第8卷第4期
1991年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 4
Dec., 1991

状态反馈系统的 H^∞ 低敏感性的设计*

胡庭姝　施颂椒　张钟俊
(上海交通大学自动控制系)

摘要：本文用状态空间方法对状态反馈系统进行 H^∞ 低敏感设计. 利用 H^∞ 范数与系统状态空间实现的关系，将极点固定条件下的状态反馈系统的 H^∞ 控制问题转化为时域上的鲁棒性问题，并由此提出了反映 H^∞ 范数的目标函数. 该目标函数为反馈矩阵 F 与闭环系统矩阵 $A+BF$ 的特征向量矩阵 V 的函数. 在极点固定的限制条件下，F 与 V 可通过一 $R^{m\times n}\to R^{n\times n}$ 的映射参数化为一 $U\in R^{m\times n}$ 的函数. 这样，目标函数为 U 的泛函，并且 $\partial J/\partial U$ 可以求出. 因此，可用梯度法优化 J，从而使 H^∞ 范数降低. 在梯度法优化中，每项迭代只须求解 $2n$ 个 n 阶代数方程，与传统的 H^∞ 方法求解 Riccati 方程相比，要简单许多. 实例说明，梯度法收敛速度较快，优化效果良好.

关键词：H^∞ 控制；H^∞ 范数；状态反馈；极点配置；梯度法

1 引　言

考虑如下线性系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dv, \tag{1.1a}$$

$$z = E_1x + E_2u + Hv. \tag{1.1b}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 为状态，$u(t)\in R^m$ 为控制，$v(t)\in R^l$ 为干扰，$z(t)\in R^p$ 为被控输出.

设系统状态完全可测，那么在状态反馈　$u=Fx$　下，闭环系统从 v 到 z 的传递函数 $T_s(s)$ 为

$$T_s(s) = (E_1 + E_2F)(sI - A - BF)^{-1}D + H.$$

使 $\|T_s(s)\|_\infty$ 最小化的问题，已在[1～5]中有详尽的讨论. 在[1～3]中证明了用状态反馈所能达到的 $\|T_s(s)\|_\infty$ 的最小值与用动态状态反馈所能达到的一样，并且该最小值可通过求解一 Riccati 方程、检验方程解的正定性，迭代求出.

但[5]指出，在一般情况下，当 $\|T_s(s)\|_\infty$ 趋向于最小值时，F 的参数会趋于无穷大，并且闭环极点与虚轴的距离也越来越远，这种结果在很多场合下是不允许的. 相反，却常要求闭环极点位于一指定区域，或者为给定. 这样，便产生了固定极点条件下的状态反馈系统的 H^∞ 控制问题. 这正是本文所要研究的.

本文采用以下符号：

$R^{m\times n}$：$m\times n$ 阶实矩阵的集合；

C_sA：矩阵 A 的列展开；

R_sA：矩阵 A 的行展开；

$\mathrm{tr}A$：矩阵 A 的迹；

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1990年2月1日收到. 1990年10月4日收到修改稿.

$A\otimes B$：A 与 B 的 Kroneker 积.

关于以上符号的定义，详见[7].

2 数学基础

2.1 H^∞范数与状态空间实现的关系

有关这一问题在[8]中详细讨论过，现给出主要结果.

引理 2.1 设 $F(s)$ 为一真、有理、稳定的传递函数，具有最小状态空间实现为 $F(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$，记

$$A_F=\begin{bmatrix}-A^T & -C^TC\\ 0 & A\end{bmatrix},\quad B_F=\begin{bmatrix}-C^TD\\ B\end{bmatrix},$$

$$C_F=[B^T\quad D^TC],\quad D_F=D^TD.$$

则有 $\|F(s)\|_\infty=\sup\{k;\quad A_F+B_F(k^2I-D_F)^{-1}C_F$ 在虚轴上有特征值$\}$. 如果 $D=0$，则

$$\|F(s)\|_\infty=\sup\left\{k;\quad \begin{bmatrix}-A^T & -C^TC\\ BB^T/k^2 & A\end{bmatrix}\text{在虚轴上有特征值}\right\}.$$

2.2 配置系统极点的 F 与 V 的参数化

定义 2.1 设 (A,B) 可控，A_1 为对角阵，具有所要配置的特征值 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. A 与 A_1 无相同特征值，那么，定义 $R^{m\times n}\to R^{m\times n}$ 的函数 f 和 $R^{m\times n}\to R^{n\times n}$ 的函数 f_0 如下：

对于 $U\in R^{m\times n}$，如果方程

$$AV-VA_1=-BU. \tag{2.1}$$

的解 V 非奇异，则 $F=UV^{-1}$ 为 U 在 f 下的象，V 为 U 在 f_0 下的象，简记为：$F=f(U)\in R^{m\times n}$，$V=f_0(U)\in R^{n\times n}$. f 的定义域为所有使得(2.1)的解非奇异的 U 的集合，记为 D_f，f 的值域为 D_f 在 f 下的象，记为 R_f，f_0 的值域为 D_f 在 f_0 下的象，记为 R_{f_0}.

引理 2.2 f 的值域 R_f 等于所有使 $A+BF$ 与 A_1 相似的 F 的集合，f_0 的值域为所有使得 $V^{-1}(A+BF)V=A_1$ 的 V 的集合.

引理 2.3 如果 f 的定义域 D_f 非空，则为 $R^{m\times n}$ 空间中一稠的开集.

引理 2.2 和引理 2.3 的证明参见[6].

以上定义和引理将配置系统极点的 F 和 V 参数化为：

$F=f(U)$，$V=f_0(U)$，$U\in D_f$，D_f 为 $R^{m\times n}$ 空间中的一稠的开集，即几乎所有的 $R^{m\times n}$ 空间的元素都属于 D_f.

3 与 H^∞范数相关的目标函数

系统(1.1)在状态反馈 $u=Fx$ 下，从干扰 v 到输出 z 的传递函数为

$$T_s(s)=(E_1+E_2F)(sI-A-BF)^{-1}D+H. \tag{3.1}$$

先设 $H=0$，这时，由上节的引理 2.1，有

$$\|T_s(s)\|_\infty=\sup\left\{k;\quad \begin{bmatrix}-(A+BF)^T & -(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)\\ DD^T/k^2 & A+BF\end{bmatrix}\text{在虚轴上有特征值}\right\}.$$

设 $A+BF$ 可对角化，且右特征向量矩阵为 V，令 $T=V^{-1}$，则

$$T(A+BF)V=A_1=\operatorname{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n].$$

通过相似变换及求倒数变换可得

$$\frac{1}{\|T_s(s)\|_\infty} =$$

$$= \sup\left\{r_0, \text{当 } r < r_0 \text{ 时}, \begin{bmatrix} -A_1^T & -rV^T(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)V \\ rTDD^TT^T & A_1 \end{bmatrix} \text{在虚轴上没有特征值}\right\}.$$

在配置极点的限制条件下，A_1 为一给定的对角阵，因此，使 $\|T_s(s)\|_\infty$ 最小等效于选择 F 和 V、T，使 $\sup\{r_0;\}$ 最大，后者实际上与一特殊参数扰动下的鲁棒设计相似，只是在鲁棒性中，特征值只从左半平面趋向虚轴，而这里是从左右平面同时对称地靠向虚轴. 与鲁棒设计相似，要使 $\sup\{r_0;\}$ 尽可能地大，可取目标函数为

$$J_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[V^T(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)V] \cdot \mathrm{tr}[TDD^TT^T].$$

其中，$V^{-1}(A+BF)V = A_1$ 为一给定对角阵，$T = V^{-1}$.

使 J_0 最小，便可使 $\|T_s(s)\|_\infty$ 减小.

如果 $H \neq 0$，令

$$S(k) = \begin{bmatrix} -(A+BF)^T & -(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F) \\ 0 & A+BF \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -(E_1+E_2F)^TH \\ D \end{bmatrix}(k^2I - H^TH)^{-1}[D^T \vdots H^T(E_1+E_2F)].$$

则 $\|T_s(s)\|_\infty = \sup\{k: S(k)$ 在虚轴上有特征值$\}$.

和 $H=0$ 时相似，将 $S(k)$ 分为两部分，一部分包含 $k=\infty$ 时 $S(k)$ 的特征值，实际上为 $\{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \cdots, \pm\lambda_n\}$，通过以下相似变换

$$\begin{bmatrix} V^T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} S(k) \begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^T & -V^T(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)V \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -V^T(E_1+E_2F)^TH \\ TD \end{bmatrix}(k^2I - H^TH)^{-1}[D^TT^T \vdots H^T(E_1+E_2F)V].$$

要使 $\|T_s(s)\|_\infty$ 减小，可取目标函数为

$$J = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[V^T(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)V] \cdot \mathrm{tr}[TDD^TT^T + V^T(E_1+E_2F)^THH^T(E_1+E_2F)V].$$

其中，$V^{-1}(A+BF)V = A_1$，为给定对角阵，$T = V^{-1}$.

说明：本节假设 A_1 为对角阵，如果 A_1 的特征值有共轭复根，如 $\lambda_i, \lambda_{i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ 可取 $A_1 = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \cdots, \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \cdots, \lambda_n\right]$ 以避免复数出现.

4 目标函数的优化

利用第2节所定义的函数 f 和 f_0，可将优化问题

$$\min J = \min\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V^T(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)V]\mathrm{tr}[TDD^TT^T$$
$$+ V^T(E_1+E_2F)^THH^T(E_1+E_2F)V].$$

满足：$V^{-1}(A+BF)V = A_1$，$T = V^{-1}$. 转化为

$$\min J(U) = \min\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V^T(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)V]\mathrm{tr}[TDD^TT^T$$

$$+ V^T(E_1 + E_2F)^T HH^T(E_1 + E_2F)V].$$

其中，$F=f(U)$，$V=f_0(U)$，$T=V^{-1}$，$U\in R^{m\times n}$.

以下定理给出了对 U 的梯度，由于 J_0 是 J 的特殊情况，此处不再讨论.

定理 4.1 令

$$J_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[V^T(E_1 + E_2F)^T(E_1 + E_2F)V],$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[TDD^TT^T + V^T(E_1 + E_2F)^T HH^T(E_1 + E_2F)V].$$

则 $$J = 2J_1J_2, \quad \partial J/\partial U = 2J_1\partial J_2/\partial U + 2J_2\partial J_1/\partial U.$$

而 $$\partial J_1/\partial U = B^TX^T + [V^T(E_1 + E_2F)^TE_2]^T.$$

X 满足： $$A_1X - XA = V^T(E_1 + E_2F)^TE_1,$$

$$\partial J_2/\partial U = B^TY^T + [V^T(E_1 + E_2F)^THH^TE_2]^T.$$

Y 满足： $$A_1Y - YA = - TDD^TT^TT + V^T(E_1 + E_2F)^THH^TE_1.$$

在证明定理 4.1 之前，先给出以下结果[7]：

1) $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$，$\mathrm{tr}AB=R_sAC_sB=R_sBC_sA$.

2) $AV-VA_1=-BU$ 等效于：$(I_n\otimes A-A_1^T\otimes I_n)C_sV=-(I_m\otimes B)C_sU$，

$A_1X-XA=Q$ 等效于：$-R_sX(I_n\otimes A-A_1^T\otimes I_n)=R_sQ$.

3) $R_s(AB)=R_sA(I_m\otimes B)$.

证(定理 4.1)：

1) $$\partial J_1/\partial U_{ij} = \frac{\partial}{\partial U_{ij}}\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V^T(E_1 + E_2F)^T(E_1 + E_2F)V]\} \quad (F = UV^{-1})$$

$$= \mathrm{tr}[V^T(E_1 + E_2F)^T\frac{\partial}{\partial U_{ij}}(E_1 + E_2UV^{-1})V]$$

$$= \mathrm{tr}[V^T(E_1 + E_2F)^T(E_1\frac{\partial V}{\partial U_{ij}} + E_2\frac{\partial U}{\partial U_{ij}})]$$

$$= R_s[V^T(E_1 + E_2F)^TE_1]\frac{\partial C_sV}{\partial U_{ij}} + R_s[V^T(E_1 + E_2F)^TE_2]\frac{\partial C_sU}{\partial U_{ij}}$$

$$= \{- R_s[V^T(E_1 + E_2F)^TE_1](I_n\otimes A - A_1^T\otimes I_n)^{-1}(I_m\otimes B)$$

$$+ R_s[V^T(E_1 + E_2F)^TE_2]\frac{\partial C_sU}{\partial U_{ij}}.$$

令 $$R_sX = - R_s[V^T(E_1 + E_2F)^TE_1](I_n\otimes A - A_1^T\otimes I_n)^{-1}. \tag{4.1}$$

则 $R_sX(I_m\otimes B)=R_s(XB)$，因而

$$\partial J_1/\partial U = B^TX^T + [V^T(E_1 + E_2F)^TE_2]^T.$$

(4.1)等效于

$$A_1X - XA = V^T(E_1 + E_2F)^TE_1.$$

2) $\partial J_2/\partial U_{ij}=$

$$= \frac{\partial}{\partial U_{ij}}\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[TDD^TT^T + V^T(E_1 + E_2F)^THH^T(E_1 + E_2F)V], \ (F = UV^{-1})$$

$$= \mathrm{tr}[\frac{\partial T}{\partial U_{ij}}DD^TT^T + V^T(E_1 + E_2F)^THH^T(E_1\frac{\partial V}{\partial U_{ij}} + E_2\frac{\partial U}{\partial U_{ij}})], \ (\frac{\partial T}{\partial U_{ij}} = - T\frac{\partial V}{\partial U_{ij}}T)$$

$$=\mathrm{tr}\{[-TDD^TT^TT+V^T(E_1+E_2F)^THH^TE_1]\frac{\partial V}{\partial U_{ij}}+V^T(E_1+E_2F)^THH^TE_2\frac{\partial U}{\partial U_{ij}}\}.$$

和1)相似，有

$$\partial J_2/\partial U=B^TY^T+[V^T(E_1+E_2F)^THH^TE_2]^T.$$

Y 满足：

$$A_1Y-YA=-TDD^TT^TT+V^T(E_1+E_2F)^THH^TE_1.$$

由于 $\partial J/\partial U$ 可求，J 的局部极小点可用梯度法求得. 在某种假设下，可以证明所有局部极小值都相等. 本文的例子也属于这类. 这样，从任何一点 $U\in D_f$ 出发，都可通过梯度法求得最小值. 由于 D_f 是 $R^{m\times n}$ 中一个稠的开集，几乎任选一个 U，$AV-VA_1=-BU$ 的解 V 都为非奇异，可作为迭代的初始点，若用共轭梯度法优化，寻优过程中，U 是不会跑出 D_f 的.

事实上，由于 A_1 为对角阵，J 和 $\partial J/\partial U$ 的求取中的所包含的 Sylvester 方程等效于 n 个 n 阶代数方程，所以比以前所有 H^∞ 优化设计中的迭代都要简单许多.

例　在系统(1.1)中，各状态矩阵取值为

$$A=\begin{bmatrix}-5&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$$E_2=0,\quad H=0.$$

给定闭环极点为：$-2\pm j2$，-4，可令

$$A_1=\begin{bmatrix}-2&2&0\\-2&-2&0\\0&0&-4\end{bmatrix}.$$

选取初始点 U_0 为　$U_0=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，则

$$J_0=76.50,\quad \max[\partial J/\partial U]=492,\quad \|T_s(s)\|_\infty=0.9628,$$
$$J_1=10.14,\quad \max[\partial J/\partial U]=11.36,\quad \|T_s(s)\|_\infty=0.5103,$$
$$J_3=4.58,\quad \max[\partial J/\partial U]=2.30,\quad \|T_s(s)\|_\infty=0.4755,$$
$$J_5=3.14,\quad \max[\partial J/\partial U]=0.36,\quad \|T_s(s)\|_\infty=0.4438,$$
$$J^*=3.125,\quad \max[\partial J/\partial U]=0.00008,\quad \|T_s(s)\|_\infty=0.4395,$$

$$F^*=\begin{bmatrix}-7.1949&9.6781&6.1974\\2.9957&-10.197&-8.996\end{bmatrix}.$$

如果另选初值为 $U_0=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$，所得 J^* 相同，但 F^* 为

$$F^*=\begin{bmatrix}12.0296&-14.0249&-13.0204\\-13.025&9.0204&7.0157\end{bmatrix}.$$

另外还选了几组初值，所得 J^* 都为 3.125.

在以上例子中，共轭梯度法在前 5 步收敛很快，J_5 与 J^* 很接近，但以后收敛较慢，J^* 在大约第 20 步取得.

还可以看出，随着 J 的减小，$\|T_s(s)\|_\infty$ 及 $\max[\partial J/\partial U]$ 都相应减少，说明目标函数很好地反映了 $\|T_s(s)\|_\infty$ 的大小.

以上例子也说明，由不同的初值可达到相同的局部极小值，尽管 F^* 可能不相同. 事实上，在某种特殊假设下，可以证明，$J|_{\partial J/\partial U=0}$ 是个常数. 这样，由任何初始点都可求得 J 的最小值.

假设： $\mathrm{rank}B=n$，$E_2=0$，$H=0$，$\mathrm{rank}(E_1^TE_1)=\mathrm{rank}(DD^T)=l$， 则当 $\partial J/\partial U=0$ 时，有 $B^T(J_1Y^T+J_2X^T)=0$，而 J_1Y+J_2X 满足

$$A_1(J_1Y+J_2X)-(J_1Y+J_2X)A=J_2V^TE_1^TE_1-J_1TDD^TT^TT,$$

因而

$$J_2V^TE_1^TE_1-J_1TDD^TT^TT=0\rightarrow V^TE_1^TE_1V=(J_1/J_2)TDD^TT^T. \tag{4.2}$$

由于 $\mathrm{rank}(DD^T)=l$，所以存在非奇异矩阵 M，使得

$$DD^T=M\begin{bmatrix}I_l & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}M^T.$$

令 $T_1=TM$，$V_1=(T_1)^{-1}=M^{-1}V$，则

$$TDD^TT^T=T_1\begin{bmatrix}I_l & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}T_1^T,\quad V^TE_1^TE_1V=V_1^TM^TE_1^TE_1MV_1.$$

将以上两式代入(4.2)，并分别用 V_1^T 和 V_1 右乘、左乘等式的两边，得

$$V_1V_1^TM^TE_1^TE_1MV_1V_1^T=\begin{bmatrix}\frac{J_1}{J_2}I_l & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

选择一对称正定阵，使

$$M^TE_1^TE_1M=N^T\begin{bmatrix}I_l & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}N. \tag{4.4}$$

由(4.3)可得，$V_1V_1^TN^T=\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{1/2}I_n$，所以，$V_1V_1^T=\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{1/2}N^{-T}$，$\mathrm{tr}V^TE_1^TE_1V=\mathrm{tr}V_1^TM^TE_1^TE_1MV_1$ $=\mathrm{tr}V_1V_1^TN^T\begin{bmatrix}I_l & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}N=\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{1/2}\cdot\mathrm{tr}\begin{bmatrix}I_l & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}N.$

若将 M 分块成 $M=[M_1,M_2]$，$M_1\in R^{n\times l}$，则存在一单元阵 $X\in R^{l\times l}$，使得 $D=M_1X$；再将 N 分块为 $\begin{bmatrix}N_1 & N_2^T\\ N_2 & N_3\end{bmatrix}$，则由(4.4)可得 $M_1^TE_1^TE_1M_1=N_1^TN_1$. 注意到 $D=M_1X$，X 是单元阵，因此，$M_1^TE_1^TE_1M_1$ 的特征值由 D 和 E_1 唯一地确定. 设这些特征值为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 由于 N_1 是对称正定的，所以 $\mathrm{tr}N_1=\Sigma_i(\beta_i)^{1/2}$ 是常数，记为 k，那么，$\mathrm{tr}V^TE_1^TE_1V=\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{1/2}k$，再从(4.2)可知，$TDD^TT^T=\frac{J_1}{J_2}V^TE_1^TE_1V$，因此，

$$J|_{\partial J/\partial U=0}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}V^TE_1^TE_1V\cdot\mathrm{tr}TDD^TT^T=\frac{1}{2}\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{1/2}k\cdot\left(\frac{J_2}{J_1}\right)\cdot\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^{1/2}k=\frac{1}{2}k^2$$

是一个常数.

从以上的推导，还可得出 V^*，T^* 的解析算法，由 $T^*(A+BF^*)V^*=A_1$，及 $\mathrm{rank}B=n$，还可求得 F^*.

5 结 论

本文利用 H^∞ 范数与状态空间实现的关系，将 H^∞ 低敏感控制问题完全用时域的方法求解. 通过优化一种与 H^∞ 范数有关的性能指标来进行 H^∞ 低敏感设计. 实例说明该方法有

明显效果，与传统的 H∞优化设计方法相比要简单许多，且保持了系统具有所期望的动态特性.

参 考 文 献

[1] Zhou, K., Khargonekcr, P. P.. An Algebraic Riccati Eqution Approach to H∞-Optimization. Systems and Control Letters, 1988, 11:85—91

[2] Khagoneker, P. P., Perterson, I. R. and Rotea, M. A.. H∞-Optimal Control with State Feedback. IEEE Trans., 1988, AC-33:786—788

[3] Glover, K., Doyle, J. C.. State Space Formular for All Stabilizing Controllers That Satisfy an H∞-norm Bound to Risk Sensitivity. Systems and Control Letters, 1988, 11:167—183

[4] Doyle J. C. et al. State Space Solution to Standard H^2 and H∞ Control Problems. IEEE, Trans., 1989, AC-34(8):831—847

[5] Scherer, C.. H∞-Control by State Feedback: An Iterative Algorithm and Charaterization of High Gain Occurence. Systems and Control Letters, 1989, 12:333—391

[6] Hu, T. S., Shi, S. J.. The Set of Feedback Matrices That Assign the Poles of a Systems. The Netherlands, MTNS-89

[7] 须田信英著;曹长修译. 自动控制中的矩阵理论. 北京:科学出版社,1979

[8] 张钟俊,施颂椒,胡庭姝. 通过传递函数的状态空间实现求 H∞-范数. 自动化学报,1991,17(2):215—219

H∞-Control by State Feedback Under the Constraint of pole Assignment

Hu Tingshu, Shi Songjiao and Zhang Zhongjun
(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University)

Abstract: A simple relation between the H∞-norm of a transfer matrix and its state space representation is developed. Through this relation, the H∞-control problem by state feedback under the constraint of pole assignment is reduced to a problem similar to robust design, and a performance index related to the H∞-norm is naturally derived. The set of feedback matrices that assign the poles of a system is determined through an $R^{m\times n}\rightarrow R^{m\times n}$ function. Using this function, the performance index related to H∞-norm can be minimized by gradient method. Thus reduce the H∞-norm. In each step of the gradient method, only two special Sylvester equations, which are equivalent to n n-ordered linear algebraic equations, are included. Example show that the convegence speed of the gradient algorithm is fast.

Key words: H∞-control; H∞-norm; state feedback; pole assignment; gradient method