第 8 卷第 4 期
1991 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 4
Dec. , 1991

渔业资源系统的可控性与最优捕捞策略*

曾晓军
（厦门大学计算机与系统科学系）

摘要：针对我国目前近海渔业资源的过度捕捞状况，本文讨论过度捕捞渔业资源系统的可控性和最优捕捞问题. 文中首先给出了从一个资源状态到另一个资源状态的可控性充要条件和最短到达时间，然后证明了最优捕捞策略的存在性和给出了最优捕捞策略的表达式.

关键词：渔业资源系统；可控性；最短到达时间；最优捕捞策略；最大值原理

1 引　　言

由于长时期忽视资源保护和盲目发展渔业生产，目前已造成我国近海渔业资源处于严重的过度捕捞状态[1]. 针对这种状态，现有的捕捞策略会给渔业种群资源带来什么样的后果，怎样的捕捞策略才能使资源得到恢复、什么样的捕捞策略才是最优的等具有重要实际意义的渔业生产问题都可归结为渔业资源系统的可控性和最优捕捞问题. 本文的目的是应用可控性和最优控制理论给出这些问题的解答.

研究渔业资源系统的最优捕捞策略目前主要有两种方法：一是静态优化方法[2,3]，这种方法的主要不足是忽略了系统的动态变化过程，因而无法用于解决在资源过度捕捞状态下最优捕捞策略的确定问题；另一种方法是以最大值原理为工具的动态研究，其最优捕捞策略是以最大捕捞和不捕捞构成的 bang-bang 策略[4]，然而由于我国近海捕捞生产涉及千家万户渔区人民的生活，不捕捞策略是完全不可行的. 因此现有理论和方法无法解决我国渔业生产所面临的问题，因而有必要建立适合目前我国海洋捕捞生产状况的渔业生产控制和优化理论. 本文的研究是这方面努力的一个结果.

2 渔业资源系统的解表示与性质

设渔业种群资源系统的动态数学模型为[4,5]

$$\dot{x}(t) = rx(t)\left[1 - \frac{x(t)}{m}\right] - u(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

其中 $x(t)$ 表示种群资源在时刻 t 的数量，常数 $r>0$ 表示种群的自然增长率，常数 $m>0$ 表示环境条件所允许的种群资源最大数量，$u(t)\geqslant 0$ 表示时刻 t 的捕捞收获量，x_0 表示种群的初态. 另外文中始终假设 $u(t)$ 是分段连续的. 由于资源数量总是大于零的，为避免无实际意义的情形，给出系统(1)解定义如下.

定义 1　给定 $u(t)\geqslant 0$，如果在 $[0,T]$ 上有 $x_u(t)>0$ 且满足(1)、(2)，则称 $x_u(t)$ 为方程(1)在区间 $[0,T]$ 的解. 记 $T^*=\sup\{T\mid x_u(t)>0, t\in[0,T]$ 且满足(1)、(2)$\}$，称 $[0,T^*]$ 为解

---

* 本文工作得到中科院管理、决策与信息系统开放实验室和厦门大学育苗基金资助.
本文于1990年2月22日收到. 1991年6月5日收到修改稿.

$x_u(t)$的最大存在区间.

以下在不至于混淆的情况下有时省去 $x_u(t)$的下标 u 而简记为 $x(t)$. 另外为叙述方便,当 $u(t)\equiv c$(常数)时,记其相应的解为 $x_c(t)$.

命题 1[注] 设 $u(t)\equiv u_0$,则

1) 当 $u_0>\frac{rm}{4}$时,

$$x_{u_0}(t)=\frac{m}{2}+c\cdot\operatorname{tg}\left[-\frac{cr}{m}t+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_0-\frac{m}{2}}{c}\right)\right],\quad 0\leqslant t\leqslant T^* \tag{3}$$

是$[0,T^*]$上的严格单调整下降函数且 $x_{u_0}(T^*)=0$,这里

$$T^*=\frac{m}{cr}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_0-\frac{m}{2}}{c}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{m}{2c}\right)\right],\quad c=\sqrt{\frac{mu_0}{r}-\frac{m^2}{4}}. \tag{4}$$

2) 当 $u_0=\frac{rm}{4}$时,对 $0\leqslant t\leqslant T^*$,

$$x_{u_0}(t)=\begin{cases}\dfrac{m}{2}+\dfrac{1}{\dfrac{r}{m}t+\dfrac{2}{2x_0-m}} & \text{当 } x_0>\dfrac{m}{2}\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{m}{2} & \text{当 } x_0=\dfrac{m}{2}\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{-\dfrac{r}{m}t+\dfrac{2}{m-2x_0}} & \text{当 } x_0<\dfrac{m}{2}\text{ 时}.\end{cases} \tag{5}$$

当 $x_0>\frac{m}{2}$时,$T^*=+\infty$,$x_{u_0}(t)$在$[0,+\infty)$上严格单调下降且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x_{u_0}(t)=\frac{m}{2}$;当 $x_0<\frac{m}{2}$时,$T^*=\frac{4x_0}{r(m-2x_0)}$,$x_{u_0}(t)$在$[0,T^*]$上严格单调下降且 $x_{u_0}(T^*)=0$;当 $x_0=\frac{m}{2}$时,$T^*=+\infty$.

3) 当 $0\leqslant u_0<\frac{rm}{4}$时,对 $0\leqslant t<T^*$,

$$x_{u_0}(t)=\begin{cases}\dfrac{m}{2}+c\dfrac{1+e^{h(t)}}{1-e^{h(t)}} & \text{当 } x_0>\dfrac{m}{2}+c\text{ 或 }0<x_0<\dfrac{m}{2}-c\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{m}{2}+c\dfrac{1-e^{h(t)}}{1+e^{h(t)}} & \text{当}\dfrac{m}{2}-c<x_0<\dfrac{m}{2}+c\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{m}{2}-c & \text{当 } x_0=\dfrac{m}{2}-c\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{m}{2}+c & \text{当 } x_0=\dfrac{m}{2}+c\text{ 时}.\end{cases} \tag{6}$$

其中,$h(t)=d-\frac{2rc}{m}t$, $d=\ln\left|\dfrac{x_0-\frac{m}{2}-c}{x_0-\frac{m}{2}+c}\right|$, $c=\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m}{r}u_0}$.

当 $0<x_0<\frac{m}{2}-c$ 时,$T^*=\frac{m}{2rc}\ln\left[\frac{(m+2c-2x_0)(m-2c)}{(m-2c-2x_0)(m+2c)}\right]$,$x_{u_0}(t)$在$[0,T^*]$严格单调下

注:由于篇幅所限,文中略去大部分证明.

降且 $x_{u_0}(T^*)=0$;

当 $\frac{m}{2}-c<x_0<\frac{m}{2}+c$ 时,$T^*=+\infty$,$x_{u_0}(t)$ 在 $[0,T^*)$ 严格单调上升且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x_{u_0}(t)=\frac{m}{2}+c$;

当 $x_0>\frac{m}{2}+c$ 时,$T^*=+\infty$,$x_{u_0}(t)$ 在 $[0,T^*)$ 严格单调下降且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x_{u_0}(t)=\frac{m}{2}+c$;

当 $x_0=\frac{m}{2}-c$ 或 $x_0=\frac{m}{2}+c$ 时,$T^*=+\infty$.

命题 2 对相同的种群初态 x_0,若在 $[0,T]$ 上 $u_1(t)\geqslant u_2(t)$,则 $x_{u_1}(t)\leqslant x_{u_2}(t)$;若 $u_1(t)>u_2(t)$,则 $x_{u_1}(t)<x_{u_2}(t)$.

由命题 1 与命题 2 可得:

命题 3 1) 若 $u(t)\geqslant u_0>\frac{rm}{4}$,则 $x(t)$ 严格单调下降且在有限时间内趋于零;2) 若 $x_0<\frac{m}{2}$ 且 $u(t)\geqslant u_0>rx_0(1-\frac{x_0}{m})$,则 $x(t)$ 严格单调下降且在有限时间内趋于零;3) 若 $x_0\leqslant\frac{m}{2}$ 且 $u(t)\leqslant u_0<rx_0(1-\frac{x_0}{m})$,则存在一区间 $[0,T]$ 使得 $x(t)$ 在 $[0,T]$ 上严格单调上升趋于 $\frac{m}{2}+c$,这里 $c=\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m}{r}u_0}$.

直观解释:命题 3 之 1)说明当捕获量超过 $\frac{rm}{4}$ 时,资源将逐步减少.若长期超过 $\frac{rm}{4}$,资源就可能衰竭甚至绝种.我国近海部分种群(如大小黄鱼)资源衰竭就是由此造成的;命题 3 之 2)说明对已过度捕捞(即 $x_0<\frac{m}{2}$)的种群资源,若捕获量大于 $rx_0(1-\frac{x_0}{m})$,则资源数量将继续减少甚至绝种.目前部分渔区制订的规划或计划中对某些过度捕捞种群采用了超过 $rx_0(1-\frac{x_0}{m})$ 的指标,由此结果知这将导致资源的进一步破坏;命题 3 之 3)说明对已过度捕捞种群只要把捕获量控制在 $rx_0(1-\frac{x_0}{m})$ 之下,资源即可逐步恢复.

3 渔业资源系统的可控性

这一节将讨论渔业资源系统的可控性.首先设最大和最小允许捕捞收获量为 $u_{\max}$ 和 $u_{\min}$.

定义 2 种群资源状态 x_0 称为可控至资源状态 x_T,如果存在一有限时刻 T 和 $[0,T]$ 上的分段连续函数 $u(t)$ $(u_{\min}\leqslant u(t)\leqslant u_{\max})$ 使得 $x_u(T)=x_T$.

命题 4 若 $x_T>x_0$,则 x_0 可控至 x_T 的充要条件是 1) $u_{\min}<rx_0(1-\frac{x_0}{m})$; 2) $x_T<\frac{m}{2}+c$,这里 $c=\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m}{r}u_{\min}}$.

命题 5 设 $x_0>x_T$,1) 若 $x_0\leqslant\frac{m}{2}$,则 x_0 可控至 x_T 的充要条件是 $u_{\max}>rx_0(1-\frac{x_0}{m})$; 2) 若 $x_0>\frac{m}{2}$,则 x_0 可控至 x_T 的充要条件是 $u_{\max}>\frac{rm}{4}$ 或 $\frac{rm}{4}\geqslant u_{\max}>rx_0(1-\frac{x_0}{m})$ 且 $x_T>\frac{m}{2}+c$,这里 $c=\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m}{r}u_{\max}}$.

命题 6 若 $x_0=x_T$,则 x_0 可控至 x_T 的充要条件是 $u_{\min}\leqslant rx_0(1-\frac{x_0}{m})\leqslant u_{\max}$.

若已知 x_0 可控至 x_T，下面将讨论从 x_0 达到 x_T 的最短时间(记为 $T(x_0,x_T)$)的确定问题. 当 $x_0<\frac{m}{2}$，$x_T=\frac{m}{2}$时，此问题即所谓资源快速恢复问题[5].

命题 7 1) 若 $x_T>x_0$ 且 x_0 可控至 x_T，则使得 x_0 达到 x_T 的最短时间

$$T(x_0,x_T)=\frac{m}{2cr}\ln\left[\frac{(2c-2x_0+m)(2c+2x_T-m)}{(2c+2x_0-m)(2c-2x_T+m)}\right]. \tag{7}$$

其中 $c=\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m}{r}u_{\min}}$.

2) 设 $x_T<x_0$ 且 x_0 可控至 x_T，那么

1° 若 $u_{\max}>\frac{rm}{4}$，则

$$T(x_0,x_T)=\frac{m}{cr}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x_0-m}{2c}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x_T-m}{2c}\right)\right]. \tag{8}$$

其中，$c=\sqrt{\frac{m}{r}u_{\max}-\frac{m^2}{4}}$；

2° 若 $u_{\max}=\frac{rm}{4}$，则

$$T(x_0,x_T)=\begin{cases}\frac{m}{r}\left(\frac{2}{2x_T-m}-\frac{2}{2x_0-m}\right) & \text{当 } x_0>\frac{m}{2}\text{ 时},\\ \frac{m}{r}\left(\frac{2}{m-2x_0}-\frac{2}{m-2x_T}\right) & \text{当 } x_0<\frac{m}{2}\text{ 时}.\end{cases} \tag{9}$$

3° 若 $\frac{rm}{4}>u_{\max}>rx_0\left(1-\frac{x_0}{m}\right)$，则

$$T(x_0,x_T)=\begin{cases}\frac{m}{2cr}\ln\left[\frac{(m+2c-2x_0)(m-2c-2x_T)}{(m-2c-2x_0)(m+2c-2x_T)}\right] & \text{当 } x_0<\frac{m}{2}\text{ 时},\\ \frac{m}{2cr}\ln\left[\frac{(2x_0-2c-m)(2x_T+2c-m)}{(2x_0+2c-m)(2x_T-2c-m)}\right] & \text{当 } x_0>\frac{m}{2}\text{ 时}.\end{cases} \tag{10}$$

注 1 文[5]用最大值原理讨论资源快速恢复问题. 由命题 4，资源恢复是有条件的(即要求 $u_{\min}<rx_0\left(1-\frac{x_0}{m}\right)$)，若此条件不满足，则快速恢复问题无解. 然而文[5]中没有指出这一条件，故这一节的内容同时也完善了文[5]的结果.

4 渔业资源系统的最优捕捞策略

对一个已过度捕捞(即资源数量低于$\frac{m}{2}$)的种群资源，选取捕捞策略一要促使资源恢复(即使资源数量逐步恢复至$\frac{m}{2}$以上)，二要获取尽可能大的捕获量，这样的捕捞策略选取问题可定量化为如下的优化问题：给定系统(1)和初态 $x_0<\frac{m}{2}$，系统终端约束 $x(T)\geqslant\frac{m}{2}$(T 固定). 现要求一允许策略 $u(t)$，$t\in[0,T]$，使得目标函数

$$J(u)=\int_0^T|u(t)|\mathrm{d}t=\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \tag{11}$$

达到最大，也即使得捕获量最大. 这里允许策略空间定义为

$$U=\{u(t)\,|\,u(t)\text{ 是}[0,T]\text{上分段连续函数},\quad u(t)\in[u_{\min},u_{\max}]\text{ 且 } x_u(T)\geqslant\frac{m}{2}\}. \tag{12}$$

当上述优化问题有解时，记最优解为 $u^*(t)$，称其为最优捕捞策略，而相应的状态轨迹记为

$x^*(t)$，称之为最优轨迹. 由于极大化 $J(u)$ 等价于极小化 $-J(u)\triangleq\bar{J}(u)$，以下为叙述方便，最优捕捞策略的存在性和求解都将根据极小化

$$\bar{J}(u)=-J(u)=\int_0^T -u(t)\mathrm{d}t \tag{13}$$

进行.

为使上述优化问题完整和有意义，首先必须确定最小和最大允许捕获量 $u_{\min}$ 和 $u_{\max}$. 由命题 4 知要使 $x(T)\geqslant\frac{m}{2}$，必须 $u_{\min}<rx_0\left(1-\frac{x_0}{m}\right)$，因此 $u_{\min}$ 的选取应综合考虑海区渔户生活的需要和资源过度捕捞程度等因素在区间 $\left(0,rx_0(1-\frac{x_0}{m})\right)$ 内选取. 而对 $u_{\max}$ 的选取，应选取 $u_{\max}\geqslant\frac{rm}{4}$，因为资源恢复到 $\frac{m}{2}$ 可能在小于 T 的某个时刻发生，在此之后，若 $u_{\max}<\frac{rm}{4}$，则资源数量将严格单调上升(由命题 3 之 3)得)，而资源的自然增长量却随之严格单调下降(因当 $x\geqslant\frac{m}{2}$ 时，$rx(1-\frac{x}{m})\triangleq F(x)$ 是 x 的严格单调下降函数)，这样一方面降低了资源的再生能力，另一方面又失去获得更大捕获量的可能，故选取 $u_{\max}<\frac{rm}{4}$ 是不合理的. 在选取 $u_{\min}\in(0,rx_0(1-\frac{x_0}{m}))$，$u_{\max}\geqslant\frac{rm}{4}$ 后，只需 $T\geqslant T(x_0,\frac{m}{2})$(由命题 7 式(7)给出)，则有允许策略存在(如 $u(t)\equiv u_{\min}$，$t\in[0,T]$ 是一允许策略)，也即上述优化问题是有意义的. 在这一节里，我们始终假设 $u_{\min}\in(0,rx_0(1-\frac{x_0}{m}))$，$u_{\max}\geqslant\frac{rm}{4}$ 和 $T\geqslant T(x_0,\frac{m}{2})$.

命题 8　最优捕捞策略是存在的.

证　由[6]定理 5.1 可得，详见文[7].

由于最优策略是存在的，故可利用最大值原理进行求解. 构造哈密顿函数为

$$H(\lambda,u,x)=-u+\lambda[rx(1-\frac{x}{m})-u]. \tag{14}$$

由最大值原理知，若 $u^*(t)$ 和 $x^*(t)$ 是最优策略和最优轨迹，则存在 $\lambda(t)$ 使得

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H(\lambda,u^*,x^*)}{\partial x}=-[r-\frac{2r}{m}x^*(t)]\lambda(t). \tag{15}$$

且最优策略 $u^*(t)$ 使得 $H(\lambda,u,x^*)$ 达到最小，由此可得

$$u^*(t)=\begin{cases}u_{\min} & \text{当 } \lambda(t)<-1 \text{ 时},\\ u_{\max} & \text{当 } \lambda(t)>-1 \text{ 时}.\end{cases} \tag{16}$$

当 $\lambda(t)=-1$ 时，出现奇异情况. 然而若存在 $[t_1,,t_2]\subset[0,T]$ 上有 $\lambda(t)\equiv-1$，则由式(15)得在 $[t_1,t_2]$ 上有

$$0=r-\frac{2r}{m}x^*(t),$$

也即

$$x^*(t)=\frac{m}{2},$$

代入状态方程(1)得 $u^*(t)=\frac{rm}{4}$，由此及式(16)得最优策略满足

$$u^*(t)=\begin{cases}u_{\min} & \text{当 } \lambda(t)<-1 \text{ 时},\\ \dfrac{rm}{4} & \text{当 } \lambda(t)=-1 \text{ 时},\\ u_{\max} & \text{当 } \lambda(t)>-1 \text{ 时}.\end{cases} \tag{17}$$

故为得到 $u^*(t)$的显式表达式,需先知 $\lambda(t)$的数值分布.

命题 9 若 $u^*(t)$和 $x^*(t)$是最优策略和最优轨迹,$\lambda(t)$满足(15),则当 $t\in[0,T(x_0,\frac{m}{2})]$时,$\lambda(t)<-1$;当 $t\in[T(x_0,\frac{m}{2}),T]$时,$\lambda(t)=-1$.

证明见文献[7].

综合命题 9 与式(17)可得如下结论(详见[7]).

定理 对一个已过度捕捞的渔业种群系统,以捕获量最大为目标和以资源恢复至$\frac{m}{2}$以上(即 $x(T)\geqslant\frac{m}{2}$)为终端条件的渔业资源系统优化问题,最优捕捞策略存在唯一,且由下式给出

$$u^*(t)=\begin{cases}u_{\min} & \text{当 } t\in[0,T(x_0,\frac{m}{2})] \text{ 时},\\ \dfrac{rm}{4} & \text{当 } t\in[T(x_0,\frac{m}{2}),T] \text{ 时}.\end{cases} \tag{18}$$

其相应的最优轨迹 $x^*(t)$和最优目标函数值 J^*为

$$x^*(t)=\begin{cases}\dfrac{m}{2}-c\dfrac{1-e^{h(t)}}{1+e^{h(t)}} & \text{当 } t\in[0,T(x_0,\frac{m}{2})) \text{ 时},\\ \dfrac{m}{2} & \text{当 } t\in[T(x_0,\frac{m}{2}),T] \text{ 时},\end{cases} \tag{19}$$

$$J^*=J(u^*)=u_{\min}\cdot T(x_0,\frac{m}{2})+\frac{rm}{4}[T-T(x_0,\frac{m}{2})]. \tag{20}$$

这里,$h(t)=d-\frac{2cr}{m}t,\quad d=\ln\left[\frac{2c+m-2x_0}{2c-m+2x_0}\right],\quad c=\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m}{r}u_{\min}}$.

注 2 由上述定理易证最优捕捞策略也可表示为闭环形式

$$u^*[x(t)]=\begin{cases}u_{\min} & \text{当 } x(t)<\dfrac{m}{2} \text{ 时},\\ \dfrac{rm}{4} & \text{当 } x(t)=\dfrac{m}{2} \text{ 时}.\end{cases} \tag{21}$$

由于 $x_0<\frac{m}{2}$时最优状态轨迹上不出现大于$\frac{m}{2}$的情形,故这一闭环策略是不完整的. 为了获得完整的闭环策略,需考虑 $x_0>\frac{m}{2}$的情形. 用与上述类似的分析步骤可证得当 $x(t)>\frac{m}{2}$时,$u^*(t)=u_{\max}$,把此与(21)式合并即得对任意初态以极大化(11)为目标和以 $x(t)\geqslant\frac{m}{2}$为终端约束的渔业资源系统的优化问题的闭环最优捕捞策略为

$$u^*[x(t)] = \begin{cases} u_{\min} & \text{当 } x(t) < \frac{m}{2} \text{ 时}, \\ \frac{rm}{4} & \text{当 } x(t) = \frac{m}{2} \text{ 时}, \\ u_{\max} & \text{当 } x(t) > \frac{m}{2} \text{ 时}. \end{cases}$$

5 结束语

应用可控性和最优控制理论，本文讨论了具有重要实际意义的渔业资源系统的可控性和优化问题，所得结果可用于渔业资源的分析和管理，也可用于制订捕捞业的生产计划和发展规划. 最近我们在福建省主要渔业县之一的平潭县的渔业资源分析和捕捞业发展规划的制订中应用了本文结果，实践证明这些结果是有用的.

参 考 文 献

[1] 黄锡昌. 国内外海洋捕捞的现状、趋势、差距及发展的预测和意见. 见 2000 年的中国研究资料，第四十集，北京：中国科协 2000 年的中国研究办公室，1985，39—53

[2] 叶昌臣，朱德山. 蓝点鲅渔业的最佳经济效果. 水产学报，1984，8(2)：171—177

[3] 彭万硕. 最优产量的计算方法——研究渔场的情形. 经济数学，1987，4(4)：1—6

[4] C. W. 克拉克著；周勤学等译. 数学生物经济学——更新资源的最优管理. 北京：农业出版社，1984，178—187

[5] 黄小原. 渔业生产的最优捕捞策略. 信息与控制，1988，17(3)：39—41

[6] L. D. 伯科维茨著；贺建勋等译. 最优控制理论. 上海：上海科技出版社，1985，31—59

[7] 曾晓军. 渔业种群系统的最优捕捞策略. 全国第三届决策理论及其应用学术交流会交流论文. 厦门，1988

Controllability and Optimal Catch Strategy of Fishery Resource Systems

Zeng Xiaojun

(Department of Computer and Systems Sciences, Xiamen University)

Abstract: According to the status that the inshore fishery resources in China have been overexploited biologically, this paper discusses the controllability and optimal catch problems for overexploited fishery resource systems. In the first part of this paper, the necessary and sufficient conditions of controllability are obtained and the shortest reach time from one resource state to another is given; In the second part of this paper, the existence of optimal catch strategy is proved and the explicit expression of optimal catch strategy is given.

Key words: fishery resource systems; controllability; the shortest reach time; optimal catch strategy; maximun principle