第 8 卷第 3 期
1991 年 9 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 3
Sept., 1991

# 有多个不合作随从的诱导策略

徐春晖　陈　珽
(华中理工大学系统工程研究所,武汉)

**摘要**:本文讨论上级宣布策略后随从进行 Nash 不合作对策时的诱导问题. 由于 Nash 不合作平衡点的不唯一性,本文提出了拟诱导策略,弱诱导策略和强诱导策略的概念. 当随从目标函数是凸函数时,得到了仿射型拟诱导策略和仿射型弱诱导策略的存在条件与设计方法,当随从目标函数是正定二次函数时,得到了仿射型强诱导策略的存在条件与设计方法,并有示例说明本文的结论.

**关键词**:Nash 不合作平衡点;诱导策略;拟诱导策略;弱诱导策略;强诱导策略

## 1 引　言

在 Stackelberg 对策中,上级利用策略来引导随从,使得随从从自己的利益出发作出的决策符合上级的愿望,这是所谓的诱导问题(IP:Incentive Problems).

当有多个随从时,通常假定上级宣布策略后随从之间进行 Nash 不合作对策,即随从之间不合作对策的解是一个 Nash 不合作平衡点(简称 Nash 平衡点)[2][5]. Nash 平衡点的一个重要特点是其不唯一性[3][6],即使随从的目标函数是严格凸函数,而上级采用仿射型策略,也保证不了 Nash 平衡点的不唯一性(见第 4 节例 1),有关文献或者没有注意到或者没有解决好由于 Nash 平衡点的唯一性所带来的一些问题[2][5].

当上级的策略不能保证 Nash 平衡点唯一时,如果不对随从的行为增加新的假设,上级就不能确定随从将会采用哪个 Nash 平衡点作为不合作对策的解. 不能保证 Nash 平衡点唯一的策略所产生的后果都有一定程度的不确定性,但对于具有不同特性的策略,这种不确定的程度会不一样.

基于这种认识,本文第 2 节提出了拟诱导策略,弱诱导策略与强诱导策略的概念,第 3 节讨论当随从目标函数是凸函数时,仿射型拟诱导策略和仿射型弱诱导策略的存在条件与设计方法,以及当随从目标函数是正定二次函数时,仿射型强诱导策略的存在条件与设计方法,第 4 节用数值示例来说明本文的结论,第 5 节是对本文的小结.

## 2 三种诱导策略的意义

不失一般性,设随从只有两个,记为 $P_1, P_2$,上级记为 $P_0$.

$u_i \in U_i, U_i \subset R^{n_i}, J_i(u_0, u_1, u_2)$ 分别是 $P_i$ 的决策变量,决策空间与代价目标函数,$i=0,1,2$,假定 $U_0=R^{n_0}$. $(u_0^t, u_1^t, u_2^t) \in U_0 \times U_1 \times U_2$ 是 $P_0$ 的期望结局. $\Gamma$ 为 $P_0$ 的容许策略集.

当 $P_0$ 宣布策略 $\gamma \in \Gamma$ 后,假定 $P_1, P_2$ 进行 Nash 不合作对策,$R(\gamma)$表示在 $P_0$ 宣布策略 $\gamma \in \Gamma$ 后,$P_1, P_2$ 之间 Nash 不合作对策的 Nash 平衡点集,即

本文于1989年10月17日收到. 1990年11月26日收到修改稿.

$$R(\gamma)=\{(u_1^0,u_2^0)\,|\,J_1(\gamma(u_1^0,u_2^0),u_1^0,u_2^0)\leqslant J_1(\gamma(u_1,u_2^0),u_1,u_2^0),\quad \forall\, u_1\in U_1,$$
$$J_2(\gamma(u_1^0,u_2^0),u_1^0,u_2^0)\leqslant J_2(\gamma(u_1^0,u_2),u_1^0,u_2),\quad \forall\, u_2\in U_2\}.$$

$R(\gamma)$一般是多元集，也可能是单元集或空集.

如果$\gamma\in\Gamma$使得$R(\gamma)$只包含$(u_1^t,u_2^t)$这个元素，则当$P_0$宣布这样的策略时，随从的决策一定是$(u_1^t,u_2^t)$，这种策略称为强诱导策略.

**定义 1**　若策略$\gamma\in\Gamma$满足

$$R(\gamma)=\{(u_1^t,u_2^t)\},\tag{2.1a}$$
$$u_0^t=\gamma(u_1^t,u_2^t).\tag{2.1b}$$

即在策略$\gamma$下随从的决策一定是$(u_1^t,u_2^t)$，则称之为在$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$处的强诱导策略(S-IS: Strong-Incentive Strategy).

若$\gamma\in\Gamma$不保证$(u_1^t,u_2^t)$是唯一的Nash平衡点，但保证在$\gamma$下，$(u_1^t,u_2^t)$是对随从双方最有利的Nash平衡点，即对$\forall\ (u_1,u_2)\in R(\gamma)$，$(u_1,u_2)\neq(u_1^t,u_2^t)$有：$J_i(\gamma(u_1^t,u_2^t),u_1^t,u_2^t)<J_i(\gamma(u_1,u_2),u_1,u_2)$，$i=1,2$. 则$P_0$宣布这样的策略时，随从作出决策$(u_1^t,u_2^t)$的可能性很大，尤其是随从之间可以通讯时，这种策略称为弱诱导策略.

**定义 2**　若策略$\gamma\in\Gamma$满足

$$(u_1^t,u_2^t)\in R(\gamma),\tag{2.2a}$$
$$J_i(\gamma(u_1^t,u_2^t),u_1^t,u_2^t)<J_i(\gamma(u_1,u_2),u_1,u_2),\quad \forall\ (u_1,u_2)\in R(\gamma),\text{且}$$
$$(u_1,u_2)\neq(u_1^t,u_2^t),\quad i=1,2\tag{2.2b}$$
$$u_0^t=\gamma(u_1^t,u_2^t).\tag{2.2c}$$

则称之为在$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$处的弱诱导策略(W-IS: Weak-Incentive Strategy).

如果$\gamma\in\Gamma$只使得$(u_1^t,u_2^t)\in R(\gamma)$，而没有其他的特性，由于随从之间不合作，随从有可能采用$(u_1^t,u_2^t)$，即$P_0$宣布这样的策略仍有可能达到诱导的目的. 但在这种策略下，$R(\gamma)$中可能存在比$(u_1^t,u_2^t)$对随从双方更有利的Nash平衡点，若随从之间可以通讯，随从就不会采用$(u_1^t,u_2^t)$，这种策略称为拟诱导策略.

**定义 3**　若策略$\gamma\in\Gamma$满足$(u_1^t,u_2^t)\in R(\gamma)$，$u_0^t=\gamma(u_1^t,u_2^t)$，则称之为在$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$处的拟诱导策略(Q-IS: Quasi-Incentive Strategy).

下节将讨论随从目标函数具有凸性时仿射型Q-IS和仿射型W-IS的存在条件与设计方法，以及当随从目标函数是正定二次函数时仿射型S-IS的存在条件与设计方法.

## 3　三种仿射型诱导策略的存在性与设计

为了表达的简洁，记

$$\alpha_i=\nabla_{u_i}J_i(u_0^t,u_1^t,u_2^t),\quad i=1,2,\tag{3.1}$$
$$\xi_i=\nabla_{u_0}J_i(u_0^t,u_1^t,u_2^t),\quad i=1,2,\tag{3.2}$$
$$\beta_1=\nabla_{u_2}J_1(u_0^t,u_1^t,u_2^t),\quad \beta_2=\nabla_{u_1}J_2(u_0^t,u_1^t,u_2^t).\tag{3.3}$$

### 3.1　仿射型拟诱导策略

**定理 1**　设$U_1,U_2$是紧凸集，$J_1(\cdot),J_2(\cdot)$是$U_0\times U_1\times U_2$上可微的凸函数，若$\xi_1\neq0$，$\xi_2\neq0$，则在$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$处存在仿射型Q-IS

$$u_0=u_0^t+Q_1(u_1-u_1^t)+Q_2(u_2-u_2^t).\tag{3.4a}$$

式中，$Q_i$ 是满足下列关系的 $n_0\times n_i$ 维矩阵

$$Q_i^T\xi_i+\alpha_i=0,\quad i=1,2. \tag{3.4b}$$

其中，$\alpha_i,\xi_i$ 的意义见(3.1)(3.2)，$i=1,2$.

证 令 $\gamma_0$ 为任一由(3.4a)(3.4b)确定的策略，只要证明 $(u_1^t,u_2^t)\in R(\gamma_0)$ 即可.

记 $J_i(\gamma_0(u_1,u_2),u_1,u_2)=\bar{J}_i(u_1,u_2)$，$i=1,2$，当 $J_1(\cdot)$，$J_2(\cdot)$ 是 $U_0\times U_1\times U_2$ 上的凸函数时，$\bar{J}_1(\cdot)\bar{J}_2(\cdot)$ 也是 $U_1\times U_2$ 上的凸函数.

由于 $\nabla_{u_1}\bar{J}_1(u_1^t,u_2^t)=\alpha_1+Q_1^T\xi_1=0$，因此 $\bar{J}_1(u_1^t,u_2^t)$ 在 $u_1^t$ 处取最小值，即 $\bar{J}_1(u_1^t,u_2^t)\leqslant \bar{J}_1(u_1,u_2^t)$，$\forall\ u_1\in U_1$. 同理可证 $\bar{J}_2(u_1^t,u_2^t)\leqslant\bar{J}_2(u_1^t,u_2)$，$\forall\ u_2\in U_2$，因而有 $(u_1^t,u_2^t)\in R(\gamma_0)$.

**注 1**：定理 1 的结论与[5]中的结论在形式上是相同的，但这里主要说明策略(3.4)是 Q-IS. 在这种策略下，$R(\gamma)$ 可能有多个 Nash 平衡点，而且 $(u_1^t,u_2^t)$ 还可能是一个对随从双方都不利的 Nash 平衡点，即存在比 $(u_1^t,u_2^t)$ 对随从双方更有利的 Nash 平衡点，见第 4 节中的例 1. 此例还说明，即使 $J_1(\cdot)$，$J_2(\cdot)$ 是严格凸函数，策略(3.4)仍保证不了 Nash 平衡点的唯一性.

### 3.2 仿射型弱诱导策略

一个策略 $\gamma\in\Gamma$ 要成为 $(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$ 处的 W-IS，必须保证 $(u_1^t,u_2^t)$ 是 $R(\gamma)$ 中对随从双方最有利的元素，由于难以求出 $R(\gamma)$ 的表达式，要比较 $R(\gamma)$ 中元素的优劣十分困难，何况 $R(\gamma)$ 与 $\gamma$ 直接相关，但如果 $\gamma$ 使得 $(u_1^t,u_2^t)$ 是对随从双方最有利的可行结局，则在此策略下，$(u_1^t,u_2^t)$ 也是 $R(\gamma)$ 中对随从双方最有利的元素.

因而，满足下列关系的策略 $\gamma\in\Gamma$ 一定满足(2.2b)

$$J_i(\gamma(u_1^t,u_2^t),u_1^t,u_2^t)<J_i(\gamma(u_1,u_2),u_1,u_2),\quad \forall\ (u_1,u_2)\in U_1\times U_2,\text{且}$$
$$(u_1,u_2)\neq(u_1^t,u_2^t),\quad i=1,2, \tag{2.2b'}$$

即，满足(2.2a)(2.2b′)(2.2c)的策略 $\gamma\in\Gamma$ 就是 $(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$ 处的 W-IS.

**定理 2** 设 $U_1,U_2$ 是紧凸集，$J_1(\cdot)$，$J_2(\cdot)$ 是 $U_0\times U_1\times U_2$ 上可微的严格凸函数. 若存在满足下列关系的 $n_0\times n_1$，维矩阵 $W_1$ 和 $n_0\times n_2$ 维矩阵 $W_2$

$$\begin{cases} W_1^T\xi_1+\alpha_1=0, & W_1^T\xi_2+\beta_2=0,\\ W_2^T\xi_1+\beta_1=0, & W_2^T\xi_2+\alpha_2=0. \end{cases} \tag{3.5a}$$

其中，$\alpha_i,\beta_i,\xi_i$ 的意义见(3.1)(3.2)(3.3)，$i=1,2$，则下列策略就是 $(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$ 处的仿射型 W-IS

$$u_0=u_0^t+W_1(u_1-u_1^t)+W_2(u_2-u_2^t). \tag{3.5b}$$

证 令 $\gamma_1$ 为任一由(3.5a)(3.5b)确定的策略.

由定理 1 的证明过程不难推知 $\gamma_1$ 满足(2.2a)(2.2c)，下面证明 $\gamma_1$ 满足(2.2b′).

记 $J_i(\gamma_1(u_1,u_2),u_1,u_2)=\bar{J}_i(u_1,u_2)$，$i=1,2$，当 $J_1(\cdot)$，$J_2(\cdot)$ 是 $U_0\times U_1\times U_2$ 上的严格凸函数时，$\bar{J}_1(\cdot)\bar{J}_2(\cdot)$ 也是 $U_1\times U_2$ 上的严格凸函数.

在 $(u_1^t,u_2^t)$ 处，$\nabla\bar{J}_1=(\alpha_1+W_1^T\xi_1,\beta_1+W_2^T\xi_1)=0$，同理，$\nabla\bar{J}_2=(\alpha_2+W_1^T\xi_2,\beta_2+W_H^T\xi_2)=0$.

因而，$\bar{J}_1(\cdot)$，$\bar{J}_2(\cdot)$ 都在 $(u_1^t,u_2^t)$ 处取最小值，而且此最小值点是唯一的，即 $\bar{J}_i(u_1^t,u_2^t)<\bar{J}_i(u_1,u_2)$，$\forall\ (u_1,u_2)\in U_1\times U_2$，$(u_1,u_2)\neq(u_1^t,u_2^t)$，$i=1,2$，因此，$\gamma_1$ 是 $(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$ 处的 W-IS.

**注 2**：从定理 2 的证明过程可知，只要 $J_1(\cdot)$，$J_2(\cdot)$ 在 $(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$ 附近是可微严格凸函数，且在 $U_0\times U_1\times U_2$ 上是凸函数时，定理 2 的结论就成立.

### 3.3 仿射型强诱导策略

由于一般的 Nash 不合作对策难以保证 Nash 平衡点的唯一性，下面只讨论随从目标函数是正定二次函数这种情形，设

$$J_i = 1/2\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}u_j^T R_{jk}^i u_k + \sum_{j=0}^{2}a_{ij}^T u_j + b_i, \qquad i=1,2.$$

其中，$R_{jk}^i$是 $n_j\times n_k$ 维矩阵，$(R_{jk}^i)^T=R_{kj}^i$，$a_{ij}$是 $n_j$ 维向量，$b_i$ 是常数.

$$\begin{pmatrix} R_{00}^i & R_{01}^i & R_{02}^i \\ R_{10}^i & R_{11}^i & R_{12}^i \\ R_{20}^i & R_{21}^i & R_{22}^i \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad i=1,2.$$

记 $J_i(\gamma(u_1,u_2),u_1,u_2)=\bar{J}_i(u_1,u_2)$，$i=1,2$，$\forall\ \gamma\in\Gamma$，很容易证明下面结论(证明略).

**命题 1** 设在策略 $\gamma\in\Gamma$ 下 $\bar{J}_1(\cdot)$，$\bar{J}_2(\cdot)$是 $U_1\times U_2$ 上的可微凸函数，$(u_1^t,u_2^t)\in\mathring{U}_1\times\mathring{U}_2$，其中，$\mathring{U}_i$ 表示 $U_i$ 的内点集，$i=1,2$，则$(u_1^t,u_2^t)\in R(\gamma)$的充要条件是：$\nabla_{u_i}\bar{J}_i(u_1^t,u_2^t)=0$，$i=1,2$.

当 $J_1,J_2$ 是正定二次函数，$P_0$ 采用仿射型策略时，$\bar{J}_1,\bar{J}_2$ 仍是严格凸函数，设仿射型策略为

$$u_0 = u_0^t + S_1(u_1-u_1^t) + S_2(u_2-u_2^t). \tag{3.6}$$

其中，$S_i$ 是 $n_0\times n_i$ 维矩阵，$i=1,2$.

由命题 1 可知，若 $S_1,S_2$ 使得方程组：$\nabla_{u_i}\bar{J}_i(u_1,u_2)=0$，$i=1,2$，只有唯一解$(u_1^t,u_2^t)$，则用这种 $S_1,S_2$ 构成的策略就是$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$处的仿射型强诱导策略.

下面讨论 $S_1,S_2$ 应满足什么条件才能使方程组：$\nabla_{u_i}\bar{J}_i(u_1,u_2)=0$，$i=1,2$，只有唯一解$(u_1^t,u_2^t)$，这个条件也是当 $J_1,J_2$ 是正定二次函数时，仿射型 S-IS 的存在性充分条件.

在策略(3.6)下，$\nabla_{u_i}\bar{J}_i(u_1,u_2)=\nabla_{u_i}J_i+S_i^T\nabla_{u_0}J_i=R_{ii}^iu_i+\sum_{j\neq i}R_{ij}^iu_j+a_{ii}+S_i^T(R_{00}^iu_0+\sum_{j=1}^{2}R_{0j}^iu_j+a_{i0})$.

记 $C_{11}=R_{11}^1+S_1^T(R_{00}^1S_1+R_{01}^1)$，　$C_{12}=R_{12}^1+S_1^T(R_{00}^1S_2+R_{02}^1)$，

$C_{21}=R_{21}^2+S_2^T(R_{00}^2S_1+R_{01}^2)$，　$C_{22}=R_{22}^2+S_2^T(R_{00}^2S_2+R_{02}^2)$，

$d_i=-a_{ii}-S_i^T(R_{00}^i(u_0^t-S_1u_1^t-S_2u_2^t)+a_{i0})$，　$i=1,2$.

则 $\nabla_{u_i}\bar{J}_i(u_1,u_2)=0$，$i=1,2$，可写成

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

若 $S_1,S_2$使(3.7)只有唯一解$(u_1^t,u_2^t)$，则策略(3.6)就是$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$处的 S-IS.

**定理 3** 设 $U_1,U_2$ 是紧凸集，$J_1,J_2$ 是正定二次函数，$(u_1^t,u_2^t)\in\mathring{U}_1\times\mathring{U}_2$. 若存在 $n_0\times n_j$ 维矩阵 $S_j$，$j=1,2$，使得线性方程组(3.7)只有$(u_1^t,u_2^t)$这个唯一解，则(3.6)是$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)$处的 S-IS.

## 4 数值示例

**例 1** $u_0\in U_0=R^2$，$u_i\in U_i=R^1$，$i=1,2$，$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)=(0,0,0,0)$，

$$J_1=(u_1-u_2)^2+4(u_2-1)^2+u_{01}^2-2u_1u_2+u_{02}^2+u_1-u_{01},$$

$$J_2=(u_2-u_1)^2+4(u_1-1)^2+u_{02}^2-2u_1u_2+u_{01}^2+u_2-u_{02}.$$

显然 $J_1,J_2$ 在 $U_0\times U_1\times U_2$ 上是严格凸函数，在 $(0,0,0,0)$ 处，

$$\alpha_1=\nabla_{u_1}J_1=1,\quad \alpha_2=\nabla_{u_2}J_2=1,$$

$$\xi_1=\nabla_{u_0}J_1=(-1,0)^T,\quad \xi_2=\nabla_{u_0}J_2=(0,-1)^T.$$

由定理 1 知下列策略是 $(0,0,0,0)$ 处的 Q-IS

$$u_{01}=u_1,\qquad u_{02}=u_2. \tag{4.1}$$

将策略(4.1)代入 $J_1,J_2$ 得 $\bar J_1=2(u_1-u_2)^2+4(u_2-1)^2,\bar J_2=2(u_2-u_1)^2+4(u_1-1)^2$.
由 Nash 平衡点的定义可知，$(u_1^t,u_2^t)=(0,0)$ 是一个 Nash 平衡点，但 $(1,1)=(u_1^0,u_2^0)$ 也是一个 Nash 平衡点，而 $\bar J_i(u_1^t,u_2^t)=4,\bar J_i(u_1^0,u_2^0)=0,i=1,2$，因而 $(u_1^0,u_2^0)$ 对随从双方来说都比 $(u_1^t,u_2^t)$ 要好.

**例 2** 题目同例 1.

在 $(0,0,0,0)$ 处，　$\beta_1=\nabla_{u_2}J_1=-8$，　$\beta_2=\nabla_{u_1}J_2=-8$.

由(3.5a)可确定两个矩阵 $W_1,W_2$：$W_1=(1,-8)^T$，　$W_2=(-8,1)^T$.

由定理 2 知，下列策略是 $(0,0,0,0)$ 处的 W-IS.

$$u_{01}=u_1-8u_2,\qquad u_{02}=u_2-8u_1. \tag{4.2}$$

将策略(4.2)代入 $J_1,J_2$ 得

$$\bar J_1=(u_1-u_2)^2+4(u_2-1)^2+(u_1-8u_2)^2-2u_1u_2+(u_2-8u_1)^2+8u_2,$$

$$\bar J_2=(u_2-u_1)^2+4(u_1-1)^2+(u_2-8u_1)^2-2u_1u_2+(u_1-8u_2)^2+8u_1,$$

$$\nabla\bar J_1=4(33u_1-9u_2,-9u_1+35u_2)^T,\quad \nabla\bar J_2=4(35u_1-9u_2,-9u_1+33u_2)^T.$$

$\because$ 在 $(0,0)$ 处，$\nabla\bar J_1=\nabla\bar J_2=(0,0)$.

$\therefore$ 对 $\forall\ (u_1,u_2)\in U_1\times U_2,(u_1,u_2)\neq(u_1^t,u_2^t)$ 有：$\bar J_i(u_1^t,u_2^t)<\bar J_i(u_1,u_2)$，$i=1,2$，即在策略(4.2)下，$(u_1^t,u_2^t)$ 是对随从双方最有利的 Nash 平衡点.

也不难看出，只有 $(u_1^t,u_2^t)$ 满足：$\nabla_{u_i}\bar J_i=0,i=1,2$，因而在策略(4.2)下，$(u_1^t,u_2^t)$ 是唯一的 Nash 平衡点，即策略(4.2)也是 $(0,0,0,0)$ 处的 S-IS.

**例 3**　$u_0\in U_0=R^2,u_i\in U_i=R^1,i=1,2$，　$(u_0^t,u_1^t,u_2^t)=(0,0,0,0)$，

$$J_1=u_{01}^2+u_1^2+u_{01}u_1+2u_1u_2,\quad J_2=u_{02}^2+u_2^2+u_{02}u_1+2u_1u_2.$$

取仿射型策略为：$u_{01}=s_{11}u_1+s_{12}u_2,u_{02}=s_{21}u_1+s_{22}u_2$，则方程组 $\nabla_{u_i}\bar J_i=0,i=1,2$ 等价于

$$\begin{bmatrix}2+2s_{11}s_{11} & 2+s_{11}+2s_{11}s_{12}\\ 2+s_{22}+2s_{21}s_{22} & 2+2s_{22}s_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

任何使(4.3)系数矩阵可逆的一组 $s_{11},s_{12},s_{21},s_{22}$ 都可构成 $(0,0,0,0)$ 处的 S-IS. 取最简单的一组值：$s_{11}=s_{22}=1,s_{12}=s_{21}=0$，此时(4.3)的系数矩阵可逆，因而下列策略就是 $(0,0,0,0)$ 处的 S-IS：$u_{01}=u_1,u_{02}=u_2$.

## 5 结束语

鉴于 Nash 平衡点的不唯一性，本文提出了三种意义的诱导策略，S-IS 能保证达到诱导的目的，而 W-IS 和 Q-IS 也都有可能达到诱导的目的，若随从之间可以通讯，W-IS 也能保证达到诱导的目的；不管随从之间是否通讯，Q-IS 都不能保证达到诱导的目的. 在这三种策略取仿射型时，本文还得到了它们的存在条件与设计方法.

本文的结论可推广到两个以上不合作随从的情况，这种推广很直接，无需多述，本文

只讨论了随从目标函数是凸函数时的诱导问题，当随从目标函数是非凸函数时的诱导问题将另文介绍.

## 参 考 文 献

[1] Ho., Y. C., Luh, p. B. and Olsder, G. J.. A control-theoretic View on Incentives. Automatica, 1982, 18(1): 167—179

[2] Salman, M. A., Cruz, J. B., Jr.. An Incentive Model of Duopoly with Government Corrdination. Automatica, 1981, 17(6): 821—829

[3] Basar. T., Olsder, G. J.. Dynamic Noncooperative Game Theory. Academic Press, London/New York, 1982

[4] Zheng, Y. P., Basar, T.. Existence and Derivation of Optimal Affine Incentive Scheme for Stackelberg Games with Partial Information: a Gemetric Approach. Int. J. Control, 1982, 35(6): 997—1011

[5] Zheng, Y. P.. Incentive Control of Humanistic Systems. Proc. of the 10th IFAC World Congress, 1383—1387, Munich, July 1987

[6] 郑应平，多人决策与博奕论. 信息与控制，1987，16(3)：46—50

# Incentive Strategies with Multiple Noncooperative Followers

Xu Chunhui, Chen Ting

(Institute of Sytems Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan)

**Abstract**: This paper deals with incentive problems wherein multiple followers play Nash noncooperative game under the leader's strategy. In view of the ununiqueness of Nash noncooperative equilibrium, we present the concepts of quasiincentive strategy, weak-incentive strategy, and strong-incentive strategy. We get sufficient existence conditions and design methods of quasi-incentive strategy and weak-incentive strategy when the followers' objectives are convex functions, and that of strong-incentive strategy when the followers' objectives are positive quadratic functions. Numerical examples are also given to illustrate the results of this paper.

**Key words**: nash noncooperative equilibrium; quasi-incentive strategy; weak-incentive strategy; strong-incentive strategy