第 8 卷第 4 期
1991 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 4
Dec., 1991

# 控制系统 $l^1$ 优化设计最优解的存在性和次优解*

方华京 涂 健

(华中理工大学自动控制系，武汉)

**摘要**：本文初步研究了控制对象有 $z$ 平面单位圆上零极点时 $l^1$ 优化设计问题解的存在性，指出在此种情况下 $l^1$ 优化问题的最优解不一定总是存在. 提出了解存在性的判别定理. 在最优解不存在时给出了次优解的求取方法.

**关键词**：线性离散系统；最优化；鲁棒控制

## 1 引 言

控制系统 $l^1$ 优化设计理论研究的是：当系统存在不确定的外界持续有界干扰信号时，如何设计一个保证闭环系统内稳定的最优控制器使扰动对系统工作的影响最小，是继 $H^\infty$ 优化理论之后出现的一种更接近实际的控制系统设计理论. 文献[2～4]系统地研究了控制对象在 $z$ 平面单位圆上没有零极点时的 $l^1$ 优化设计问题，证明了解的存在性，不唯一性和给出了几种求解方法. 当控制对象在 $z$ 平面单位圆上有零极点时情况比较复杂，研究起来有一定的困难，目前尚无这方面的结果. 本文初步研究了这种情况下的 $l^1$ 优化设计问题，指出这时最优解不一定总存在，提出了最优解存在性判别定理，在最优解不存在时给出了次优解的求取方法. 最后，给出了一个存在最优解的例子和一个不存在最优解的例子并分析了该例次优解多项式次数与逼近下确界程度的关系.

## 2 预备知识和问题描述

在本文中用 $A$ 表示 $l^1$ 空间全体元素的 $z$ 变换

$$A = \{\hat{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i \mid f = \{f_i\} \in l^1\}.$$

由文献[1,2]知 $A$ 是全体 BIBO 稳定的单变量离散系统脉冲传递函数的集合. 视 $\hat{f} \in A$ 是 $l^\infty$ 空间上的有界线性算子，可有 $\|\hat{f}\|_A = \|f\|_1$.

设被控对象是 $\hat{p}(z)$，参数化[7]内稳定 $\hat{p}(z)$ 的全体控制器后，$l^1$ 最优设计问题可归结为优化问题[2]

$$\mu_0 = \inf_{\hat{q} \in A} \|\hat{h} - \hat{q}\hat{v}\|_A. \tag{2.1}$$

其中，$\hat{h}, \hat{v} \in A$ 由 $\hat{p}$ 确定，$\hat{v}$ 在闭单位圆内的零点由 $\hat{p}$ 在闭单位圆内的零、极点确定.

设 $\hat{v}$ 在闭单位圆内有 $n$ 个零点 $\alpha_i$，为简化下面的叙述设 $\alpha_i$ 互异，（有重零点时可类似讨论）令

$$S = \{k \in l^1 \mid \hat{k}(\alpha_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$g_t = \sum_{i=1}^{n} \{\lambda_i \mathrm{Re}[\alpha_i^t] + \lambda_{n+i} \mathrm{Im}[\alpha_i^t]\}, \quad t = 0, 1, \cdots.$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1990年1月22日收到. 1990年9月18日收到修改稿.

这里 $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2n})$ 是任意实数向量，$g=\{g_t\}\in l^\infty$.

在(2.1)中令 $\hat{k}=\hat{q}\hat{v}$，则 $\hat{q}\in A$ 等价于 $k\in S$，并且有[2]

$$\mu_0=\inf_{k\in S}\|\hat{h}-\hat{k}\|_A=\max\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i\mathrm{Re}[\hat{h}(\alpha_i)]+\lambda_{n+i}\mathrm{Im}[\hat{h}\alpha_i)]\},$$
$$\text{s. t. } |g_t|\leqslant 1,\quad t=0,1,\cdots. \tag{2.2}$$

记(2.2)左侧的优化问题为 Opt. 1，右侧是 Opt. 1 的对偶问题，它的解总是存在[6]. 而 Opt. 1，当 $\hat{v}$ 在单位圆上无零点时，由文献[3]知存在达到下确界 $\mu_0$ 的最优解. 但是，若 $\hat{v}$ 在单位圆上有零点情况就比较复杂，下面的讨论便是为了解决这种情况下最优解的存在性等问题.

## 3 最优解的存在性

由下面第 5 节中的例 2 可知当 $\hat{v}$ 有单位圆上的零点时，Opt. 1 可能不存在最优解. 下面给出关于最优解存在性的几个定理，这些定理不论 $\hat{v}$ 有无单位圆上的零点都成立，是适用于一般情况的结论.

**定理 3.1** 1) 优化问题 Opt. 1 存在最优解 $\hat{k}^*$，使得 $\|\hat{h}-\hat{k}^*\|_A=\mu_0$ 的充分必要条件是下述方程组

$$\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+y_i)=\mu_0, \tag{3.1a}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i\alpha_j^i-\sum_{i=0}^{\infty}y_i\alpha_j^i=\hat{h}(\alpha_j),\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{3.1b}$$

$$x_i\geqslant 0,y_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\cdots \tag{3.1c}$$

至少存在一个解.

2) 若 $x_i^*,y_i^*,i=0,1,\cdots$，是方程组(3.1)的一个解，则 Opt. 1 的最优解是

$$\hat{k}^*=\hat{h}-\sum_{i=0}^{\infty}(x_i^*-y_i^*)z^i. \tag{3.2}$$

证 证明的基本思想和方法与文献[4]中定理 1 的证明类似，略.

记 Opt. 1 对偶问题只取前 $N(N\geqslant n)$ 个约束构成的优化问题为 Opt. 2

$$\mu(N)=\max\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i\mathrm{Re}[\hat{h}(\alpha_i)]+\lambda_{n+i}\mathrm{Im}[\hat{h}(\alpha_i)]\},$$
$$\text{s. t. } |g_t|\leqslant 1,\quad t=0,1,\cdots,N-1.$$

**定理 3.2** 若存在一个正整数 $N$，使得 $\mu(N)=\mu_0$，则 Opt. 1 至少存在一个最优解 $\hat{k}^*$，并且 $\hat{b}^*=\hat{h}-\hat{k}^*$ 是小于 $N$ 次的多项式.

证 取 $n-1$ 次多项式 $\hat{h}_p$，使

$$\hat{h}_p(\alpha_i)=\hat{h}(\alpha_i),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.3}$$

考虑优化问题 Opt. 3

$$\mu_p=\inf_{k_p\in S_p}\|\hat{h}_p-\hat{k}_p\|_A.$$

其中，
$$S_p=\{\hat{k}_p=\sum_{i=0}^{N-1}k_iz^i\,|\,\hat{k}_p(\alpha_i)=0;\quad i=1,2,\cdots,n\}.$$

由式(3.3)易证 Opt. 3 的对偶问题和 Opt. 2 完全相同，所以 $\mu_p=\mu(N)=\mu_0$. Opt. 3 可化为

$N$ 维实向量空间中的最小范数问题，由文献[6]知存在最优解 $\hat{k}_p^*$. 令 $\hat{b}^*=\hat{h}_p-\hat{k}_p^*$，则 $\hat{b}^*$ 是小于 $N$ 次的多项式且 $\|\hat{b}^*\|_A=\mu_0$. 取 $\hat{k}^*=\hat{h}-\hat{b}^*$，则 $\hat{k}^*\in S$ 是 Opt. 1 的最优解.　　证毕.

定理 3.2 只要求 Opt. 2 的 $\mu(N)$ 和 $\mu_0$ 相等，并不要求 Opt. 1 的对偶问题和 Opt. 2 等价，Opt. 2 的最优解 $\hat{\Lambda}^*$ 可以不满足(2.2)中的约束条件. 另外，若 $\mu(N)=\mu_0$ 而 $\mu(N-1)>\mu_0$ 由证明过程易知这时的 $\hat{b}^*$ 一定是 $N-1$ 次多项式.

**推论 3.1**　若存在正整数 $N$ 使得 $|g_t|\leqslant 1, t=0,1,\cdots,N-1$ 成立时必有 $|g_t|\leqslant 1$ 对一切 $t$ 成立，则 Opt. 1 至少存在一个最优解 $\hat{k}^*$，并且 $\hat{b}^*=\hat{h}-\hat{k}^*$ 是小于 $N$ 次的多项式.

证　由定理 3.2 直接得出.

利用定理 3.2，可通过分析 Opt. 1 的对偶问题并结合定理 3.1 来判断 Opt. 1 最优解的存在性.

## 4　次优解

$\hat{v}$ 有单位圆上零点时虽然可能不存在达到目标函数下确界 $\mu_0$ 的最优解，但是可有

**定理 4.1**　对任意小的 $\varepsilon>0$，存在 $\hat{k}_\varepsilon^*\in S$，使得 $\hat{b}_\varepsilon^*$ 是多项式，并且

$$\|\hat{b}_\varepsilon^*\|_A=\|\hat{h}-\hat{k}_\varepsilon^*\|_A\leqslant\mu_0+\varepsilon. \tag{4.1}$$

证　和文献[5]中定理 3.2 的证明相同，略.

于是，与[5]类似可通过逐次增加 $m$ 用[4]提供的方法求解优化问题

$$\mu(m)=\min\sum_{i=0}^{m}|b_i|,$$
$$\text{s. t. } \hat{b}(\alpha_i)=\hat{h}(\alpha_i),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4.2}$$

来得到 Opt. 1 的可任意逼近目标函数下确界的次优解. (4.2)里的 $m$ 是(4.1)中 $\hat{b}_\varepsilon^*$ 的次数，参照[5]中的分析方法可证 $\lim\limits_{m\to\infty}|\mu(m)-\mu_0|=0$.

## 5　两个例子

**例 1**　$\hat{v}$ 有 2 个闭单位圆内的零点 $\alpha_1=1, \alpha_2=\beta, 0<\beta<1$；$\hat{h}(\alpha_1)=1, \hat{h}(\alpha_2)=1$，求解 Opt. 1.

令　$f_1(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1\hat{h}(\alpha_1)+\lambda_2\hat{h}(\alpha_2)=\lambda_1+\lambda_2$，

Opt. 1 的对偶问题为

$$\mu_0=\max f_1(\lambda_1,\lambda_2),$$
$$\text{s. t. } |\lambda_1+\lambda_2\beta^t|\leqslant 1,\quad t=0,1,\cdots.$$

由图知 $f_1(\lambda_1,\lambda_2)$ 的等值线和直线 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 平行，当 $N=1$ 时便有 $\mu(N)=\mu_0=1$. 由定理 3.2 知 Opt. 1 至少存在一个最优解 $k^*$. 显然，$\hat{b}^*=1$ 满足 $\|\hat{b}^*\|=\mu_0=1$ 且 $\hat{k}^*=\hat{h}-\hat{b}^*\in S$ 是所需的最优解.

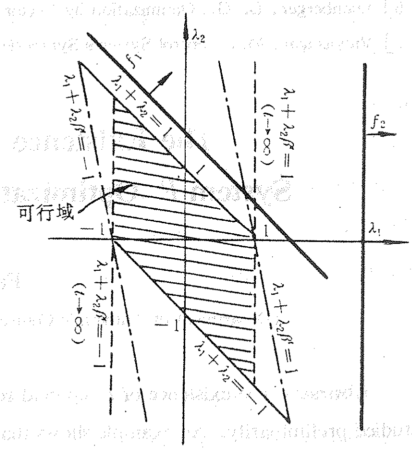


图 1　图解例 1、例 2 的对偶问题

**例 2**　$\hat{v}$ 闭单位圆内的零点同例 1. 但 $\hat{h}(\alpha_1)=1, \hat{h}(\alpha_2)=0$. 求解 Opt. 1.

令　$f_2(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1\hat{h}(\alpha_1)+\lambda_2\hat{h}(\alpha_2)=\lambda_1$，Opt. 1 的对偶问题为

$$\mu_0=\max f_2(\lambda_1,\lambda_2),$$
$$\text{s. t. } |\lambda_1+\lambda_2\beta^t|\leqslant 1,\quad t=0,1,\cdots.$$

由图知，取前 $N$ 个约束时 Opt. 2 的最优值 $\mu(N)$ 是直线 $\lambda_1+\lambda_2\beta^{N-1}=1$ 和直线 $\lambda_1+\lambda_2=-1$

交点处的 $\lambda_1$ 值. 解方程得 $\mu(N)=\lambda_1=\frac{1+\beta^{N-1}}{1-\beta^{N-1}}>1$，不存在满足定理 3.2 的 $N$. 把 $\mu_0=1,\hat{h}(\alpha_1)=1,\hat{h}(\alpha_2)=0$ 代入(3.1)后易证方程组(3.1)无解. 所以，由定理 3.1 知 Opt. 1 无解.

对给定的任意小 $\varepsilon<0$，由 $|\mu(m)-\mu_0|=\frac{2\beta^{m-1}}{1-\beta^{m-1}}\leqslant\varepsilon$ 解得

$$m\geqslant\frac{-1}{\ln\beta}\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}+1,$$

可按此式选取 $m$，由(4.2)求取 $|\mu(m)-\mu_0|\leqslant\varepsilon$ 的次优解.

## 6 结 论

$\hat{v}$ 存在单位圆上的零点时，算例表明 Opt. 1 的最优解可能不存在. 定理 3.2 结合定理 3.1 提供了一种判别依据. 最优解不存在时由定理 4.1 知，可用[4]提供的算法求取次优解.

## 参 考 文 献

[1] Vidyasagar, M.. Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances. IEEE Trans., 1986, AC-31(6):527—534
[2] Dahleh, M. A., Pearson, J. B.. $l^1$ Optimal Feedback Controllers for Discrete-time Systems. Proc. ACC, Seattle, WA, June. 1986, 1964—1968
[3] Dahleh, M. A., Pearson, J. B.. $l^1$ Optimal Feedback Controllers for MIMO Discrete-time Systems. IEEE Trans., 1987, AC-32(4):314—322
[4] 方华京，涂健. 单纯形法设计 $l^1$ 最优反馈控制器. 控制与决策，1990, 5(4):44—47
[5] 方华京，涂健. 闭环极点在指定区域内的 $l^1$ 优化控制器. 控制理论与应用，1991, 8(2):142—147
[6] Luenberger, D. G.. Optimization by Vector Space Methods. John Wiley & Sons Inc., New York, 1969
[7] Vidyasagar, M.. Control Systems Synthesis: A Factorization Approach. MIT Press, Cambridge MA, 1985

# The Existence of Optimal Solution of Control System $l^1$ Optimization Design and Suboptimal Solution

Fang Huajing, Tu Jian

(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

**Abstract**: The existence of $l^1$ optimal solution for system with zero and (or) pole on the unit circle has been studied preliminarily. An example shows that the $l^1$ optimal solution does not always exist. Some sufficient conditions for judging the existence are presented. And the method of getting suboptimal solution is given.

**Key words**: linear discrete system; optimization; robust control