第 9 卷第 2 期
1992 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 2
Apr., 1992

互联大系统能控能观性模型简化

曾祥金
(汕头大学数学系,515063)

摘要：不能控不能观系统可以集结成为一个能观但不能控的系统，这是传统的结论. 本文提出一种旨在改变系统结构的新集结方法，可以把不能控和/或不能观系统集结成为具有相同输入输出关系且能控能观系统. 并利用此结果对互联大系统进行分散能控能观性模型简化，并且给出若干重要理论结果和算法.

关键词：能控系统；能观系统；集结矩阵

1 基本问题

考虑如下系统 $\Sigma_i=\{A_i,B_i,C_i\}$：

$$\Sigma_i:\quad \begin{cases} \dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+B_iu_i(t), \\ y(t)=C_ix_i(t), \quad i=1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中子系统 Σ_i 应用互作用系统 $\Phi=\{M,\Sigma_j\mathscr{L}_j,Q_i,\Sigma_jP_{ij}\}$：

$$\Phi:\quad \begin{cases} \dot{z}(t)=Mz(t)+\sum\limits_{j=1}^{N}\mathscr{L}_jy_j(t), \\ u_i(t)=Q_iz(t)+\sum\limits_{j=1}^{N}P_{ij}y_j(t)+v_i, \quad i=1,\cdots,N \end{cases} \tag{1.2}$$

连结起来构成一个互联大系统，其中 $x_i\in R^{n_i}, u_i\in R^{m_i}, y_i\in R^{p_i}, z\in R^q, v_i\in R^{m_i}$ $(n_i\geqslant 1, m_i\geqslant 1, p_i\geqslant 1, q\geqslant 0)$.

定义 1.1 由子系统 $\Sigma_i(i=1,2,\cdots,N)$ 和互作用系统 Φ 组成的互联大系统记为

$$\Sigma_d=\{\Sigma_i,\Phi\}=(\bigcup_{i=1}^{N}\Sigma_i)\cup\Phi. \tag{1.3}$$

2 线性定常系统的新集结

本文从改变系统结构出发，提出一种新集结方法，称为 N-型集结(New aggregation). 原有的系统集结称为 O-型集结(Old aggregation).

2.1 O-型集结和 N-型集结

系统 $\{A,B,C\}$：

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \\ y(t)=Cx(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

利用线性关系

$$z_o(t)=K_ox(t), \quad z_o\in R^{r_o}, \quad r_o<n \tag{2.2}$$

简化成具有相同输入输出关系的系统 $\{F_o,G_o,H_o\}$：

$$\begin{cases} \dot{z}_o(t)=F_oz_o(t)+G_ou(t), \\ y(t)=H_oz_o(t). \end{cases} \tag{2.3}$$

本文于1990年9月11日收到. 1991年6月4日收到修改稿.

对于给定的集结矩阵 K_o，有

$$F_o = K_o A K_o^+,\quad G_o = K_o B,\quad H_o = C K_o^+. \tag{2.4}$$

其中 $K_o^+ \triangleq K_o^T (K_o K_o^T)^{-1}$ 称为集结矩阵 K_o 的右伪逆矩阵. 称这种集结方法为 O-型集结.

本文采用线性关系

$$x(t) = K_N z_N(t),\quad z_N \in R^{r_N},\quad r_N < n, \tag{2.5}$$

把系统 $\{A, B, C\}$ 简化成具有相同输入输出关系的系统 $\{F_N, G_N, H_N\}$：

$$\begin{cases} \dot{z}_N(t) = F_N z_N(t) + G_N u(t), \\ y(t) = H_N z_N(t). \end{cases} \tag{2.6}$$

对于给定的集结矩阵 K_N，则有

$$F_N = K_N^- A K_N,\quad G_N = K_N^- B,\quad H_N = C K_N. \tag{2.7}$$

其中 $K_N^- \triangleq (K_N^T K_N)^{-1} K_N^T$ 称为集结矩阵 K_N 的左伪逆矩阵. 这种集结方法，称为 N-型集结.

2.2　O-型集结和 N-型集结的性质

引理 2.1[1]　系统 $\{A, B, C\}$ 可 O-型集结的充分必要条件是系统 $\{A, B, C\}$ 不能观.

引理 2.2[1]　设系统 $\{A, B, C\}$ 可 O-型集结为系统 $\{F_o, G_o, H_o\}$，那么

1) 若系统 $\{A, B, C\}$ 能控，则系统 $\{F_o, G_o, H_o\}$ 也能控；

2) 若系统 $\{A, B, C\}$ 不能控，而且

$$\mathrm{rank}(B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B) < r_o,$$

则系统 $\{F_o, G_o, H_o\}$ 也不能控.

定理 2.3　系统 $\{A, B, C\}$ 能 O-型集结为能观系统 $\{F_o, G_o, H_o\}$ 的充分必要条件是

$$R(K_o^T) = R(C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T). \tag{2.8}$$

证　必要性：由 O-型集结方法知，

$$(C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T) = K_o^T (H_o^T \,\vdots\, F_o^T H_o^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (F_o^{n-1})^T H_o^T),$$

$$(K_o K_o^T)^{-1} K_o (C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T) = (H_o^T \,\vdots\, F_o^T H_o^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (F_o^{n-1})^T H_o^T).$$

由此可得下面两式：

$$\mathrm{rank}(C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T) = \mathrm{rank}(H_o \,\vdots\, F_o^T H_o^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (F_o^{n-1})^T H_o^T),$$

$$R(K_o^T) \supseteq R(C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T).$$

又因为系统 $\{F_o, G_o, H_o\}$ 是能观的，故

$$\mathrm{rank}(H_o^T \,\vdots\, F_o^T H_o^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (F_o^{n-1})^T H_o^T) = r_o$$

及 $\mathrm{rank}(K_o) = r_o$，所以，得

$$R(K_o^T) = R(C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T).$$

必要性证毕.

充分性：由(2.8)式知，存在适当维数的常量矩阵 P，使得

$$K_o^T = (C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T)\ P.$$

即有

$$A^T K_o^T = (A^T C^T \,\vdots\, (A^2)^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^n)^T C^T)\ P.$$

于是，可导出

$$R(A^T K_o^T) = R(A^T C^T \,\vdots\, (A^2)^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^n)^T C^T).$$

即有关系

$$R(A^T K_o^T) \subseteq R(C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^{n-1})^T C^T).$$

又由(2.8)式，有

$$R(A^TK_o^T) \subseteq R(K_o^T).$$

因而,存在常量矩阵 F_o,使下式成立

$$A^TK_o^T \subseteq K_o^TF_o^T. \tag{2.9}$$

又由(2.8)式,显然有

$$R(K_o^T) \supseteq R(C^T).$$

所以,也存在常量矩阵 H_o 满足

$$K_o^TH_o^T \supseteq C^T. \tag{2.10}$$

从而,下式成立

$$\mathrm{rank}(C^T \vdots A^TC^T \vdots \cdots \vdots (A^{n-1})^TC^T) = \mathrm{rank}(H_o^T \vdots F_o^TH_o^T \vdots \cdots \vdots (F_o^{n-1})^TH_o^T).$$

所以,

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(H_o^T \vdots F_o^TH_0^T \vdots \cdots \vdots (F^{r_o-1})^TH_o^T) &= \mathrm{rank}(H_o^T \vdots F_o^TH_o^T \vdots \cdots \vdots (F_o^{n-1})^TH_o^T) \\ &= \mathrm{rank}(C^T \vdots A^TC^T \vdots \cdots \vdots (A^{n-1})^TC^T) \\ &= \mathrm{rank}(K_o) = r_o.\end{aligned}$$

再记

$$G_o \triangleq K_oB. \tag{2.11}$$

从而知,系统$\{F_o,G_o,H_o\}$是能观的.

定理 2.4 系统$\{A,B,C\}$能 N-型集结为能控系统$\{F_N,G_N,H_N\}$的充分必要条件为

$$R(K_N) = R(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B). \tag{2.12}$$

证 必要性:由 N-型集结及(2.7)式知

$$K_N(G_N \vdots F_NG_N \vdots \cdots \vdots F_N^{n-1}G_N) = (B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B),$$

$$(G_N \vdots F_NG_N \vdots \cdots \vdots F_N^{n-1}G_N) = (K_N^TK_N)^{-1}K_N^T(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B).$$

由上述两式可推出

$$\mathrm{rank}(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B) = \mathrm{rank}(G_N \vdots F_NG_N \vdots \cdots \vdots F_N^{n-1}G_N) \tag{2.13}$$

及

$$R(K_N) \supseteq R(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B). \tag{2.14}$$

又因为系统$\{F_N,G_N,H_N\}$能控,以及(2.13)式,知

$$\mathrm{rank}(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B) = r_N.$$

又由 $\mathrm{rank}(K_N)=r_N$,及(2.14)式,得知

$$R(K_N) = R(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B).$$

必要性证毕.

充分性:根据(2.12)式,存在有适当维数的常量矩阵 Q,使得

$$K_N = (B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B)\,Q,$$

$$AK_N = (AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^nB)\,Q,$$

由乘积矩阵秩定理知,

$$\begin{aligned}R(AK_N) &\subseteq R(AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^nB) \\ &\subseteq R(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B) = R(K_N).\end{aligned}$$

因而,存在常量矩阵 F_N,满足

$$AK_N = K_NF_N. \tag{2.15}$$

再由(2.12)式,显然有

$$R(K_N) \supseteq R(B).$$

所以,存在常数矩阵 G_N 满足

$$K_N G_N = B. \tag{2.16}$$

从而,由(2.13)式,知

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(G_N \mid F_N G_N \mid \cdots \mid F_N^{n-1} G_N) &= \operatorname{rank}(G_N \mid F_N G_N \mid \cdots \mid F_N^{n-1} G_N)\\ &= \operatorname{rank}(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B)\\ &= \operatorname{rank}(K_N) = r_N.\end{aligned}$$

又记

$$H_N \triangleq CK_N. \tag{2.17}$$

从而,证得系统$\{F_N, G_N, H_N\}$是能控的.　　证毕.

定理 2.5　系统$\{A,B,C\}$可 N-型集结的充分必要条件是系统$\{A,B,C\}$不能控.

证　必要性:若系统$\{A,B,C\}$能控,则

$$\operatorname{rank}(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B) = n.$$

另一方面,系统$\{A,B,C\}$可 N-型集结为系统$\{F_N, G_N, H_N\}$,由 N-型集结知,(2.12)式成立.显然有

$$\operatorname{rank}(G_N \mid F_N G_N \mid \cdots \mid F_N^{n-1} G_N) = n.$$

又由定理 2.4 的必要性知,$\operatorname{rank}(K_N)=n$,这与 N-型集结假设相矛盾.必要性得证.

充分性:若系统$\{A,B,C\}$不能控,则有

$$\operatorname{rank}(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B) < n.$$

取 K_N 为矩阵$(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B)$中最大线性无关列组成的矩阵,即有

$$R(K_N) = R(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B).$$

又由定理 2.4,充分性得证.

定理 2.6　任何一个不能控和/或不能观的系统$\{A,B,C\}$可 N-型集结和/或 O-型集结为能控且/或能观的系统$\{F,G,H\}$.且系统$\{A,B,C\}$与系统$\{F,G,H\}$具有相同的输入输出关系.

3　互联大系统的分散能控能观性设计

定义 3.1　如果集合 $\mathscr{N}=\{1,2,\cdots,N\}$可划分成子集合 $\mathscr{N}_{co}$,$\mathscr{N}_{c\bar{o}}$,$\mathscr{N}_{\bar{c}o}$和 $\mathscr{N}_{\bar{c}\bar{o}}$,称:1)系统$\{\Sigma_i | i\in \mathscr{N}_{co}\}$为能控能观系统;2) 系统$\{\Sigma_i | i\in \mathscr{N}_{c\bar{o}}\}$为能控不能观系统;3) 系统$\{\Sigma_i | i\in \mathscr{N}_{\bar{c}o}\}$为不能控而能观系统;4) 系统$\{\Sigma_i | i\in \mathscr{N}_{\bar{c}\bar{o}}\}$为不能控且不能观系统.

引理 3.2　互联大系统 Σ_d 能控的充分必要条件是每个子系统 Σ_i,$i\in \mathscr{N}$ 能控.

定理 3.3　互联大系统 Σ_d 可 N-型集结的充分必要条件是至少存在一个子系统可 N-型集结.

证　根据引理 3.2 知,系统 Σ_d 不能控的充要条件是至少存在一个子系统不能控,再由定理 2.5,得证.

定理 3.4　设系统 Φ 是可控的,且系统 Σ_i 经 K_{iN}矩阵 N-型集结为 Σ_{iN},$\forall\, i\in \mathscr{N}_{\bar{c}o} \cup \mathscr{N}_{\bar{c}\bar{o}}$.令

$$K_{iN} \triangleq I_i, \quad \forall\, i \in \mathscr{N}_{co} \cup \mathscr{N}_{c\bar{o}}.$$

其中 $I_i\in R^{n_i\times n_i}$为单位矩阵,于是记

$$K_N \triangleq \operatorname{blockdiag}[K_{1N}, K_{2N}, \cdots, K_{NN}, I_z].$$

其中 I_z 是 $q\times q$ 阶单位矩阵,则互联大系统 Σ_d 可经 K_N 阵 N-型集结为

$$\Sigma_{dN}=\Big(\bigcup_{i\in\mathcal{N}_{co}\cup\mathcal{N}_{c\bar{o}}}\Sigma_i\Big)\cup\Big(\bigcup_{i\in\mathcal{N}_{\bar{c}o}\cup\mathcal{N}_{\bar{c}\bar{o}}}\Sigma_{iN}\Big)\cup\Phi.$$

证 设 $\Sigma_{iN}, i\in\mathcal{N}_{\bar{c}o}\cup\mathcal{N}_{\bar{c}\bar{o}}$可描述为

$$\begin{cases}\dot{z}_{iN}=F_{iN}z_{iN}+G_{iN}u_i,\\ y_i=H_{iN}z_{iN}.\end{cases}\tag{3.1}$$

显然,有

$$K_{iN}F_{iN}=A_iK_{iN},\quad K_{iN}G_{iN}=B_i,\quad C_iK_{iN}=H_{iN},\quad i\in\mathcal{N}.\tag{3.2}$$

记
$$\overline{F}_N\triangleq\begin{pmatrix}F_N+G_NPH_N & G_NQ\\ \mathscr{L}H_N & M\end{pmatrix},\quad \overline{G}_N\triangleq\begin{bmatrix}G_N\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix},\quad \overline{H}_N=(H_N\ \vdots\ 0),$$

其中
$$F_N\triangleq\text{blockdiag}\{F_{1N},F_{2N},\cdots,F_{NN}\},$$
$$G_N\triangleq\text{blockdiag}\{G_{1N},G_{2N},\cdots,G_{NN}\},$$
$$H_N\triangleq\text{blockdiag}\{H_{1N},H_{2N},\cdots,H_{NN}\},$$
$$K_N^*\triangleq\text{blockdiag}\{K_{1N},K_{2N},\cdots,K_{NN},I_z\},K_N\triangleq\text{blockdiag}\{K_N^*,I_z\}.$$

则由(3.2)式可导出

$$AK_N^*=K_N^*F_N,\quad K_N^*G_N=B,\quad CK_N^*=H_N.\tag{3.3}$$

并得

$$\begin{aligned}\overline{A}K_N&=\begin{bmatrix}A+BPC & BQ\\ \mathscr{L}C & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_N^* & 0\\ 0 & I_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AK_N^*+BPCK_N^* & BQ\\ \mathscr{L}CK_N^* & M\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}K_N^*F_N+K_N^*G_NPH_N & K_N^*G_NQ\\ \mathscr{L}H_N & M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_N^* & 0\\ 0 & I_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_N+G_NPH_N & G_NQ\\ \mathscr{L}H_N & M\end{bmatrix}\\ &=K_N\overline{F}_N,\end{aligned}$$

$$K_N\overline{G}_N=\begin{bmatrix}K_N^* & 0\\ 0 & I_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_N\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_N^*G_N\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}=\overline{B},$$

$$\overline{C}K_N=[C\ \vdots\ 0]\begin{bmatrix}K_N^* & 0\\ 0 & I_z\end{bmatrix}=[CK_N^*\ \vdots\ 0]=[H_N\ \vdots\ 0]=\overline{H}_N.$$

因此,互联大系统 Σ_d 可经 K_N 阵 N-型集结为

$$\Sigma_{dN}:\quad\begin{cases}\dot{\eta}(t)=\overline{F}_N\eta(t)+\overline{G}_Nu(t),\\ y(t)=\overline{H}_N\eta(t).\end{cases}\tag{3.4}$$

这里 $\eta=(z_1^T,z_2^T,\cdots,z_N^T,z^T)$. 由 $\overline{F}_N,\overline{G}_N,\overline{H}_N$ 的表示式知

$$\Sigma_{dN}=\Big(\bigcup_{i\in\mathcal{N}_{co}\cup\mathcal{N}_{c\bar{o}}}\Sigma_i\Big)\cup\Big(\bigcup_{i\in\mathcal{N}_{\bar{c}o}\cup\mathcal{N}_{\bar{c}\bar{o}}}\Sigma_{iN}\Big)\cup\Phi.$$

定理证毕.

定理 3.5 设系统 Φ 能观,而 Σ_{io}是由系统 Σ_i 经 O-型集结而成的系统,$i\in\mathcal{N}_{\bar{c}\bar{o}}\cup\mathcal{N}_{c\bar{o}}$. 令 $K_{io}\triangleq I_i, i\in\mathcal{N}_{co}\cup\mathcal{N}_{\bar{c}o}, K_o\triangleq\text{blockdiag}[K_{1o},K_{2o},\cdots,K_{No},I_z]$,$I_z$ 是 $q\times q$ 单位阵. 则互联大系统 Σ_d 可经 K_o 阵 O-型集结为能观系统

$$\Sigma_{do}=\Big(\bigcup_{i\in\mathcal{N}_{co}\cup\mathcal{N}_{\bar{c}o}}\Sigma_i\Big)\cup\Big(\bigcup_{i\in\mathcal{N}_{c\bar{o}}\cup\mathcal{N}_{\bar{c}\bar{o}}}\Sigma_{io}\Big)\cup\Phi.$$

由上述各定理，就可保证实现互联大系统分散可控可观性模型简化，并容易给出其具体算法.

参考文献

[1] 郑应平. 大规模系统集结降阶中的几个问题. 自动化学报，1981，(4)：257－265
[2] 林国良，曾祥金. 线性时不变系统的新集结. 武汉水利电力学院学报，1989，22(2)：87－93
[3] Aoki，M.. Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation. IEEE Trans.，1968，AC-13：246－253
[4] Jamshidi，M.. Large-Scale Systems：Modeling and Control. North-Holland，New Yerk，1983

The Model Reduction of Controllable and Obervable Multivariable Large-Scale Systems

ZENG Xiangjin
(Department of Mathematics，Shantou University · Shantou，515063，PRC)

Abstract：It is an old conclusion that the uncontrollable-unobervable system can be aggregated to observable but uncontrollable system. This paper gives a new aggregation method that changes the structure of system. The uncontrollable and /or unobservable system can be aggregated to controllable and observable system with the same relationship of input-output by using this method and model reduction of decentralized controllable-observable for the multivariable large-scale system was given. We give several important results and algorithm.

Key words：controllable system；observable system；aggregative matrix

本文作者简介

曾祥金　1961 年毕业于武汉水利电力学院数学力学专业. 现任汕头大学数学系教授、系主任. 早期从事计算流体研究工作. 近年来，从事大系统最优化理论及其应用的研究. 1987 年留学美国一年从事数值流体问题的有限解析法研究. 目前主要从事大系统模型简化及分散镇定的研究.