\delta_2(\sigma,q)$是不可能的)
实际上 $G_1\cup G_2=\{s\in SE: s\in G_1$ 或 $s\in G_2\}$,$G_1\cup G_2$ 叫做 G_1 与 G_2 之"并自动机".

命题 3.1 $G_c^{f_1\wedge f_2}=G_c^{f_1}\cap G_c^{f_2}$, $G_c^{f_1\vee f_2}\supseteq G_c^{f_1}\cup G_c^{f_2}$, $G_c^{f_1\dot{\vee} f_2}=G_c^{f_1}\cup G_c^{f_2}$.

其中,
$$f_1\wedge f_2: Q\to\Gamma,\ (f_1\wedge f_2)(q)=f_1(q)\wedge f_2(q),$$
$$f_1\vee f_2: Q\to\Gamma,\ (f_1\vee f_2)(q)=f_1(q)\vee f_2(q),$$
$$f_1\dot{\vee} f_2: Q\to\Gamma,\ \forall q\in Q,\ \sigma\in\Sigma,$$
$$(f_1\dot{\vee} f_2)(q)(\sigma)=\begin{cases}(f_1\wedge f_2)(q)(\sigma) & 若\ \delta(\sigma,q)\notin Q_{ac}^{f_1}\cup Q_{ac}^{f_2},\\ (f_1\vee f_2)(q)(\sigma) & 否则.\end{cases}$$

对于反馈 f、g,如果在 Q_{ac}^f上,$\forall\sigma\in\Sigma$ 当 $f(q)(\sigma)=1$ 时必有 $g(q)(\sigma)=1$,则称"f 弱于 g"或"g 强于 f",表示为 $f\leqslant g$ 或 $g\geqslant f$.

命题 3.2 $f\leqslant g$ 之充要条件为 $G_c^f\subseteq G_c^g$.

4 基本结果

命题 4.1 若 $G_c^{f_1}\to P_1$, $G_c^{f_2}\to P_2$, 则 $G_c^{f_1\wedge f_2}\to P_1\wedge P_2$, $G_c^{f_1\dot{\vee} f_2}\to P_1\vee P_2$.

令 $A=\{G'\subseteq G:\forall s\in G',P(s)=1\}$. 由 Zorn 引理知,$A$ 必有极大元 $G_P\in A$:
$$G_p=(\Sigma,Q_p,\delta_p,q_0).$$
即 $\forall G'\in A,G'\subseteq G_P$.

令 $\pi'=\{P:P:SE\to\{0,\ 1\}\}$.

下面采取递推式的方法定义一系列谓词变换:$\overline{wp}_\sigma:\pi'\to\pi$,$\forall\sigma\in\Sigma$,并通过这一过程求出 G_P,其中 $\pi=\{P':P':Q\to\{0\ \ 1\}\}$.

若 $G_i=(\Sigma,Q_i,\delta_i,q_0)\subseteq G$,$\forall q\in Q_i,\sigma\in\Sigma$,$\overline{wp}_\sigma(P)(q)$已有定义,那么我们构造:$G_{i+1}=(\Sigma,Q_{i+1},\delta_{i+1},q_0)=\{q\xrightarrow{\sigma}\delta(\sigma,q)\in G: q\in Q_i,\sigma\in\Sigma,q\xrightarrow{\sigma}\delta(\sigma,q)\notin G_i$ 且 $\overline{wp}_\sigma(P)(q)=1\}\cup G_i\subseteq G$.
$\forall q\in Q_{i+1}$但 $q\notin Q_i,\sigma\in\Sigma$,定义
$$\overline{wp}_\sigma(P)(q)=\begin{cases}1 & 若\ \delta(\sigma,q)\ 有定义且\ s'=q_0\xrightarrow{\sigma_1}\cdots\xrightarrow{\sigma_2}q\in G_{i+1},\\ & \quad s=s'\xrightarrow{\sigma}\delta(\sigma,q): P(s)=1,\\ 0 & 否则,\end{cases}$$
$i=0,1,2,\cdots$直至 $G_K=G_{K+1}\subseteq G$. 并且对于 $G_0=\{q_0\}\subseteq G$ 及 $\sigma\in\Sigma$ 定义
$$\overline{wp}_\sigma(P)(q_0)=\begin{cases}1 & 若\ \delta(\sigma,q_0)\ 有定义且\ P(q_0\xrightarrow{\sigma}\delta(\sigma,q_0))=1,\\ 0 & 否则,\end{cases}$$
易见 $G_P=G_K$,至于 $q\notin G_P$,则定义$\overline{wp}_\sigma(P)(q)=0$.

命题 4.2 $G_{P_1\wedge P_2}=G_{P_1}\cap G_{P_2}$, $G_{P_1\vee P_2}=G_{P_1}\cup G_{P_2}$.

对于状态反馈 f_1,f_2,如果 $G_c^{f_1}=G_c^{f_2}$,则定义 f_1 与 f_2 的一个关系$\sim_G$: $f_1\sim_G f_2$,显然此关系为一个等价关系.

令 $F=\{f\in\Gamma^Q: G_c^f\to P\}$,那么我们考虑:$f^*=\dot{\bigvee\limits_{f\in F}}f$,若 $g\sim_G f^*$,则称 g 叫做此 EPSFD 之"最优解",且 $G_c^g=\bigcup\limits_{f\in F}G_c^f$,令 $G^*=\bigcup\limits_{f\in F}G_c^f$,$G^*$叫做谓词 P 关于自动机 G 之"核自动机".

对于自动机 G 及谓词 P,若 f 为此 EPSFD 之最优解,G^*为核自动机,那么表为(P,f,G^*).

命题 4.3 若自动机 G 与谓词 P_1,P_2 有(P_1,f_1,G_1^*)及(P_2,f_2,G_2^*),则$(P_1\wedge P_2,f_1\wedge f_2,$

$G_1^* \cap G_2^*$).

$\forall h \in F$，令 $F(h)=\{g \in F : g \geqslant h\}$. 如果存在 $h^* \in F(h), \forall g \in F(h) : g \leqslant h^*$，则称 h^* 为 $F(h)$ 之"极大元"，并记为 $h^* = \sup F(h)$. 由 Zorn 引理，该极大元 h^* 存在.

定理 4.1 $\forall h \in F, h^*$ 为该 EPSFD 之最优解.

5 Ramadge-Wonham 方法的拓广

$$\forall \sigma \in \Sigma, \text{定义 } D_\sigma : Q \to \{0,1\},$$

$$D_\sigma(q) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \sigma(\delta,q) \text{ 有定义}, \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

$\forall \sigma \in \Sigma$，定义一个谓词变换 $\overline{wlp}_\sigma : \pi' \to \pi$. 其中，$\overline{wlp}_\sigma(P) = \overline{wp}_\sigma(P) \vee \neg D_\sigma$.

那么定义一个状态反馈 $f^* : Q \to \Gamma, \forall q \in Q_P$ 及 $\sigma \in \Sigma$，

$$f^*(q)(\sigma) = \begin{cases} \overline{wlp}_\sigma(P)(q) & \text{若 } \sigma \in \Sigma_c, \\ 1 & \text{若 } \sigma \in \Sigma_u. \end{cases}$$

如果 P 关于 G 之核自动机 G^* 有 $G^* = G_P$，则称 P 为关于 G 之"简单谓词".

定理 5.1 如果谓词 P 关于自动机 G 是简单的，则 f^* 为该 EPSFD 之最优解.

6 核自动机的逐次逼近的几何方法

对于谓词 P_1、$P_2 \in \pi'$，如果 $\forall s \in SE$：当 $P_1(s)=1$ 时必有 $P_2(s)=1$，则称 P_1 比 P_2 弱或 P_2 比 P_1 强，记为 $P_1 \leqslant P_2$ 或 $P_2 \geqslant P_1$.

易见 $P_1 \leqslant P_2$ 之充要条件为 $G_{P_1} \subseteq G_{P_2}$.

对于谓词 P_1、$P_2 \in \pi'$，如果 $G_{P_1} = G_{P_2}$，那么可定义 P_1、P_2 的一个关系 $\sim$: $P_1 \sim P_2$. 易见此关系为一个等价关系.

令　$CI'_<(P) = \{P' \in \pi' : P' \leqslant P$ 且 P' 为简单谓词$\}$，$CI'_<(P) \backslash \{0\}$ 关于 $\sim$ 有商集：$(CI'_<(P) \backslash \{0\})/\sim$.

对于 $F = \{f \in \Gamma^Q : G_c^f \to P\}$ 关于等价关系 $\sim_G$ 亦有商集：$F/\sim_G$. $(CI'_<(P) \backslash \{0\})/\sim$ 与 $F/\sim_G$ 之间构成 1-1 对应，$CI'_<(P) = \{P' \in \pi' : G_{P'} = G_c^f, f \in F\} \cup \{0\}$.

由 Zorn 引理，存在 $P\uparrow \in CI'_<(P), \forall P' \in CI'_<(P) : P' \leqslant P\uparrow$，那么 $P\uparrow$ 叫做比 P 弱的最强的简单谓词，易见 $G_{P\uparrow}$ 恰为 P 之核自动机：$G_{P\uparrow} = G^*$. 解决一般谓词 P 的 EPSFD 之关键就是找到 P 的核自动机，下面我们介绍的方法，其几何本质正是寻找核自动机.

命题 6.1 P_1、$P_2 \in \pi'$，　$P_1\uparrow \wedge P_2\uparrow \sim (P_1 \wedge P_2)\uparrow$.

命题 6.2 P_1、$P_2 \in \pi'$，　$P_1\uparrow \vee P_2\uparrow \leqslant (P_1 \vee P_2)\uparrow$.

由 P 定义一个谓词：

$$P^* : SE \to \{0,\ 1\}.$$

其中，

$$P^*(s) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } s \in G_P, \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

$\forall \sigma \in \Sigma$，定义谓词 $D'_\sigma : SE \to \{0,\ 1\}$

其中，

$$D'_\sigma(s) = \begin{cases} 1 & \text{若 } s \xrightarrow{\sigma} q \text{ 存在}, \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

$\forall \sigma \in \Sigma$，定义谓词变换 $wp'_\sigma : \pi' \to \pi'$.

其中，
$$wp'_\sigma(p)(s)=\begin{cases}1 & \text{若 } s\xrightarrow{\sigma}q \text{ 存在且 } P(s\xrightarrow{\sigma}q)=1,\\ 0 & \text{否则}.\end{cases}$$

$\forall\ \sigma\in\Sigma$，定义谓词变换 $wlp'_\sigma:\pi'\to\pi'$.

其中，
$$wlp'_\sigma(P)=wp'_\sigma(P)\vee\neg D'_\sigma.$$

于是得到一个十分重要的谓词变换
$$H':\pi'\to\pi'.$$

其中，
$$H'(P')=P^*\wedge(\bigwedge_{\Sigma_u}wlp'_\sigma(P')).$$

定理 6.1 令 $P_0=P^*, P_{j+1}=H'(P_j)$， $j=0,1,2,\cdots$，那么序列 $\{P_j\}$ 单调下降收敛于与 $P^\dagger$ 等价的谓词 P'，即 $P^\dagger\sim P'=\bigwedge_{j=0}^{\infty}P_j=\lim_j P_j$.

若 $\{s\in SE:P(s)=1\}$ 构成一个自动机，则 $G_P=\{s\in SE:P(s)=1\}$.

由定理 6.1 给出的序列 $\{Pj\}$ 即满足：
$$G_{P_j}=\{s\in SE:P_j(s)=1\},\quad\forall\ j,$$
且 $G_{P'}=G_{P^\dagger}=\{s\in SE:P'(s)=1\}$ 这样在具体运算时就可免去求 G_{P_j} 的麻烦，直接求出 $G_{P^\dagger}$ 了.

参 考 文 献

[1] Ramadge, P. J., Wonham, W. M.. Supervisory Control of a Class of Discrete-Event Process. SIAM J. Control and Optimization, 1987, 25(1): 206—230

[2] Ramadge, P. J., Wonham, W. M.. On the Supermal Controllable Sublanguage of a Given Language. SIAM J. Control and Optimization, 1987, 25(3): 637—659

[3] Ramadge, P. J., Wonham, W. M.. Modular Feedback Logic for Discrete-Event Systems. SIAM J. Control and Optimization, 1987, 25(5): 1202—1218

[4] Liepa, P. E., Wonham, W. M.. Feedback Systems in a General Algebraic Setting. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1978, CAS-25: 728—741

[5] Wonham, W. M.. Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. Springer-Verlag, New York, 1979

[6] Bondy, J. A., Murty, U. S. R.. Graph Theory With Applications. Macmillan, New York, 1976

[7] 高为炳. 离散事件系统理论——发展与展望. 1988年离散事件动态系统理论及在CIMS中的应用学术讨论会大会报告，北京，1988

[8] 于景元，周政，朱岭. 离散事件系统状态反馈控制的几何理论. 控制与决策，1991，6(1)：25—30

[9] 朱岭. 离散事件系统反馈控制的几何理论. 控制理论与应用年会论文集，杭州，1990

[10] 吴品三. 近世代数. 北京：高等教育出版社，1985

[11] 马振华. 数学逻辑引论. 北京：清华大学出版社，1983

Further Extending of the Geometric Theory of State Feedback Control for Discrete Event Systems

Yu Jingyuan, Zhou Zheng and Zhu Ling
(Beijing Institute of Information and Control)

Abstract: This paper studies the problem of state feedback control for discrete event systems, where the predicate is defined on the set of state-event sequences. Discrete event system is modelled as automaton. The relations between state feedback and closed-loop process, and many essential geometric properties are expounded carefully. Under the geometric background, the extended problem of state feedback control for discrete event systems is solved, including both simple and general predicate.

Key words: discrete event systems; state feedback; automaton; predicate; optimal solution