第 8 卷第 4 期
1991 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 4
Dec., 1991

对称非线性控制系统的能控性

刘晓平　张嗣瀛
(东北工学院自动控制系，沈阳)

摘要：本文采用微分几何方法，研究了具有对称结构的非线性控制系统的能控性. 本文证明：若对称非线性控制系统在某点能控，那么该系统在此点所属的轨道上的所有点均能控.

关键词：非线性系统；能控性；对称性

1 引　言

在研究实际系统时，经常会遇到一些具有对称结构的系统，这类系统由于具有其特定的结构即对称结构，因而显示出其它结构所不具有的特性. 到目前为止，已经证明：具有对称结构的非线性系统可进行结构分解. 对称系统的这种可分解性是对称结构所具有的特性之一，除了具有可分解性外，还可能具有其它性质，如能控性、能观性及稳定性等方面的特性. 本文的目的就是要通过研究对称非线性控制系统的能控性，来考察对称结构与能控性的联系.

2 基本概念

本节给出有关对称性及能控性方面的定义：

定义 2.1(非线性控制系统)：一个非线性控制系统 Σ 是一个三元组 $\Sigma(M\times U, M, f)$，其中光滑流形 M 和 U 分别是状态空间和输入空间，f 是一个光滑映射且满足 $\pi_M\circ f=\pi$，这里 π 是 $M\times U$ 到 M 上的自然投影，π_M 是 TM 到 M 上的自然投影. 令 M 及 U 的坐标分别为 x 及 u，系统可表示为

$$\dot{x}=f(x,u). \tag{2.1}$$

定义 2.2(群作用)：设 M 是一个光滑流形，G 是一个李群. M 上的 G 作用是一个光滑映射：$\Phi: G\times M\to M$ 使对所有的 $x\in M$，①$\Phi(e,x)=x$；②对每个 $g,h\in G$，$\Phi(g,\Phi(h,x))=\Phi(gh,x)$. 应注意的是 $\Phi_g: x\mapsto\Phi(g,x)$是 M 到 M 上的微分同胚.

定义 2.3(轨道)：设 Φ 是一个 M 上的 G 作用. 对于 $x\in M$，x 的轨道被定义为：

$$Gx=\{\Phi_g(x)\,|\,g\in G\}. \tag{2.2}$$

定义 2.4(对称性)：设 $\Sigma(M\times U, M, f)$是一个非线性控制系统，Φ 是 M 上的 G 作用. 如果对一切 $x\in M, u\in U$，有

$$\Phi_{g*}\circ f(x,u)=f(\Phi_g x,u). \tag{2.3}$$

那么就称系统 Σ 具有对称(G,Φ).

定义 2.5(可达集)：设 $x_0\in M$，U 为 x_0 的一个邻域. 如果存在一个容许控制 $u(t)$和一个时刻 $T\geqslant 0$，使得运动轨迹满足 $x(0)=x_0, x(T)=x_T$，并且 $x(t)\in U, 0\leqslant t\leqslant T$，则称 x_T 为 x_0 的 U 可达点；x_0 的 U 可达点的集合称为 x_0 的 U 可达集，记为 $R_U(x_0)$. 若 U 取为 M，则称

本文于1990年5月13日收到. 1990年12月17日收到修改稿.

$R_M(x_0)$为 x_0 的可达集，记为 $R(x_0)$.

定义 2.6(弱可达集)：对 M 中的任意两点 x_0, x_T，若存在 $x_1, \cdots, x_{k-1} = x_T$，使得

$$x_i \in R(x_{i-1}) \quad \text{或} \quad x_{i-1} \in R(x_i), \quad i = 1, \cdots, k-1,$$

则称 x_T 为 x_0 的弱能达点；x_0 的弱能达点的集合称为 x_0 的弱能达集记为 $WR(x_0)$. 类似于 U 能达集，可以定义 x_0 点的 U 弱能达集 $WR_U(x_0)$.

定义 2.7(能控与弱能控)：对于系统(2.1)，如果点 $x_0 \in M$ 的可达集为全空间，即 $R(x_0) = M$，则称系统在 x_0 点能控. 若 M 中每一点均能控，则称该系统能控. 同样，若 $WR(x_0) = M$，则称系统在 x_0 点弱能控. 若 $\forall\ x \in M$ 均有 $WR(x_0) = M$，则称系统弱能控.

定义 2.8(局部能控及局部弱能控)：考虑系统(2.1)，如果某一点 $x_0 \in M$，对它的任何一个邻域 U 均有 $R_U(x_0)$或$WR_U(x_0)$皆包含 x_0 的某一个邻域，则称该系统在 x_0 点局部能控或局部弱能控. 如果系统在每一点 $x \in M$ 均局部能控或局部弱能控，则称该系统局部能控或局部弱能控.

3　对称结构与能控性

首先给出如下两个引理：

引理 3.1　设 $\Sigma(M \times U, M, f)$是具有对称(G, Φ)的非线性控制系统，$\varphi(x_0, t, u)$是系统从 x_0 出发在 u 控制下的运动轨线. 那么对任何 $g \in G$，系统从 $\Phi_g x_0$ 出发在 u 控制下的运动轨线 $\varphi(\Phi_g x_0, t, u)$刚好为 $\Phi_g \varphi(x_0, t, u)$.

证明　令 $y(t) = \Phi_g \varphi(x_0, t, u)$，则

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \Phi_{g*} \dot{\varphi}(x_0, t, u) \\ &= \Phi_{g*} \circ f[\varphi(x_0, t, u), u] \\ &= f[\Phi_g \varphi(x_0, t, u), u] = f[y(t), u]. \end{aligned}$$

而且，$y(0) = \Phi_g \varphi(x_0, 0, u) = \Phi_g x_0$，所以 $y(t)$是系统从 $\Phi_g x_0$ 出发在 u 控制下的运动轨线.

引理 3.2　设 Σ 是具有对称 (G, Φ) 的非线性控制系统，$R(x_0)$、$WR(x_0)$、$R_U(x_0)$ 及 $WR_U(x_0)$是点 x_0 的可达集、弱可达集、U 可达集及 U 弱可达集，那么，对任何 $g \in G$，点 $\Phi_g x_0$ 的可达集、弱可达集、$\Phi_g U$ 可达集及 $\Phi_g U$ 弱可达集分别为 $\Phi_g R(x_0)$、$\Phi_g WR(x_0)$、$\Phi_g R_U(x_0)$及 $\Phi_g WR_U(x_0)$.

证　只证明 $R_{\Phi_g U}(\Phi_g x_0) = \Phi_g R_U(x_0)$，其它情况类似.

由 Φ_g 是微分同胚得：当 U 是 x_0 的邻域时，$\Phi_g U$ 是 $\Phi_g x_0$ 的邻域. 任给 $x_T \in R_U(x_0)$，有 $x_T = \varphi(x_0, T, u)$且 $\varphi(x_0, t, u) \in U, 0 \leqslant t \leqslant T$. 因 Σ 具有对称(Φ, G)，故由引理 3.1 知，$\Phi_g x_T = \Phi_g \varphi(x_0, T, u) = \varphi(\Phi_g x_0, T, u)$且有 $\Phi_g \varphi(x_0, t, u) \in \Phi_g U, 0 \leqslant t \leqslant T$，即：$\Phi_g x_T \in R_{\Phi_g U}(\Phi_g x_0)$，因此 $\Phi_g R_U(x_0) \subset R_{\Phi_g U}(\Phi_g x_0)$；反之，任给 $y_T \in R_{\Phi_g U}(\Phi_g x_0)$ 有 $y_T = \varphi(\Phi_g x_0, T, u) = \Phi_g \varphi(x_0, T, u)$，且 $\Phi_g \varphi(x_0, t, u) \in \Phi_g U, 0 \leqslant t \leqslant T$，所以 $\varphi(x_0, t, u) \in U, 0 \leqslant t \leqslant T$，即 $\varphi(x_0, T, u) \in R_U(x_0)$，因此 $y_T \in \Phi_g R_U(x_0)$，即证得 $\Phi_g R_U(x_0) \supset R_{\Phi_g U}(\Phi_g x_0)$，所以 $R_{\Phi_g} U(\Phi_g x_0) = \Phi_g R_U(x_0)$.

利用上述引理就可证得如下定理.

定理 3.3　设 Σ 是具有对称(G, Φ)的系统，且 Σ 在 x_0 点可控(局部可控)或弱可控(局部弱可控). 那么，Σ 在 x_0 所属轨道 Gx_0 上所有点均可控(局部可控)或弱可控(局部弱可控).

证　以局部可控为例加以证明，其它类似.

由 Σ 在 x_0 点局部可控可知：对 x_0 的任何邻域 U，$R_U(x_0)$ 都包含 x_0 点的某个邻域 V，从而对 Gx_0 上任意点 $\Phi_g x_0$ 的任何一个邻域 $\Phi_g U$，$R_{\Phi_g U}(\Phi_g x_0)=\Phi_g R_U(x_0)$ 都包含 $\Phi_g x_0$ 点的一个邻域 $\Phi_g V$. 所以 Σ 在 x_0 点所属轨道上任何点均局部可控.

若将状态空间假定为齐次空间(即对于 M 上的任何两点 x 与 y 都存在 $g\in G$ 使 $\Phi_g x=y$ 或 $\Phi_g y=x$)，则由上面的定理可得如下推论.

推论 3.4 设 Σ 是具有对称 (G,Φ) 的系统，且 M 是一个齐次空间. 则 Σ 可控(局部可控)或弱可控(局部弱可控)的充要条件是 Σ 在某一点可控(局部可控)或弱可控(局部弱可控).

进一步可证明如下结论.

定理 3.5 设 Σ 是具有对称 (G,Φ) 的系统，若每一轨道空间 $Gx(x\neq x_0)$ 中均存在 x_0 的可达点，则有(1)商系统在 Gx_0 处可控；(2)当 x_0 能达到轨道空间 Gx_0 中的每一点时系统在 x_0 点可控.

证 1) 任取一个轨道空间 $Gx(x\neq x_0)$，设 x_0 能达到其中某一点 x，即存在 u 及 T 使 $x=\varphi(x_0,T,u)$，则 $\forall\ g\in G$，用同样的 u 及 T，$\Phi_g x_0$ 能达到 $\Phi_g x$，由 g 的任意性知，Gx_0 作为商流形 M/G 中的一点在 u 作用下在 T 时刻可达到 Gx；又由 x 的任意性知：$R(Gx_0)=M/G$. 所以商系统在 Gx_0 点可控.

2) 设 $\forall\ y\in M$，令 $y\in Gx$，即存在 $g\in G$ 使 $y=\Phi_g x$，由于 x_0 能达到轨道空间 Gx_0 中的每一点，因此存在 u_1 及 T_1 使 $\Phi_g x_0=\varphi(x_0,T_1,u_1)$；又由(1)知存在 u_2 及 T_2 使 $y=\Phi_g x=\varphi(\Phi_g x_0, T_2,u_2)$. 设 $u=\begin{cases}u_1, & 0\leqslant t\leqslant T_1\\ u_2, & T_1\leqslant t\leqslant T_2\end{cases}$ 则 $y=\varphi(x_0,T_1+T_2,u)$，由 y 的任意性知系统在 x_0 点可控.

注：有关商系统的概念可参考文献[1].

例 1 考虑非线性控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=(x_1+x_2)u_1+(x_1-x_2)u_2,\\ \dot{x}_2=(x_2-x_1)u_1+(x_1+x_2)u_2.\end{cases}$$

若取 2×2 阶正交矩阵群 G，其代表元素可取为

$$g=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},$$

则容易验证该系统具有对称 (G,Φ)，其中群作用 Φ 是矩阵乘. 假设容许控制 u_1 及 u_2 取常数. 此系统的解为

$$\begin{cases}x_1=x_{10}e^{(u_1+u_2)t}\cos(u_2-u_1)t-x_{20}e^{(u_1+u_2)t}\sin(u_2-u_1)t,\\ x_2=x_{20}e^{(u_1+u_2)t}\cos(u_2-u_1)t+x_{10}e^{(u_1+u_2)t}\sin(u_2-u_1)t.\end{cases}$$

容易证明 $\varphi(\Phi_g x_0,t,u)=\Phi_g\varphi(x_0,t,u)$.

该例中，群 G 将状态空间 R^2 划分成无穷多个轨道空间，其中 $\{0\}$ 为一个轨道空间，每个圆心为原点的圆都是一个轨道空间. 求两个解 x_1 及 x_2 的平方和得：

$$x_1^2+x_2^2=(x_{10}^2+x_{20}^2)(e^{(u_1+u_2)t})^2.$$

由此可知由 (x_{10},x_{20}) 出发可达到其它轨道空间的某一点 $(x_{10}^2+x_{20}^2\neq0)$，所以商系统在 (x_{10},x_{20}) 点可控.

若令 $u_1+u_2=0$ 则系统的解变为

$$x_1 = x_{10}\cos(u_2 - u_1)t - x_{20}\sin(u_2 - u_1)t,$$
$$x_2 = x_{20}\cos(u_2 - u_1)t + x_{10}\sin(u_2 - u_1)t.$$

即从(x_{10}, x_{20})出发可达到同一轨道空间 Gx_0 中的每一点，所以系统在(x_{10}, x_{20})点能控$(x_{10}^2 + x_{20}^2 \neq 0)$.

事实上，采用极坐标变换 $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ 将原系统化为

$$\dot{r} = (u_1 + u_2)r,$$
$$\dot{\theta} = (u_2 - u_1).$$

其中 $\dot{r} = (u_1 + u_2)r$ 是商系统，当指定 u_1 来控制它，它是能控的除非 $r = 0$；而 θ 是能控的(在 u_2 的作用下可达任意角度)，所以该系统能控.

4 结　论

通过分析对称非线性控制系统的能控性发现对称结构具有使能控性研究大大简化的特性，具体表现在：若系统在某点可控，则在该点所属的轨道空间上所有点均可控.

关于对称系统的特性还未完全弄清楚，如对称结构与能观性，稳定性及线性化等方面的关系还需进一步的探讨.

致谢 感谢国家自然科学基金委员会及国家教委基金委员会的资助.

参 考 文 献

[1] Grizzle, J. W., Marcus, S. I.. The Structure of Nonlinear Control Systems Possessing Symmetrics. IEEE Trans. Auto. Contr., 1985, AC-30(3): 248—258

[2] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京：科学出版社，1988

[3] Isidori, A.. Nonlinear Control Systems: An Introduction, Lecture Notes in Control and Information Sci., 71, Springer, Berlin, 1985

Controllability of Nonlinear Control Systens with Symmetries

Liu Xiaoping, Zhang Siying

(Department of Automatic Control, Northeast University of Technology, Shenyang)

Abstract: This paper investigates the controllability of nonlinear control systems with symmetries by using the differential geometric method, and proves that if the system with symmetry is controllable at some point, then it is controllable on the orbit passing through this point.

Key words: nonlinear systems; controllability; symmetry