第9卷第4期
1992年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 4
Aug., 1992

一种随机 Petri 网模拟系统时延分析的新方法*

王加存 黄志同

(华东工学院自动控制系·南京,210014)

摘要:本文首先引入了时延网和闭网的概念,证明了 Petri 网 N 为时延网的充要条件是其闭网为常返网;然后,从时延网模型出发,讨论了变迁发射时间为任意分布的随机离散事件系统时延特性的求取方法,给出了时延密度的计算公式.

关键词:随机 Petri 网;离散事件系统;时延

1 引 言

系统的时延是系统功能的一次实现所需要的时间.例如,生产加工系统的时延,是指自一个单位的生产原料输入系统起,经过各道工序的加工,直至以产品形式输出所需要的时间.系统的时延是系统的重要性能指标之一.

随机 Petri 网(SPN)[1,2]集模型建立和性能评估于一身,是分析随机离散事件系统的一个有效工具[1~5].随机 Petri 网现有的分析方法多是假定网中变迁的发射时间服从负指数分布,然后将网的标识过程等价于连续参数马尔可夫过程,利用求解马氏过程的一套方法分析网的时间特性.然而有些离散事件系统中的活动持续时间(或服务时间)与负指数分布出入较大(如报文定长的通信系统),不宜用负指数分布近似.鉴于此,本文讨论了一类变迁发射时间为一般分布的 SPN 模型的时延求取方法.文章的第二节介绍了时延网、闭网和常返网等概念,并讨论了它们之间的关系;第三节从系统的时延网模型出发,给出了随机离散事件系统时延特性的求取方法,最后给出了一个算例.

2 时延网

记随机 Petri 网 N 的可达标识集为 $R(N)$,任意标识 $M_k\in R(N)$ 下的使能变迁集为 $E(M_k)$,从 M_k 出发的所有可发射序列集为 $L(N,M_k)$.若 $E(M_a)=\varnothing$,则称 M_a 为吸收标识.

定义 1 随机 Petri 网 N 称为时延网,如果存在一标识 M_a 为吸收标识,且对于任意 $M_i\in R(N)\setminus\{M_a\}$,存在非空发射序列 $\sigma\in L(N,M_i)$,使得 $M_i\xrightarrow{\sigma}M_a$.

性质 1 时延网 N 中存在唯一的吸收标识.

证 由时延网定义,知网中存在吸收标识.不妨设 M_a,M_b 是 N 的两个不同的吸收标识.由 $M_b\in R(N)$ 可知,存在 $\sigma\in L(N,M_b)$,使得 $M_b\xrightarrow{\sigma}M_a$.若 σ 为空序列,则 $M_b=M_a$,这与 M_a,M_b 互异矛盾;若 σ 非空,记 σ 的首元为 t_k,则 $t_k\in E(M_b)$,即 $E(M_b)$ 非空,这又与 M_b 是吸收标识矛盾,所以性质 1 成立.

定义 2 设 M_1,M_a 分别为 N 的初始标识和吸收标识,并且 N 中至少存在一位置 $p_0\in$

---

* 国家教委博士点基金资助.
本文于1990年7月3日收到.1992年3月17日收到修改稿.

P，使得任意 $M_i \in R(N)\setminus\{M_a\}$，满足 $M_i(p_0) < M_a(p_0)$. 在 N 中增加一变迁 t^*，其输入/输出关系为对 $\forall\ p \in P$，

$$I(t^*,p) = \begin{cases} M_a(p) - M_1(p), & \text{如果 } M_a(p) > M_1(p), \\ 0, & \text{如果 } M_a(p) \leqslant M_1(p), \end{cases} \tag{1}$$

$$O(t^*,p) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } M_a(p) > M_1(p), \\ M_1(p) - M_a(p), & \text{如果 } M_a(p) \leqslant M_1(p). \end{cases} \tag{2}$$

所得新网记为 N_c，则称 N_c 为 N 关于 M_a 的闭网.

显然

$$R(N) \subseteq R(N_c). \tag{3}$$

定义 3 称 N 是常返网，若对于任意 $M_i, M_j \in R(N)$，总存在有限发射序列 $\sigma \in L(N, M_i)$，使得 $M_i \xrightarrow{\sigma} M_j$.

常返网又称完全能控网[6].

定理 1 设 M_a 为 N 的吸收标识，则 N 是时延网的充要条件是，N 关于 M_a 的闭网 N_c 是常返网.

证 必要性：由时延网的定义可知，任意 $M_i, M_j \in R(N)$，必存在 $\sigma_1 \in L(N, M_j)$，和 $\sigma_2 \in L(N, M_i)$，使得 $M_1 \xrightarrow{\sigma_1} M_j$，$M_i \xrightarrow{\sigma_2} M_a$. 又由式(1)和式(2)可知，$t^* \in E(M_a)$，且

$$M_1 = M_a + O(t^*) - I(t^*),$$

即 $M_a \xrightarrow{t^*} M_1$，因此 $M_i \xrightarrow{\sigma_2 t^* \sigma_1} M_j$. N_c 是常返网.

充分性：由式(3)可知，任意 $M_i \in R(N)$，存在 $\sigma \in L(N_c, M_i)$，使得 $M_b \xrightarrow{\sigma} M_a$. 记序列 σ 中变迁 t^* 出现的次数为 $\#(\sigma, t^*)$，若 $\#(\sigma, t^*) = 0$，则 $\sigma \in L(N, M_i)$；若 $\#(\sigma, t^*) > 0$，则总可从序列 σ 中截得前一段 σ'，使 σ' 满足 $\#(\sigma', t^*) = 0$，且在 σ 中 σ' 的后继元为 t^*. 由于在定义 2 中已假定至少存在一 p_0，使得任意 $M_j \in R(N)\setminus\{M_a\}$，满足 $M_j(p_0) < M_a(p_0)$，所以由式(1)可知，使 t^* 为使能变迁的标识只有 M_a，亦即 $M_i \xrightarrow{\sigma'} M_a$，且这里 $\sigma' \in L(N, M_i)$.

定理证毕.

通过闭网概念的引入和定理 1，即将随机 Petri 网 N 是否为时延网的问题转化为 N 的闭网是否为常返网的问题. 关于 Petri 网的常返性，我们有

定理 2 如果含 n 个位置的 Petri 网 N 是常返网，则

$$\mathrm{Rank} D(N) = n, \tag{4}$$

即 N 的关联矩阵 $D(N)$ 是行满秩的[6].

定理 3 Petri 网是常返网的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\alpha-1} G^k \geqslant E^* - E. \tag{5}$$

其中 G 为 N 的可达图的关联矩阵，$E^* = (1)_{\alpha\times\alpha}$，$E$ 为同阶单位阵[7].

3 时延分析

考虑无并发型变迁的随机 Petri 网. 这类随机 Petri 网适合于模拟和分析竞争型随机离散事件系统. 当这类系统进入一个新的状态后，它将从诸个竞争活动中择其一而执行. 一旦择定，入选的活动即被执行直至完成，然后系统的状态也随之变化.

由定义 1 和性质 1 可知，时延网中存在且仅存在一个吸收标识. 因此，为分析离散事

件系统的时延特性，可用时延网建立系统的模型，其中网的初始标识模拟系统开始投入运行状态，网的吸收标识模拟系统的一次运行结束所处的状态. 系统的时延即为其时延网模型从初始标识执行到吸收标识所需时间.

不失一般性，本文假定在时延网的执行过程中，当其离开初始标识后，就不能再返回初始标识；并假定网中各变迁的发射时间互相独立.

3.1 变迁的发射分布

设 τ_i 为随机 Petri 网 N 自 $\tau=0$ 时刻投入运行后发生的第 i 次标识更新的时刻，更新后的标识记为 $M_{(i)}$，更新前的历史记为 $Z_{(i)}$. 使能变迁 $t_k \in E(M_{(i)})$ 的发射分布定义为[8]

$$D_k(x \mid M_{(i)}, Z_{(i)}) = \mathrm{Prob}\{t_k\text{ 发射，发射时延} \leqslant x \mid M_{(i)}, Z_{(i)}\}. \tag{6}$$

因已假定 N 中无并发型变迁，所以标识 $M_{(i)}$ 下使能变迁 t_k 的发射分布与历史 $Z_{(i)}$ 无关，故有

$$D_k(x \mid M_{(i)}, Z_{(i)}) = D_k(x \mid M_{(i)}) = \mathrm{Prob}\{t_k\text{ 发射，发射时延} \leqslant x \mid M_{(i)}\}. \tag{7}$$

式中“发射时延”是一随机变量，指 N 从跃入 $M_{(i)}$ 到离开 $M_{(i)}$ 这段时差.

变迁的发射分布与网的执行策略有关. 文献[8]讨论了两种执行策略，一为竞争策略，一为预选策略. 竞争策略的机制是，一个新的标识到达后，标识下所有使能变迁对各自的发射时间分布进行采样，样本中的最小量决定发射的变迁和发射时延. 记网中任意变迁 t_k 的发射时间分布和发射时间密度分别为 $\Phi_k(x)$ 和 $\psi_k(x)$，则在竞争策略下，

$$D_k(x \mid M_{(i)}) = \int_0^x \prod_{t_j \in E(M_{(i)}) \setminus \{t_k\}} [1 - \Phi_j(y)] \psi_k(y) \mathrm{d}y. \tag{8}$$

标识 $M_{(i)}$ 下 t_k 发射的概率为

$$\rho_k(M_{(i)}) = \lim_{x \to \infty} D_k(x \mid M_{(i)}). \tag{9}$$

预选策略的机制是，一个新的标识到达后，依据预先设定的各使能变迁的发射概率选择发射变迁，并且这种选择完成后，入选变迁的发射时延即为其发射时间分布函数的采样值. 在预选策略下

$$D_k(x \mid M_{(i)}) = \rho_k(M_{(i)}) \Phi_k(x). \tag{10}$$

其中 $\rho_k(M_{(i)})$ 预先给定.

由式(8)和式(10)可知，变迁的发射分布是一种病态分布(defective distribution)，其中隐含了变迁的发射概率这个因素. 因为标识 $M_{(i)}$ 下的逗留时间分布为

$$S(x \mid M_{(i)}) = \sum_{t_k \in E(M_{(i)})} D_k(x \mid M_{(i)}), \tag{11}$$

所以变迁的发射分布实质上是网在标识下驻留的加权时延分布，这里的权系数即为变迁的发射概率. 标识 $M_{(i)}$ 下使能变迁 t_k 的发射分布密度函数为

$$f_k(x \mid M_{(i)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_k(x \mid M_{(i)}). \tag{12}$$

3.2 时延分析

令

$$d_{ij} = \begin{cases} \rho_k(M_i), & \text{如果 } M_i \xrightarrow{t_k} m_j, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases} \tag{13}$$

$$q_{ij}(t)=\begin{cases}f_k(x|M_i), & \text{如果 } M_i\xrightarrow{t_k}m_j,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{14}$$

设时延网 N 的可达标识集为 $R(N)=\{M_1,M_2,\cdots,M_a\}$，且 M_a 为吸收标识，则根据前文关于初始标识 M_1的假定和关于吸收标识的定义，可知

$$d_{i1}=0,\quad \forall\ M_i\in R(N), \tag{15}$$

$$d_{ai}=0,\quad \forall\ M_i\in R(N). \tag{16}$$

从而

$$q_{i1}(x)=0,\quad \forall\ M_i\in R(N), \tag{17}$$

$$q_{ai}(x)=0,\quad \forall\ M_i\in R(N). \tag{18}$$

考虑矩阵 $D=(d_{ij})_{a\times a}$和 $Q(x)=(q_{ij}(x))_{a\times a}$有

定理 4 令

$$D^*=\sum_{k=1}^{\infty}D^k. \tag{19}$$

若 N 是时延网，则其元

$$d_{1a}^*=1. \tag{20}$$

证 由式(19)可得

$$d_{1a}^*=d_{1a}+\sum_{k=2}^{a-1}d_{1k}d_{ka}+\sum_{k_1=2}^{a-1}\sum_{k_2=2}^{a-1}d_{1k_1}d_{k_1k_2}d_{k_2a}+\cdots+\sum_{k_1=2}^{a-1}\sum_{k_2=2}^{a-1}\cdots\sum_{k_s=2}^{a-1}d_{1k_1}d_{k_1k_2}\cdots d_{k_sa}+\cdots,$$

其中第 $s+1$项

$$\sum_{k_1=2}^{a-1}\sum_{k_2=2}^{a-1}\cdots\sum_{k_s=2}^{a-1}d_{1k_1}d_{k_1k_2}\cdots d_{k_sa}$$

表示 N 自初始标识 M_1沿任意路径执行 $s+1$步后抵达吸收标识 M_a 的概率之和. 因此，d_{1a}^*即为 N 经过充分多次的标识更新之后由 M_1抵达 M_a 的概率. 由于 M_a 是 N 唯一的吸收标识(性质1)，所以定理成立. 证毕.

定义两个函数向量

$$a(x)=(a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)),$$

$$b(x)=(b_1(x),b_2(x),\cdots,b_n(x))^{\mathrm{T}}$$

的卷积为

$$a(x)*b(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)*b_i(x). \tag{21}$$

设 $a_i(x)$为 $n\times n$ 函数矩阵 $A(x)$的第 i 行行向量，$b_j(x)$为 $n\times n$ 函数矩阵 $B(x)$的第 j 列列向量，令

$$C(x)=A(x)*B(x), \tag{22}$$

则 $C(x)$定义为

$$c_{ij}(x)=a_i(x)*b_j(x),\quad \forall\ i,j\in\{1,2,\cdots,n\}. \tag{23}$$

又记

$$A^{[m]}(x)=\underbrace{A(x)*A(x)*\cdots*A(x)}_{m},\quad m\geqslant 1. \tag{24}$$

定理 5 令

$$Q^*(x)=\sum_{k=1}^{\infty}Q^{[k]}(x). \tag{25}$$

若 N 是无并发型变迁的时延网，则其模拟系统的时延密度函数为

$$f(x)=q_{1a}^{*}(x). \tag{26}$$

证　N 模拟系统的时延可视为 N 沿自 M_1至 M_a 所有路径运行时延的加权和；因为 N 中无并发型变迁，所以 N 沿任一自 M_1至 M_a 的路径运行的加权时延在数值上等于 N 在此路径上的各标识下驻留的加权时延之和. 又由概率论知识可知，任意两个独立的随机变量之和的分布密度，等于这两个随机变量分布密度的卷积. 因此，根据3.1中的讨论，以及文中关于 N 中变迁的发射时间互相独立的假定，将式(25)中对应的 $q_{1a}^{*}(x)$项展开，即可知定理成立.　　证毕.

若 N 是无环网，则自 M_1至 M_a 有有限条路径，并且这些路径的步数(即标识的更新次数)不会超过 $a-1$，因此必有

$$\sum_{k=a}^{\infty}Q^{[k]}(x)=0, \tag{27}$$

从而

$$Q^{*}(x)=\sum_{k=1}^{a-1}Q^{[k]}(x). \tag{28}$$

若 N 是有环网，则自 M_1至 M_a 将有无穷多条路径；但路径绕环的周数越多，N 沿此路径执行的概率(称为路径概率)也就越小[7]. 因此，在实际工程应用中，只需计算式(25)的前有限项. 假如我们不考虑那些路径概率小于 $\gamma(\gamma\ll1)$的路径对于网的时延的影响，可由

$$\begin{cases} D^{*}=\sum_{k=1}^{n}D^{k}, \\ d_{1a}^{*}\geqslant\gamma, \end{cases} \tag{29}$$

求得整数 n，再由式

$$Q^{*}(x)\approx\sum_{k=1}^{n}Q^{[k]}(x) \tag{30}$$

和式(26)求得 $f(x)$的近似表达式.

4　算　　例

图1(a)所示 N 是一无并发变迁的时延网，有4个可达标识：

$$M_1=(1\quad0\quad0\quad0),$$
$$M_2=(0\quad1\quad0\quad0),$$
$$M_3=(0\quad0\quad1\quad0),$$
$$M_4=(0\quad0\quad0\quad1).$$

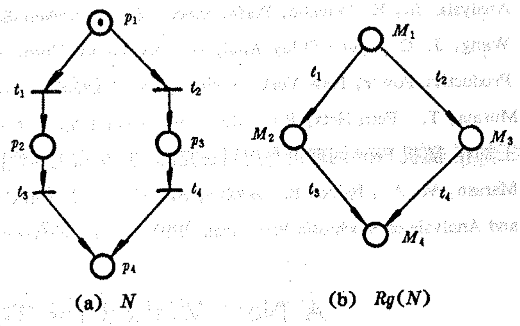

图 1　随机 Petri 网 N 及其可达图 $Rg(N)$

其中 M_1是初始标识，M_4是吸收标识. 标识的可达图 $R_g(N)$如图1(b)所示. 设 N 的执行策略为竞争策略，则由式(8)和式(12)可得：

$$f_1(x|M_1)=(1-\Phi_2(x))\psi_1(x),$$
$$f_2(x|M_1)=(1-\Phi_1(x))\psi_2(x),$$
$$f_3(x|M_2)=\psi_3(x),$$
$$f_4(x|M_3)=\psi_4(x).$$

于是有
$$Q(x)=\begin{bmatrix}0 & (1-\Phi_2(x))\psi_1(x) & (1-\Phi_1(x))\psi_2(x) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \psi_3(x)\\ 0 & 0 & 0 & \psi_4(x)\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

因为 N 是无环网，故由式(28)和式(26)可得 N 的时延密度函数为

$$f(x)=[(1-\Phi_2(x))\psi_1(x)]*\psi_3(x)+[(1-\Phi_1(x))\psi_2(x)]*\psi_4(x).$$

5 结束语

本文给出了一种随机 Petri 网模拟系统时延分析的新方法. 文中定义了一类特殊的随机 Petri 网——时延网，并给出了时延网的判别方法，即通过判断随机 Petri 网的闭网是否为常返网来判断该网是否为时延网. 然后从离散事件系统时延网模型出发，依据时延网的特性和一些基本假定，推出了系统时延密度函数的计算公式. 与现有的其它方法(包括马尔可夫过程分析法和变迁发射时间定时情况下的仿真方法)相比，本文给出的方法应用范围更为广泛，它适用活动持续时间为任意分布的离散事件系统.

有了系统时延的密度函数，即可求得系统时延的均值和方差等特性参数.

参 考 文 献

[1] Florin, G. and Natkin, S.. Evaluation Based upon Stochastic Petri Nets of the Maximum Throughput of a Full Duplex Protocol. Informatik-Fachberichte, 1982, 52(20):208—288

[2] Molloy, M. K.. Performance Analysis Using Stochastic Petri Nets. IEEE Trans. on Comput., 1982, C-31(9):931—917

[3] Ammar, H. H., Huang, Y. F. and Liu, R. W.. Hierarchical Models for Systems Reliability, Maintainability, and Availability. IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1987, CAS—34(6):629—638

[4] Dugan, J. B., Trivedi, K. S., Geist, R. M. and Nicola, V. F.. Extended Stochastic Petri Nets: Applications and Analysis. In: E. Gelenbe, Performance'84, Amsterdam: Elsevier, 1984, 507—519

[5] Wang, J. C.. Time Delay Analysis on Assembly Lines. In: M. Li, Transformation of Science and Technology into Productive Power, New York · Philadelphia · London: Taylor and Francis, 1991, 1151—1154

[6] Murata, T.. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. Proc. of the IEEE, 1989, 77(4):541—581

[7] 王加存. 随机 Petri 网理论与应用研究. 南京:华东工学院博士论文, 1991, 9

[8] Marsan, M. A., Balbo, B., Bobbio, A., Conte, G. and Cumain, A.. The Effect of Execution Policies on the Semantics and Analysis of Stochastic Petri Nets. IEEE Trans. Sotfware Eng., 1989, 15(7):832—845

A New Method for Time Delay Analysis for Systems Modeled by Stochastic Petri Nets

WANG Jiacun and HUANG Zhitong

(Department of Automatic Control, East China Institute of Technology · Nanjing, 210014, PRC)

Abstract: Time-Delay Net (TDN) and Closed Net (CN) are introduced. It is proved that the necessary and sufficient condition of a Petri net being a TDN is its corresponding CN being recurrent. Then, from TDN models, the resarching approach for the time delay characteristics of discrete event systems with generally distributed activity durations is developed, and the equations used to compute systems' time delay distribution density functions are proposed.

Key words: stochastic Petri net; discrete event system; time delay

本文作者简介

王加存　1963年生.讲师.1986年毕业于江苏工学院电气工程系.1989年和1991年在华东工学院分别获得硕士学位和博士学位.研究兴趣是离散事件系统,决策支持系统和计算机网络.目前主要从事随机 Petri 网理论及其在指控系统中的应用研究.

黄志同　1935年生.教授.博士生导师.1960年毕业于军事工程学院.之后一直在华东工学院任教.曾于1985年赴美国新墨西哥大学进行合作研究半年.研究兴趣为离散事件动态系统,大系统,智能控制和决策,运筹学,计算机集成制造系统.目前研究领域为自动化信息系统.

"何潘清漪优秀论文奖"征文启事

"何潘清漪优秀论文奖"征文1992年继续由本刊办理.请应征作者注意:

1. 文章必须是用中文正式发表过的.因此,寄来的文章应是该文在所发表的刊物的抽印页或复印页.
2. 文章需一式五份.
3. 请在应征稿的首页左上方注明"何潘清漪优秀论文奖征文"字样.

《控制理论与应用》编辑部

美国哈佛大学教授何毓琦(Y. C. Ho)先生为了庆贺其母亲何潘清漪老太太九十岁生日特设此奖,借以纪念她的母爱,以及她为了支持何先生的事业所付出的辛劳.

授奖对象:

离散事件动态系统(DEDS)方面优秀中文论文的作者.

目　　的:

选拔、奖励、促进和宣扬中国在 DEDS 领域内得到国际承认的重大成果.

条例与机构:

1. 由何毓琦先生提供的何潘清漪奖金总额为5000美元,每次授奖金额1000美元,连续颁发5次(每两次之间间隔至少为一年).5次之后,有可能追加基金继续颁发.
2. 世界各地用中文发表的关于 DEDS 方面的论文都有资格申请奖金.
3. 论文由国际专家小组甄别和最终评定.

   专家小组成员:曹希仁、陈翰馥、李伯天、谈自忠(组长)、饶大维、郑应平.
4. 如果某年度无合适的论文,该奖可以不颁发,但至少会颁发5次.
5. 1992年截稿日期为1992年12月31日,授奖时间为1993年5月,申请者可将论文寄到《控制理论与应用》编辑部(地址:广州市 五山 华南理工大学 邮政编码:510641).
6. 鼓励获奖者将其论文译成英文,为其发表提供帮助,借此促进在 DEDS 领域内工作的中国研究人员的国际合作.