第 8 卷 第 3 期
1991 年 9 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 3
Sept., 1991

具有线性相关系数扰动的鲁棒稳定性分析

忻 欣 冯纯伯
(东南大学自动化所，南京)

摘要：本文在对具有线性相关系数扰动系统的鲁棒稳定性问题的频域分析基础上，提出一种处理此类问题的算法. 此算法具有计算量小的特点. 本文的分析和讨论说明：频域分析法既简单又直观，更容易揭示问题的实质.

关键词：鲁棒性；稳定性

1 引 言

在线性时不变系统的分析和设计中，经常需要分析系统特征多项式的零点的分布. 设一个 n 次特征多项式为

$$P(s)=\sum_{i=0}^{n}a_i s^{n-i},\qquad a_0\neq 0. \tag{1}$$

由于系统建模误差，系统参数存在不确定性等原因，使得 $P(s)$ 的系数 a_i 不可避免地要受到扰动. 这样，多项式 $P(s)$ 就变成了多项式族 $\mathscr{P}_g(s)$. 若 $\mathscr{P}_g(s)$ 中每个多项式的零点都在复平面 C 上的一个集合 D 内，则称系统是 D 域稳定的，或称系统是鲁棒稳定的. 当 D 为左半开复平面时，称系统是严格稳定的.

Kharitonov 定理指出：若四个特殊构造的多项式是严格稳定的，则区间多项式(多项式的每个系数的值独立地位于某一区间内)是严格稳定的[1]. 显然，Kharitonov 定理只解决了一类特殊的鲁棒稳定问题，有其局限性[2]. 因为通常系统的某一基本参数会进入 $P(s)$ 的多个系数中，而对 $P(s)$ 来说，其某一系数常常包含多个基本参数，这些都会导致系数 a_i 的扰动非独立. 如果一个多项式族 $\mathscr{P}(s)$ 的系数的扰动是线性相关的，则在多项式系数空间中，$\mathscr{P}(s)$ 的系数组成一凸多面体. 棱线定理指出：若凸多面体的一切棱线都是 D 域稳定的，则整个凸多面体是 D 域稳定的[3]. 随着不确定参数个数的增加，凸多面体的顶点数和棱线数迅速增加，故判别所有棱线 D 域稳定所需的计算量迅速增加. 为了解决棱线定理所带来的计算量的问题，[2]构造了一个 $H(\delta)$ 函数来分析 $\mathscr{P}(s)$ 的 D 域稳定，本文将说明该方法所需的计算量仍然较大.

本文从频域角度直接分析了具有线性相关系数扰动的鲁棒稳定性问题，提出了一种判别具有线性相关系数扰动的多项式族 $\mathscr{P}(s)$ 的 D 域稳定的除零(剔除原点)算法. 此算法具有计算量小的特点. 本文还对[2]和[3]中的一些结论进行了讨论.

2 除零算法及应用

2.1 预备知识

本文于1989年11月14日收到. 1990年9月收到修改稿.

为简单起见，我们假定区域 D 是一单连通区域.

引理 1[4]　设多项式 $P(s,q)=\sum_{i=0}^{n}a_i(q)s^{n-i}$，系数 $a_i(q)$ 是扰动参数向量 q 的连续函数. 设多项式族 $\mathscr{P}_g(s)=\{P(s,q),a_0(q)\neq 0,q\in Q\}$，其中 Q 是 R^k 中的有界闭集. 记 ∂D 是区域 D 的边界，设 $s_0\in\partial D$. 定义多项式族的值集

$$V_g(s_0)=\{P(s_0,q),q\in Q\}. \tag{2}$$

如果至少存在一个 q^* 使得 $P(s_0,q^*)$ 是 D 域值稳定的，则 $\mathscr{P}_g(s)$ 是 D 域稳定的充要条件是

$$P(s_0,q)\neq 0, \tag{3}$$

对所有 $q\in Q$ 和 $s_0\in\partial D$ 都成立，即原点在 $V_g(s_0)$ 之外.

引理 1 的主要依据是多项式的根是多项式系数的连续函数. 当 q 连续变化时，$a_i(q)$ 连续变化，多项式的根也连续变化. [4]对 D 为左半开复平面和 $a_0(q)=1$ 时给出了引理 1 的结论. 本文称引理 1 中的式(3)为除零条件. 为了判断除零条件是否成立，获得 $V_g(s_0)$ 是很重要的，但对 $a_i(q)$ 为 q 的一般性的连续函数时，$V_g(s_0)$ 是不易获得的[5][6].

现在讨论 $\mathscr{P}_g(s)$ 中的一类特殊的多项式族——具有线性相关系数扰动的多项式族，简记为 $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ 可表示为已知的 r 个 n 次多项式 $P_1(s),P_2(s),\cdots,P_r(s)$ 的凸组合，即

$$\mathscr{P}=\mathrm{conv}\{P_1(s),P_2(s),\cdots,P_r(s)\}. \tag{4}$$

假定 $\mathscr{P}$ 中每个多项式的阶次均为 n.

引理 2[2]　对于 $\mathscr{P}$，其值集 $V(s_0)$ 是一个凸多边形，即

$$V(s_0)=\mathrm{conv}\{P_1(s_0),P_2(s_0),\cdots,P_r(s_0)\}. \tag{5}$$

由引理 1 和 2，我们得如下推论.

推论 1　$\mathscr{P}$ 是 D 域稳定的充要条件是对于所有 $s_0\in\partial D$，原点在 $V(s_0)$ 之外.

2.2　除零算法

由引理 2 知，凸多边形 $V(s_0)$ 的项点集合是 $\{P_1(s_0),P_2(s_0),\cdots,P_r(s_0)\}$ 的一个子集，因此由各个 $P_i(s)$ 在复平面上的相对位置就可知道原点是否在 $V(s_0)$ 之外. 下面给出的除零算法就是基于上述结论的. 不失一般性，设 $P_i(s)(i=1,2,\cdots,r)$ 是 D 域稳定的. 除零算法：

第一步：对于固定的 s_0，计算 $P_i(s_0)$ 和它们相应的幅角 α_i，$0\leqslant\alpha_i<2\pi$.

第二步：根据 α_i 的值知 $P_i(s_0)$ 属于第几象限，若 $P_i(s_0)$ 恰好位于坐标轴上，则定义 $P_i(s_0)$ 属于那相邻的两个象限.

第三步：记第 j 个象限中幅角的最小值和最大值为 φ_j^- 和 φ_j^+. 进行判断，原点在 $V(s_0)$ 之外的充要条件是如下情况之一成立.

情况 1：所有 $P_i(s_0)$ 均在一个象限内；

情况 2：所有 $P_i(s_0)$ 均在相邻的两个象限内；

情况 3：若有 $P_i(s_0)$ 分布在对顶象限内，且满足

$$\varphi_{j+2}^+-\varphi_j^-<\pi,\qquad j=1,2. \tag{6}$$

或者，

$$\varphi_{j+2}^--\varphi_j^+>\pi,\qquad j=1,2. \tag{7}$$

第四步：改变 s_0，重复上述各步，至 s_0 扫过 ∂D.

情况 3 包括 $P_i(s)$ 仅分布在对顶象限和在三个象限内的两种情形. 另外，(6)和(7)是不可能同时成立的. 此算法能判别出原点是否在 $V(s_0)$ 之外，其证明是容易的，这里就从

略了.从 $V(s_0)$ 顶点的幅角分布来看,若所有的幅角值越接近,则原点就越可能在 $V(s_0)$ 之外;反之,则 $V(s_0)$ 越可能含原点.例如,若 $P_i(s_0)$ 分布在四个象限内,则 $V(s_0)$ 必含原点.对固定的 s_0,除零算法只需进行几次简单的计算和判断,故计算量较小.

2.3 讨论及除零算法的应用

1) 与[2]方法的比较

[2]依据这样一个事实:如果凸多边形不含原点,则必可找到一条过原点的直线 W,使凸多边形在此直线的同一边,见图1.为此,[2]构造了一个 $H(\delta)$ 函数,若 $H(\delta)>0$ 就可保证直线 W 是存在的.对于固定的 s_0,为了求得 $H(\delta)$ 的值需要对 Φ 在 $[0,2\pi)$ 内进行一维寻优,增加了计算量.本文的算法直接利用 $P_i(s_0)$ 的幅角之间的关系来判别 $V(s_0)$ 是否含原点,避免了一个寻优过程.例如,在图1中,由 $\varphi_A-\varphi_B<\pi$ 就可知 $V(s_0)$ 不含原点,其中 φ_A 和 φ_B 分别是 A 和 B 点的幅角.

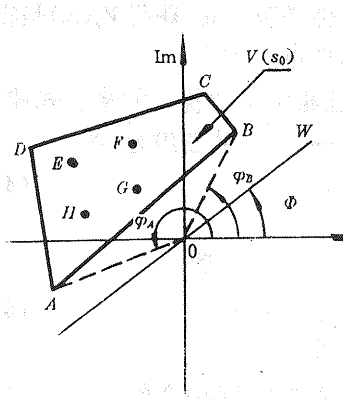

图1 值集 $V(s_0)$ 不含原点

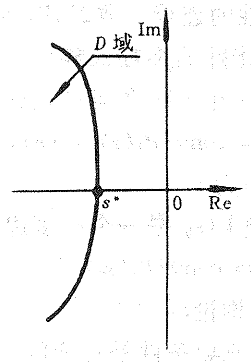

图2 D 域与实轴存在最右边相交点 s^*

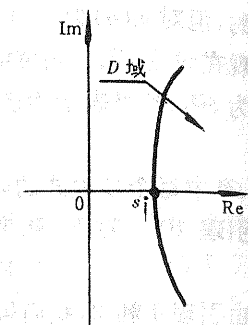

图3 D 域与实轴存在最左边相交点 s^*

2)棱线定理的讨论

若凸多面体的所有棱线均是 D 域稳定,则整个凸多面体是 D 域稳定的,文献中一般把此结论称为棱线定理(见[3]中的推论1和2).从频域上,我们可以这样证明和理解它.

因为多项式 $P_i(s)$ 是关于 s 的连续函数,所有 $V(s)$ 随 s 的连续变化也连续变化.$V(s_0)$ 对所有 $s_0\in\partial D$ 都不含原点等价于存在 $s^*\in\partial D$ 使得 $V(s^*)$ 不含原点,且 $V(s_0)$ 的边对所有 $s_0\in\partial D$ 都不通过原点.从(4)知,若凸多面体所有棱线都是 D 域稳定的,则 $V(s_0)$ 的边对所有 $s_0\in\partial D$ 一直不过原点.在[3]中分析的首项系数为1的实系数凸多面体的 D 域稳定性,D 为单连通区域.由于是实多项式族,故若 $P_i(s)$ 有复数根,则必以复共轭对出现.设 s^* 为 D 域和实轴最右边的或最左边的交点,见图2和3.由于所有 $P_i(s)$ 是 D 域稳定的,则所有 $P_i(s^*)$ 具有相同的正负性,故 $V(s^*)$ 不含原点.这样就证明了棱线定理.

3) 应用

我们可以用除零算法分析区间系统的严格稳定性[7].由引理1和2,我们也可证明[7]的箱子定理.此外,在对区域 D 作些限制后,上述的除零算法也适用于分析具有线性相关扰动的准多项式族(含 $e^{-\tau s}$ 项)的 D 域稳定性,限于篇幅.这里就不介绍了.

结 论

本文对具有线性相关系数扰动的鲁棒稳定问题进行了分析，提出的除零算法可以很容易地判别原点是否在值集 $V(s_0)$ 之外，从而可以判别多项式族 $\mathscr{P}$ 是否 D 域稳定．对更一般的系数扰动的鲁棒稳定问题，尤其是参数多线性扰动的鲁棒稳定问题，有待进一步的讨论，频域方法可能更为有效．

参 考 文 献

[1] Kharitonov, V. L.. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations. Differential, Uraven, 1978, 14(11): 2086—2088

[2] Barmish, B. R.. A Generalization of Kharitonov's Four-polynomial Concept for Robust Stability Problems with Linearly Dependent Coefficient Perturbations. IEEE 1989, AC-34(2): 157—165

[3] Bartlett, A. C., Hollot, C. V. and Huang, L.. Root locations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges, Math. Contr., Signals, Syst., 1987, (1): 61—71

[4] Barmish, B. R.. New Tools for Robustness Analysis. Proceeding of the IEEE Conference of Decision and Control, Austin, 1988, 1—6.

[5] Saeki, M.. A Method of Robust Stability Analysis with Highly Structured Uncertainties. IEEE 1986, AC-31(10): 935—940.

[6] De Gaston, R. R. E., and Safonov, M. G.. Calculation of Multiloop Stability Margin. IEEE 1988, AC-33(2): 156—171.

[7] Chapellat, H., Bhattacharyya, S. P.. A Generaliztion of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants. IEEE 1989, AC-34(4): 306—311.

The Analysis of Robust Stabilty Problems with Linearly Dependent Coefficient Perturbations

Xin Xin, Feng Chunbo

(research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing)

Abstract: The frequency-domain approach for the analysis of robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations is discussed in this paper. A simple algorithm which needs a little calculation is proposed for the problems. It is found that the frequency—domain analysis is simple, direct and easy to reveal the essence of the problems.

Key words: robustness; stability