第9卷第4期
1992年8月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 9, No. 4
Aug., 1992

同参数估计对偶的自适应控制算法

韩志刚
(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨,150080)

摘要:本文把线性和非线性系统统一处理.从自适应控制算法与参数估计算法的对偶性出发,提出了自适应控制算法的一种统一格式.这种格式算法简单,并在一定的条件下,能使控制误差一致的足够小.

关键词:参数估计;自适应控制;对偶性

1 引 言

随着控制理论与数字电子计算机技术的飞速 发展,自适应控制理论也获得了很大的进展.根据文献[1]的报导,自适应控制问题的研究的初始阶段,可追溯到50年代.但自60年代初,这个方向上的研究成果数量才开始增加,并且增加得越来越快.70年代初,Åström 和 Wittenmark 证明了自校正调节器在一定条件下将收敛于某种最优控制器,从而奠定了自校正调节器的理论基础[2].接着 Ljung,Goodwin,陈翰馥和 Caines 等人在自适应控制系统的收敛性、稳定性等方面也都进行了大量的有意义的工作[3~5].近些年来,许多人把关于自适应控制系统的研究,集中于它的稳健性(Robustness)分析.然而统观自适应控制理论与应用的研究成果,可以看出它们几乎都是对具有线性模型的系统而得出的.可是,在客观世界中,许多现象往往需要用非线性模型来描述,而且对于某些非线性模型,尚很难找到有效的线性化的方法.所以直接考虑用非线性模型来描写的系统的分析与自适应控制律的设计问题,无论就理论意义和应用意义而言,无疑都将是重要的.由于线性模型可以看成是非线性模型的特殊情形,所以对非线性问题的考虑,也就是对线性和非线性问题的统一考虑.

为寻求自适应控制律,我们可以把控制变量看成是待定的未知时变参数.即控制变量和模型的参数在模型中存在着一定的对偶性.所以关于时变参数的跟踪估值算法,可以被用来确定控制律.这就引出了控制律与参数估计的对偶算法.

本文的目的就是要对线性和非线性模型统一考虑,借助于对偶途径,给出一种自适应控制算法的统一格式,并且分析这种控制算法的基本性质.

2 系统模型的基本形式

如所周知,在自校正调节器的设计中,系统的基本模型具有形式

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})q^{-h}u(k) + C(q^{-1})e(k). \tag{1}$$

其中 $y(k)$ 是一维的输出,$u(k)$ 是输入,$e(k)$ 是白噪声.h 是时滞,而

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n},$$

本文于1990年11月22日收到.1992年1月16日收到修改稿.

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-n},$$
$$C(q^{-1}) = c_0 + c_1q^{-1} + \cdots + c_nq^{-n}.$$

q^{-1}是一步延迟算子，$a_1,\cdots,a_n,b_0,\cdots,b_n,c_0,\cdots,c_n$ 是未知参数. 当寻求自适应控制律时，应用类似于[5]132页-133页所用的方法，总可以把模型(1)改写成如下的形式

$$\begin{aligned} &y(k) + \alpha_1 y(k-h) + \cdots + \alpha_m y(k-h-m+1) \\ &= \beta_0 u(k-h) + \beta_1 u(k-h+1) + \cdots + \beta_l(k-h-l) + v(k). \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_0,\cdots,\beta_l$ 是未知参数，$v(k)$是随机噪声. 如果置

$$\varphi(k-h) = [-y(k-h),\cdots,-y(k-h-m+1),u(k-h),\cdots,u(k-h-l)]^{\tau},$$
$$\theta = (\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_0,\cdots,\beta_l)^{\tau},$$

则模型(2)可以写成

$$y(k) = \varphi(k-h)^{\tau}\theta + v(k).$$

参数 θ 可能是时变的，故把它表示成 $\eta(k)$，即有

$$y(k) = \varphi(k-h)^{\tau}\eta(k) + v(k). \tag{3}$$

在讨论中，我们可以不考虑 $\|\varphi(k)\|=0$ 这种平凡的情形. 只要置

$$\theta(k) = \frac{1}{\|\varphi(k-h)\|^2}\varphi(k-h)v(k) + \eta(k),$$

就有

$$\varphi(k-h)^{\tau}\theta(k) = \varphi(k-h)^{\tau}\eta(k) + v(k).$$

所以总可以用下述的模型来代替模型(3)

$$y(k) = \varphi(k-h)^{\tau}\theta(k). \tag{4}$$

此处，$\theta(k)$是随机时变参数，h 是时滞.

(4)式所表示的是一种向前 h 步的预报模型. 在文献[6]中曾指出，有很大一类系统，其模型可能写成(4)的形式，即它具有一定的普遍性. 如果引入记号：

$$Y_{k-h}^{k-h-m+1} = \{y(k-h),y(k-h-1),\cdots,y(k-h-m+1)\},$$
$$U_{k-h}^{k-h-l} = \{u(k-h),u(k-h-1),\cdots,u(k-h-l)\},$$

则显然 $\varphi(k-h)^{\tau}\theta(k)$依赖于 $Y_{k-h}^{k-h-m+1},U_{k-h}^{k-h-l},\theta(k)$和 $k-h$. 故可以把它表示成一般的形式

$$\varphi(k-h)^{\tau}\theta(k) = f[Y_{k-h}^{k-h-m+1},U_{k-h}^{k-h-l},\theta(k),k-h].$$

这里 $f[\cdots]$是一个具有线性特征的函数. 我们可以很自然地把函数 f 推广到非线性函数类上去. 所以在本文中我们恒假定所考虑的系统具有如下形式的模型

$$y(k) = f[Y_{k-h}^{k-h-n},U_{k-h}^{k-h-m},\theta(k),k-h]. \tag{5}$$

其中 $y(k)$是一维的输出，$u(k)$是输入，而

$$Y_{k-h}^{k-h-n} = \{y(k-h),y(k-h-1),\cdots,y(k-h-n)\},$$
$$U_{k-h}^{k-h-m} = \{u(k-h),u(k-h-1),\cdots,u(k-h-m)\}.$$

n和 m 是非负整数，h 是时滞，$\theta(k)$是随机时变参数，$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$是已知的函数.

3 自适应控制算法与参数估计算法的对偶

为讨论方便计，我们把系统的基本模型(5)改写成如下的形式

$$y(k+h) = f[Y_k^{k-n},u(k),U_{k-1}^{k-m},\theta(k+h),k]. \tag{6°}$$

不失一般性，设 $h=1$，此时基本模型具有形式

$$y(k+1) = f[Y_k^{k-n},u(k),U_{k-1}^{k-m},\theta(k+1),k]. \tag{6}$$

如所周知，已有的自适应控制算法，几乎都由两部分所组成，即未知参数的估值算法

和自适应控制算法[5]. 然而在我们这里，由于基本模型(6)或(6°)中，含有时变的模型参数. 应用一般的估值算法，在现在时刻 k，仅能得到估值 $\hat{\theta}(k)$. 为得到估值 $\hat{\theta}(k+h)$ $(h\geqslant 1)$，必须应用适当的预报手续. 所以我们认为，对于以模型(6°)或(6)为基本模型的系统的自适应控制算法，应由三个部分所组成，即 1) 未知参数的估值算法，2) 参数预报算法，3) 自适应控制律算法. 详细地我们有：

3.1 参数估值算法

以下，我们恒考虑模型(6).

在文献[7]中，我们曾给出了对模型(6)中的未知时变参数 $\theta(k+1)$ 的跟踪估值算法

$$\hat{\theta}(k+1)=\hat{\theta}(k)+\frac{\delta}{\|\nabla_{\theta(k)}f[k,\hat{\theta}(k)]\|^2}\nabla_{\theta(k)}f[k,\hat{\theta}(k)]$$
$$\{y(k+1)-f[Y_k^{k-n},u(k),U_{k-1}^{k-m},\hat{\theta}(k),k]\}. \tag{7}$$

其中 $\hat{\theta}(k)$ 表示 $\theta(k)$ 的估值. δ 是适当的常数，而

$$\nabla_{\theta(k)}f[k,\hat{\theta}(k)]=\frac{\partial}{\partial\theta}f[Y_k^{k-n},u(k),U_{k-1}^{k-m},\theta,k]\big|_{\theta=\hat{\theta}(k)}.$$

理论分析和实际应用都表明了，这种算法对于时变参数的跟踪估计是有效的[8].

3.2 参数预报算法

如果 k 是现在时刻，则应用估值算法(7)，仅能得到估值序列

$$\hat{\theta}(0);\hat{\theta}(1),\cdots,\hat{\theta}(k).$$

然而考虑到模型参数 $\theta(k)$ 的时变性，应用基本模型(6)设计自适应控制律，就必须知道 $\theta(k+1)$ 的某种最佳估值 $\hat{\theta}(k+1)$. 这种估值仅能由某种预报算法而得到. 这里我们建议采用多层递阶预报算法. 从文献[8]中可以找到关于这种预报方法的详细介绍.

3.3 自适应控制算法

由于控制变量 $u(k)$ 与未知参量 $\theta(k+1)$ 在基本模型(6)中所处的"地位"可以看成是相同的，所以，只要把控制变量 $u(k)$ 看成是系统的时变参数，那么就可以应用估计未知参数的算法来确定控制律 $u(k)$. 这就是说，在基本模型中，控制变量与未知参数存在着对偶关系. 从这一观点出发，我们可以引出与参数估值算法(7)对偶的控制算法如下

$$u(k)=u(k-1)+\frac{\beta_k}{\|\nabla_{u(k-1)}f[u(k-1),k]\|^2}\nabla_{u(k-1)}f[u(k-1),k]$$
$$\times\{y_{k+1}^0-f[Y_k^{k-n},u(k-1),U_{k-1}^{k-m},\hat{\theta}(k+1),k]\}. \tag{8}$$

其中 β_k 是适当的常数列，在适当的条件下，可以取 β_k 为常数 β. y_{k+1}^0 是 $k+1$ 时刻的希望的输出值. 而

$$\nabla_{u(k-1)}f[u(k-1),k]=\frac{\partial}{\partial u}f[Y_k^{k-n},u,U_{k-1}^{k-m},\hat{\theta}(k+1),k]\big|_{u=u(k-1)},$$

$\hat{\theta}(k+1)$ 是 $\theta(k+1)$ 的预报估值. 上述的算法称为同参数估计对偶的自适应控制算法.

4 对偶自适应控制算法的基本性质

这里，我们将指出，对偶自适应控制算法在适当的条件下满足控制误差一致小准则及其有某种节省能量的性质.

定义 设 $\{C_\beta,\beta\in B\}$ 是一族含有参量 β 的关于系统 S 的控制律. B 是参量集. 如果对于任何的 $\varepsilon>0$，皆有 $\beta^0\in B$ 和 $N>0$，使得当 $k\geqslant N$ 时，由算法 C_{β^0} 所得出的控制变量 $u(k)$ 恒

满足

$$|y_{k+1}^0 - f[Y_k^{k-n}, u(k), U_{k-1}^{k-m}, \hat{\theta}(k+1), k]| < \varepsilon. \quad \text{a.s.}$$

其中 y_{k+1}^0是 $k+1$ 时刻的希望输出值，$\hat{\theta}(k+1)$是 $\theta(k+1)$的某种最理想的估值. 我们就说控制律$\{C_\beta, \beta \in B\}$满足控制误差一致小准则.

下述定理说明了，在适当的条件下，对偶自适应控制算法(8)满足控制误差一致小准则.

定理 1 设系统

$$y(k+1) = f[Y_k^{k-n}, u(k), U_{k-1}^{k-m}, \theta(k+1), k]$$

满足条件

1) 有常数 $c>0$，使得对一切 k 皆有

$$|y(k)| < c, \quad \text{a.s.}$$

对一切 k，$y(k)$，$u(k) \in U$，$u \in U$，U 是一有界域和 $\theta \in \Theta$，Θ 是一个有界域，皆有

$$|f[Y_k^{k-n}, u, U_{k-1}^{k-m}, \theta, k]| < c, \quad \text{a.s.}$$

2) 设$\{u(k)\}$是由算法(8)所确定的，并对 $\beta_k>0$ 一致地有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nabla_{u(k-1)} f[\overline{u(k)}, k]^\tau \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1), k]}{\|\nabla_{u(k-1)} f[u(k-1), k]\|^2} = \mu > 0. \quad \text{a.s.} \qquad (*)$$

其中 $\overline{u(k)}$由下式决定

$$f[u(k), k] = f[u(k-1), k] + \nabla_{u(k-1)} f[\overline{u(k)}, k]^\tau \Delta u(k).$$

此处

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1),$$

$$f[u, k] = f[Y_k^{k-n}, u, U_{k-1}^{k-m}, \hat{\theta}(k+1), k].$$

则对于任何的 $\varepsilon>0$，必有 $\beta>0$，和 $N>0$，使与之相应的$\{u(k)\}$所得出的控制误差，当 $k \geqslant N$ 时，恒满足

$$|y_{k+1}^0 - f[Y_k^{k-n}, u(k), U_{k-1}^{k-m}, \hat{\theta}(k+1), k]| < \varepsilon. \quad \text{a.s.}$$

证　这个定理的证明与文献[6]的定理 4.1 的证明完全一样. 这里就省略了.

在进一步讨论中，为符号简便计，置

$$f[u, k] = f[Y_k^{k-n}, u, U_{k-1}^{k-m}, \hat{\theta}(k+1), k],$$

对 $f[u(k), k]$在 $u(k-1)$处应用微分中值定理

$$f[u(k), k] = f[u(k-1), k] + \nabla_{u(k-1)} f[\overline{u(k-1)}, k]^\tau \Delta u(k).$$

其中 $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$，而$\overline{u(k)}$是 $u(k-1)$与 $u(k)$的连线上的适当的点. 再置

$$b(u(k)) = \frac{\nabla_{u(k-1)} f[\overline{u(k-1)}, k]^\tau \Delta u(k-1)}{\nabla_{u(k-1)} f[u(k-1), k]^\tau \Delta u(k)},$$

即

$$\nabla_{u(k-1)} f[\overline{u(k-1)}, k]^\tau \Delta u(k-1) = b(u(k)) \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1), k]^\tau \Delta u(k).$$

令 $b_k = b(u(k-1))$，于是我们近似地有

$$\nabla_{u(k-1)} f[\overline{u(k-1)}, k]^\tau \Delta u(k) = b_k \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1), k]^\tau \Delta u(k),$$

也就是在近似的意义下有

$$y(k+1) = f[u(k-1), k] + b_k \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1), k]^\tau \Delta u(k). \qquad (9)$$

特别地，当 $f[u, k]$是 u 的线性函数时，则有 $b_k = 1$，而且(9)式变成了精确等式.

下面的定理说明了对偶控制算法将在一定的意义下，使得相邻时刻的控制变量的变

化幅度达到最小.

定理 2 在已知 $Y_k^{k-n}, U_{k-1}^{k-m}, \hat{\theta}(k+1)$ 的条件下，对于给定的 y_{k+1}^0，由算法(8)在 $\beta_k=\frac{1}{b_k}$ 时所确定的 $u(k)$ 必满足约束条件

$$y_{k+1}^0 = f[u(k),k] + b_k \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1),k]^\tau (u(k)-u(k-1)),$$

并使得

$$J = \frac{1}{2}\| u(k) - u(k-1) \|^2$$

达到最小值.

证 用拉格朗日乘子法，考虑函数

$$J^* = \frac{1}{2}\| u(k) - u(k-1) \|^2$$
$$+ \lambda\{y_{k+1}^0 - f[u(k-1),k] - b_k \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1),k]^\tau (u(k)-u(k-1))\},$$

J^* 有极小值的必要条件是

$$\frac{\partial J^*}{\partial u(k)} = 0, \quad \frac{\partial J^*}{\partial \lambda} = 0.$$

所以我们有

$$u(k) = u(k-1) + \lambda\, b_k \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1),k], \tag{10}$$
$$y_{k+1}^0 = f[u(k-1),k] + b_k \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1),k]^\tau (u(k)-u(k-1)). \tag{11}$$

把(10)式代入(11)式，可得

$$\lambda = \frac{1}{\| \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1),k] \|^2 b_k^2}\{y_{k+1}^0 - f[u(k-1),k]\},$$

取 $\beta_k=\frac{1}{b_k}$，于是由(10)式得出

$$u(k) = u(k-1) + \frac{\beta_k}{\| \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1),k] \|^2} \nabla_{u(k-1)} f[u(k-1),k]$$
$$\{y_{k+1}^0 - f[Y_k^{k-n}, u(k-1), U_{k-1}^{k-m}, \hat{\theta}(k+1), k]\}.$$

显然有

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial u(k)^2} = 1 > 0.$$

以算法(8)在 $\beta_k=\frac{1}{b_k}$ 时，使 J 达到最小值.

5 在线性情形的应用

这里我们把所得的结果，应用于线性情形，从而进一步揭示对偶控制算法的良好性质. 为此，考虑系统

$$y(k+1) = a_0(k+1)y(k) + a_1(k+1)y(k-1) + \cdots + a_n(k+1)y(k-n)$$
$$+ b_0 u(k) + b_1(k+1)u(k-1) + \cdots + b_m(k+1)u(k-m). \tag{12}$$

其中 $a_0(k+1), \cdots, a_n(k+1), b_1(k+1), \cdots, b_m(k+1)$ 是随机时变参数，b_0 是已知的非零常数. 置

$$\varphi(k) = [y(k), y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k-1), \cdots, u(k-m)]^\tau,$$
$$\theta(k+1) = [a_0(k+1), \cdots, a_n(k+1), b_1(k+1), \cdots, b_m(k+1)]^\tau.$$

则模型(10)可被写成

$$y(k+1) = b_0 u(k) + \varphi(k)^\tau \theta(k+1), \tag{13}$$

即此时我们有

$$f[Y_k^{k-n},u(k),U_{k-1}^{k-m},\theta(k+1),k]=b_0u(k)+\varphi(k)^\tau\theta(k+1).$$

显然 $\nabla_u f[u,k]=b_0$，故恒有

$$\frac{\nabla_u f[u,k]^\tau\nabla_v f[v,k-1]}{\|\nabla_v f[v,k-1]\|^2}=1,$$

即定理 1 中的条件（*）恒满足，而且 $\mu=1$. 在这种情形，控制律(8)中的常数 β 可取为 1. 从定理 2 可以看出，由这样的控制律所得出的控制变量 $u(k)$ 必满足

$$y_{k+1}^0=b_0u(k)+\varphi(k)^\tau\hat{\theta}(k+1).$$

其中 $\hat{\theta}(k+1)$ 是 $\theta(k+1)$ 的某种最佳估值.

不失一般性，假定 $u(k)$ 的维数是 1，并且 $b_0>0$，于是我们有

$$u(k)=u(k-1)+\frac{1}{b_0}\{y_{k+1}^0-b_0u(k)-\varphi(k)^\tau\hat{\theta}(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{b_0}\{y_{k+1}^0-\varphi(k)^\tau\hat{\theta}(k+1)\}. \tag{14}$$

算法(14)恰恰是具有模型(12)的系统在最小方差意义下的自适应控制律[5].

参 考 文 献

[1] Jacobs, O. L. R.. Introduction to Self-Tuning and Adaptive Control: Theory and applications. Peter Peregrinvs Ltd, 1981, 1—35

[2] Åström, L. J., Borisson, U., Ljung L. and Wittenmark, B.. Theory and Applications of Self-Tuning Regulators. Automatica, 1977, 13: 457

[3] Goodwin, G. C. and Sin, K. S.. Adaptive Filtering, Prediction and Control. New Jersey: Prentice Hall INC Englewood Cliffs, 1984

[4] Chen, H. F. and Caines, P. E.. On the Adaptive Control of a Class of Systems with Random Parameters and Disturbances. Automatica, 1985; 21(6): 737—741

[5] 袁震东. 自适应控制理论及其应用. 上海：华东师范大学出版社，1988

[6] 韩志刚. 多层递阶辨识方法. 自动化学报，1988，14(5)：383—386

[7] 韩志刚. 动态系统时变参数的辨识. 自动化学报，1984，10(4)：330—337

[8] 韩志刚. 多层递阶方法及其应用. 北京：科学出版社，1989

A Dual Adaptive Control Algorithm to Parameter Estimation

HAN Zhigang

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University · Haerbin, 150080, PRC)

Abstract: In this paper, the linear and nonlinear system are unitedly considered. A new unity pattern of the adaptive control algorithm is introduced with the standpoint of the duality between adaptive control algorithm and parameter estimation. The algorithm of this pattern has recursive form and it is simple. It satisfies the uniformly small criterion of the control error, under certain proper conditions.

Key words: parameter estimation; adaptive control; duality

本文作者简介

韩志刚　见本刊 1992 年第 1 期第 49 页.