

飞机纵向飞行轨迹的优化与实现^{*}

吴树范 沈勇璋 郭锁凤

(南京航空学院自动控制系, 210016)

摘要: 本文研究了飞机纵向飞行轨迹的优化技术, 选用质点运动能量状态方程为飞机运动模型, 直接操作成本为优化指标函数, 飞机纵向飞行剖面被假定分为三个飞行段: 爬升、巡航和下降, 将能量状态引入指标函数, 使其成为哈密顿函数中的独立变量, 则由动态变分法和极小值原理得到对各飞行轨迹段的优化算法; 尔后用 Fibonacci 单参数搜索法来予以实现. 文中给出了部分仿真结果.

关键词: 最优控制; 轨迹优化; 飞行性能优化; 飞行管理

1 引言^[1]

飞行性能和飞行轨迹的优化, 一直是航空界、特别是商用航空界所十分关心的研究课题. 自七十年代以来, 世界性的能源危机, 使航空燃油的价格不断上涨, 燃油消耗已成为飞行成本中的主要成份. 为此, 诸航空公司更加致力于研究飞机飞行性能和飞行轨迹的优化, 以求减少燃油消耗, 降低飞行成本, 增强其竞争和盈利能力.

对飞行性能和轨迹优化的研究已有几十年的历史了, 出现了众多的优化理论和实现方法. 研究内容上, 从早期的点优化和段优化, 如最短时间爬升、最省燃油爬升、最短距离爬升等, 发展到近代的全剖面优化, 如水平航迹的优化, 纵向飞行剖面的优化等. 研究方法上, 最早使用的是检索法, 即查表法, 它主要实现对某一飞行点的静态优化; 后来提出了迭代法, 通过对飞行状态参数的迭代寻优来实现某一飞行点的动态优化; 随着现代控制理论的发展, 又使用了动态变分法, 利用变分原理和优化技术来实现某一飞行域或全飞行剖面的优化. 近几年的研究, 则集中于使用飞机质点运动能量状态方程和奇异摄动理论的轨迹优化, 并分别出现了能量状态法和奇异摄动法.

进入八十年代以后, 随着轨迹优化理论的不断发展和成熟, 特别是机载航空电子设备和计算机技术的大幅度提高, 使轨迹优化技术趋于实用, 出现了一种先进的机载综合电子设备——飞行管理系统(FMS), 而轨迹优化算法则是其技术关键.

本文研究了采用能量状态法对纵向飞行轨迹的优化技术. 性能指标取为直接操作成本(DOC), 它综合考虑了燃油成本和飞行时间成本, 是目前通用的一种飞行性能优化指标. 运动模型采用飞机质点运动能量状态方程, 将状态变量降为两阶, 以减少优化计算量, 增大算法实时性. 研究结果表明, 该方法计算量少, 收敛快, 能实现全局优化, 是一种十分有效的轨迹优化方法. 有资料报道, 目前国外最先进的飞行管理系统中即是采用了这种优化算法.

* 国家教委博士点基金资助课题.

本文于1990年3月14日收到, 1991年8月3日收到修改稿.

飞机质点运动能量状态模型

飞机在纵向飞行剖面的运动规律通常可由以下五阶质点运动方程组描述:

$$m \frac{dV}{dt} = T \cos \alpha - D - mg \sin \theta, \quad (1)$$

$$mV \frac{d\theta}{dt} = T \sin \alpha + L - mg \cos \theta, \quad (2)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \theta, \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta + V_w, \quad (4)$$

$$\frac{dm}{dt} = -W/g. \quad (5)$$

式中 x, V, h 为飞行距离、速度和高度, α, θ 为攻角和纵向航迹角, T, D, m 和 W 为飞机的推力、阻力、质量和重量, V_w 为风速值. 直接应用动态变分原理, 将会出现 10 阶的两点边值问题 (TPBVP), 其庞大的计算量和高阶矩阵数值计算中可能出现的“病态”处理使其失去实用意义. 为此, 必须简化上述运动模型. 定义飞机的能量状态, 它是飞机飞行中单位重量的总能量, 即

$$E = h + \frac{1}{2g} V^2. \quad (6)$$

针对商用飞机的运动特点做如下假定: 1) 飞机运动过程中, 其动能和势能可以在瞬间相互转换; 2) 飞机不做大机动飞行, 其法向加速度可忽略, 即 $V \frac{d\theta}{dt} \approx 0$. 由此, 式 (2) 便化为如下等式约束

$$T \sin \alpha + L = W \cos \theta. \quad (7)$$

式 (1), (3) 则合并为能量状态运动方程, 见式 (8). 再略去飞机重量的动态变化特性 (优化过程中, 视其为时变参数), 则可得飞机质点能量运动模型为

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = V(T \cos \alpha - D)/mg, \\ \frac{dx}{dt} = V \cos \theta + V_w. \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta + V_w. \quad (9)$$

其状态变量减为两个: E 和 x , 控制量为推力 T (或发动机油门位置 π) 和飞行速度 V .

3 能量状态法轨迹优化的原理分析

取飞机的直接操作成本 (DOC) 为优化性能指标, 它是飞机燃油成本和时间成本的综合泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (C_f f + C_t) dt = \int_{t_0}^{t_f} P dt. \quad (10)$$

式中 f 为燃油消耗率, C_f, C_t 为燃油和时间成本系数. 再假定飞机的纵向飞行轨迹至多由三个飞行段组成: 爬升、巡航和下降, 见图 1, 且认为飞机的能量状态在爬升段单调增大 ($E > 0$), 巡航段保持常值 ($E = 0$), 下降段单调减少 ($E < 0$). 如此, 指标函数 (10) 可改写为

$$J = \int_{t_0}^{t_{ci}} P dt + (d_f - d_{up} - d_{dn})\lambda + \int_{t_{cf}}^{t_f} P dt. \quad (11)$$

式中 λ 为巡航飞行中单位距离上的操作成本, 简称巡航成本. 为进一步减少优化计算量, 降低状态方程的维数, 再将式(8)引入性能指标, 将能量状态 E 转化为指标泛函中的独立变量, 则式(8), (9)和(11)可进一步化为:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dE} &= \frac{V \cos \theta + V_w}{V(T \cos \alpha - D)/mg} \\ &= \frac{d(x_{up} + x_{dn})}{dE} \\ &= \left. \frac{V_{up} \cos \theta + V_{wup}}{V(T \cos \alpha - D)/mg} \right|_{E > 0} + \left. \frac{V_{dn} \cos \theta + V_{wdn}}{|V(T \cos \alpha - D)/mg|} \right|_{E < 0}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{E_0}^{E_f} \frac{P}{V(T \cos \alpha - D)/mg} dE \\ &= \{d_f - [x_{up}(E_0) - x_{dn}(E_0)]\} \lambda + \int_{E_0}^{E_f} \frac{P}{E} dE \Big|_{E > 0} + \int_{E_f}^{E_0} \frac{P}{|E|} dE \Big|_{E < 0}. \end{aligned} \quad (13)$$

至此, 轨迹优化问题即是寻求满足的约束式(7), (12), 使性能指标(13)取最小的最佳控制 V 和 π . 定义哈密顿函数

$$H = \frac{P}{E} \Big|_{E > 0} + \frac{P}{|E|} \Big|_{E < 0} + \psi(E) \left\{ \frac{V_{up} \cos \theta + V_{wup}}{E} \Big|_{E > 0} + \frac{V_{dn} \cos \theta + V_{wdn}}{|E|} \Big|_{E < 0} \right\}. \quad (14)$$

式中 $\psi(E)$ 为协态变量. 由动态变分原理, 可得协态方程

$$\frac{d\psi}{dE} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial H}{\partial (x_{up} + x_{dn})} = 0. \quad (15)$$

因式(13)中的端点条件 E_0 和 $x_{up}(E_0)$, $x_{dn}(E_0)$ 均不受约束, 因而有横截条件

$$\psi(E_0) = \frac{\partial \{ [d_f - x_{up}(E) - x_{dn}(E)] \lambda \}}{\partial (x_{up} + x_{dn})} \Big|_{E=E_0} = -\lambda(E_0), \quad (16)$$

$$\left[H + \frac{\partial \{ [d_f - x_{up}(E) - x_{dn}(E)] \lambda \}}{\partial E} \right] \Big|_{E=E_c} = \left[H + d_0 \frac{d\lambda(E)}{dE} \right] \Big|_{E=E_c} = 0. \quad (17)$$

式中 d_0 为巡航段飞行距离. 由式(15), (16)可知

$$\psi(E) = \psi(E_0) = -\lambda(E_0), \quad (18)$$

即哈密顿函数(14)中的协态变量 $\psi(E)$ 恒等于飞机巡航成本的负值. 式(17)可用于对最优飞行轨迹的结构特点进行分析^[6].

由庞特里亚金极小值原理, 最优控制 V 和 π 应使哈密顿函数 H 最小, 即

$$\begin{aligned} I(E, \lambda) &= \min_{V, \pi} H(E, \lambda, V, \pi) \\ &= \min_{V, \pi} \left\{ \frac{P}{E} \Big|_{E > 0} + \frac{P}{|E|} \Big|_{E < 0} - \lambda \left[\frac{V_{up} \cos \theta + V_{wup}}{E} \Big|_{E > 0} + \frac{V_{dn} \cos \theta + V_{wdn}}{|E|} \Big|_{E < 0} \right] \right\} \\ &= I_{up} + I_{dn}. \end{aligned} \quad (19)$$

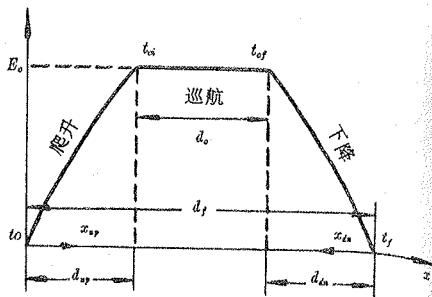


图 1 假定的轨线结构

其中

$$I_{up} = \min_{V_{up}, \pi_{up}} H_{up} = \min_{V_{up}, \pi_{up}} \left[\frac{P - \lambda(V_{up} \cos \theta + V_{Wup})}{E} \right] \Big|_{E > 0}, \quad (20)$$

$$I_{dn} = \min_{V_{dn}, \pi_{dn}} H_{dn} = \min_{V_{dn}, \pi_{dn}} \left[\frac{P - \lambda(V_{dn} \cos \theta + V_{Wdn})}{|E|} \right] \Big|_{E < 0}. \quad (21)$$

式(20), (21)实际上即是对爬升和下降飞行段的优化算法, 其能量初值 E_i 和 E_f 由给定的飞机初始速度、高度和终点高度、速度来确定, 而巡航成本 λ 和能量 E_o 的取值则代表对巡航飞行段的优化. 在一定的巡航能量 E_o 上, 巡航成本 λ 是在满足力平衡方程(7)和式

$$T \cos \alpha - D = 0 \quad (22)$$

的条件下, 对下式的寻优结果

$$\lambda(E_o) = \min_V \frac{C_f \dot{f} + C_i}{V + V_w}, \quad E_o \text{ 为给定值}. \quad (23)$$

4 优化算法与实现

综上, 纵向飞行剖面的优化可分解为对三个特定飞行段(爬升、巡航和下降)的优化过程. 考虑巡航段的优化, 见式(23), 显然巡航成本 λ 与巡航能量 E_o 是密切相关的, 理论分析和数值实例给出了 λ 和 E_o 间的典型曲线关系, 见图 2. 图中, $E_{\max}$ 为飞机最大允许巡航能量, 它是由飞机的推力和阻力特性所决定的. 由图可见, 在某一特定能量 E_o^* 处, 巡航成本 λ 达到最小, 即

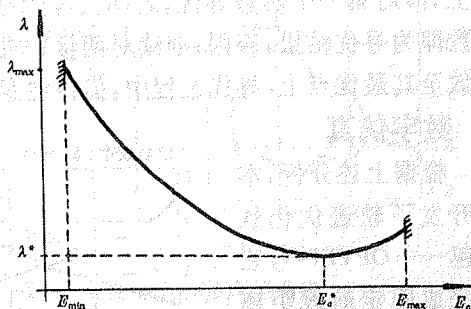


图 2 巡航成本 λ 与巡航能量 E_o 之关系

$$\lambda^* = \min_{E_o} \min_V \frac{C_f \dot{f} + C_i}{V + V_w} = \min_{E_o} \min_V \frac{C_f \dot{f} + C_i}{V + V_w}. \quad (24)$$

由于当速度一定时, 飞机能量与高度一一对应, 见式(6), 因此上式中对 E_o 的寻优可转变为对巡航高度的寻优. 寻优过程中, h_o 和 V 均受一定的约束, 主要由飞机特性所决定, 见文[5].

巡航性能优化的结果表现为巡航性能表, 它依巡航重量的不同分为许多页面. 巡航重量从可能的最小值开始, 以常值间隔 ΔW (本文取为 5000 磅) 递增, 直至飞机最大巡航重量. 在每个离散重量值上通过寻优来计算一个页面的巡航性能表, 列出各离散高度层上的最佳巡航成本、巡航速度、能量 E_o 和推力设置 π 及燃油消耗率等, 同时还给出该页面上(亦即该巡航重量下)的最优巡航高度 h^* , 成本 λ^* 及其它参数. 这样, 不同的页面之间就给出了诸巡航参数对飞机巡航重量的函数关系(以数据表格的形式). 在计算机中, 巡航性能表用多维数组存放, 它对整个轨迹优化是必不可少的.

爬升段的优化实际上就是计算从 E_o 到 E_f 的能量区间上, 对应每个能量值 E_j 时, 使 H_{up} (见式(20)) 为最小的控制量 V_{up}^* 和 π_{up}^* , 具体地, 让飞机重量从 E_o 开始, 以恒定的增量 ΔE (本文取为 500 英尺) 递增, 尔后在每个能量值 E_j 上, 通过对式(20)的寻优来确定出 V_{up}^* 和 π_{up}^* , 并由此计算爬升轨迹的其它参数, 主要计算公式如下:

$$\text{飞行高度 } h_j = E_j - \frac{1}{2g} V_{up,j}^2, \quad (25)$$

飞行时间 $\Delta t_j = \Delta E / \dot{E}_j$,

飞行距离 $d = \sum \Delta d_j = \sum V_{vj} \cos \theta_j \Delta t_j$,

航迹角 $\sin \theta_j = (h_j - h_{j-1}) / \Delta t_j / V_{vj}$,

耗油量 $F = \sum \Delta F_j = \sum \dot{F}_j \Delta t_j$.

式中 V_{vj} 为飞机地速,它是空速 V_{vj}^* 与风速 V_w 的矢量和.

下降段的优化过程及计算公式与爬升段相似,这时,能量从 E_f 依次递增至 E_o , $\dot{E}_j < 0$, 优化指标为式(21).

对各飞行段的优化计算中均需求解某些非线性函数的无约束极值问题,亦即对某些变量的寻优问题,包括一维寻优和二维寻优.对此,本文采用了 Fibonacci 单参数搜索法(又称分数法,变系数黄金分割法等)来予以实现.对二维寻优,则通过如下技术措施来实现:寻优中首先固定第一个参数,对第二个参数寻优;尔后,将第二个参数固定在所得最优值上,再对第一个参数寻优,若两次寻优结果的误差落入允许误差带内,则所得两个优化参数即为寻优结果,否则,继续对两参数进行交替寻优,直至达到要求的精度,使指标函数收敛至其最优点上.寻优过程中,值得注意的是寻优区间的确定.

5 数字仿真

根据上述分析,本文开发了轨迹优化软件包——OPVFP[5],它可完成固定航线距离时纵向飞行轨迹的优化,给出优化剖面的各种性能指标和有关数据.这里,给出对波音 707 飞机的优化仿真结果.

参考文献[3],性能

指标参数取为 $C_f =$

0.0626 元/磅, $C_e = 500$ 元/小时,则巡航性能的优化结果见图 3.其中,(a),(b)为飞机重量为 280000 磅时,巡航成本 λ 、能量 E 和发动机推力设置 π 随巡航高度的变化关系,(c),(d)为最优巡航成本 λ^* 、巡航高度 H^* 和能量 E^* 及巡航马赫数随飞机重量的变化关系.图(a)表明,巡航成本与巡航高度并非单调关系,而是在某一巡航高度 h^* 处, λ 存在最小值,这与图 2 的特性相一致.图(c),(d)表明,随飞机重量的增大,最优巡航高度和能量以及巡航马赫数均逐渐减小,而巡航成本则逐渐增大.这些特点与飞机的实际飞行特性和经验是相符的,也不难理解其物理含义.

取飞机初始重量为 280000 磅,初始状态 $V_0 = 250$ 节, $h_0 = \theta_0 = 0$,航线长度 $d_f = 350$ 海里,终端状态 $V_f = 210$ 节, $h_f = 2000$ 英尺, $\theta_f = 0$ 度,则可得对整个纵向飞行轨迹的优化结果,见图 4.图中,在 10000 英尺高度上,爬升和下降的高度剖面中均出现一水平飞行段,而相应的速度变化很快,这是由于空中交通管制条例要求飞机在 10000 英尺以下时,飞行

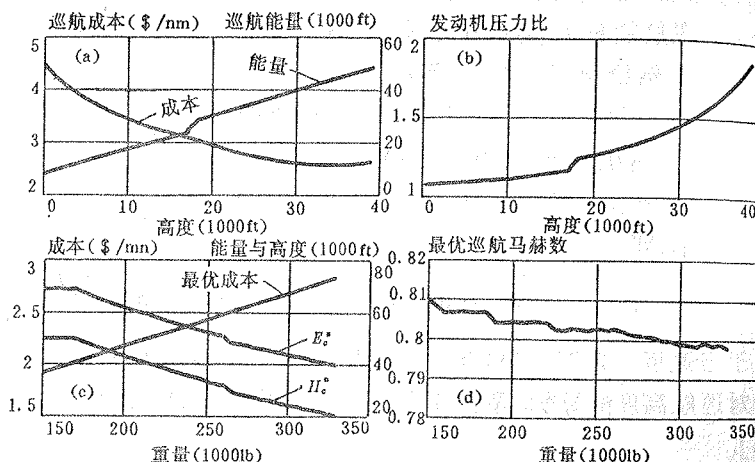


图 3 巡航性能曲线

4期

表速不应超过 250 节而引起的. 这一飞行约束在优化软件中是通过限制寻优区间来实现的. 上述优化航线与实际飞行特性相一致, 也与本文的理论分析相吻合.

6 结 论

理论分析与数字仿真表明, 本文所研究的轨迹优化方法是可行的, 它具有计算量小、收敛快和数值稳定性高等特点. 因此, 该方法可用来对民用航线制定详细的飞行计划, 以减少飞行总成本, 提高运营效益. 同时, 也可用于机载飞行管理计算机系统, 来实时地优化飞行性能, 并根据实际飞行中的各种限制和要求, 制定出成本最少的最优航线, 从而节省燃油, 降低操作成本.

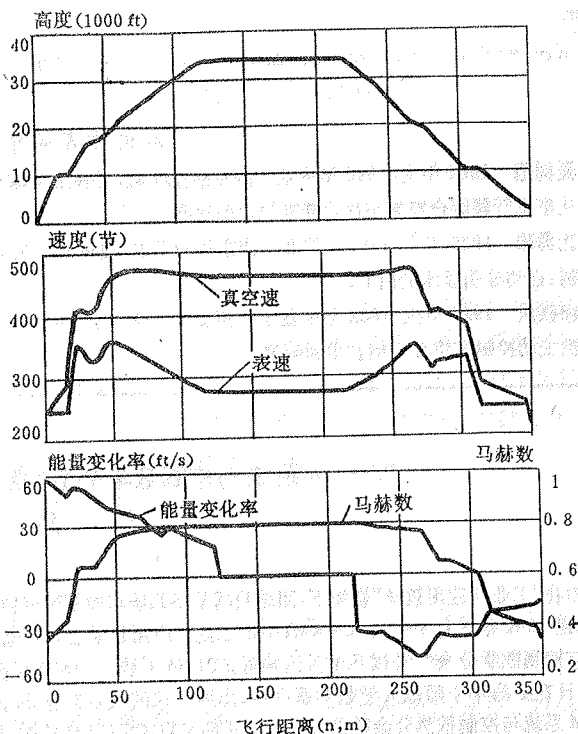


图 4 最优飞行剖面的特性曲线

参 考 文 献

- [1] 吴树范, 郭锁凤, 沈勇璋. 飞行管理系统的发展及其主要技术问题. 火力与指挥控制, 1989, 14(4): 1—7
- [2] Bryson, A. E., Desai, M. N. and Hoffman, W. G.. Energy State Approximation of Supersonic Aircraft. J. of Aircraft, 1969, 6(6): 481—488
- [3] Lee, H. Q. and Erzberger, H.. Algorithm for Fixed-Range Optimal Trajectories. NASA TP-1565, July, 1980
- [4] Sorenson, J. A.. Generation and Evaluation of Near-Optimal Vertical Flight Profile. American Control Conf, 1983, 2: 513—518
- [5] 吴树范. 基于总能量原理的飞行性能管理与综合控制技术的研究. 南京航空学院博士学位论文, 1990. 9.

Trajectory Optimization of Aircraft Vertical Flight Profile

WU Shufan, SHEN Yongzhang and GUO Suofeng

(Department of Automatic Control, Nanjing Aeronautical Institute • Nanjing, 210016, PRC)

Abstract: The trajectory optimization techniques of aircraft vertical flight profile were studied in this paper. The point-mass energy state approximation model of aircraft motion was used as state equations, direct operating cost (DOC) as the index function. The vertical flight profile was assumed to have three flight segments: climb, cruise and descent. The energy state was taken into the index function, and became the independent or time-like variable in the Hamilton function. By using the dynamic variation method and the minimum value principle, the optimization algorithms for three segments were developed, and the Fibonacci search method was used to realize the optimization process. Finally, some digital simulation results for a Boeing-707 aircraft model were given in this

paper.

Key words: optimal control; trajectory optimization; flight performance optimization; flight management

本文作者简介

吴树范 1964年生. 1990年毕业于南京航空学院, 并获工学博士学位. 现任南京航空学院自动控制系讲师. 目前主要从事飞行器综合控制与优化管理技术的研究.

沈勇璋 1939年生. 1961年毕业于南京航空学院. 现任南京航空学院自动控制系副教授. 目前主要从事飞行器自动控制, 自动导引技术的研究.

郭锁凤 1929年生. 1952年毕业于上海交通大学. 现任南京航空学院自动控制系教授. 博士生导师. 目前主要从事飞机主动控制与综合控制技术的研究.

“CSIAM 系统与控制数学分会”成立会暨学术讨论会 纪 要

为在“工业与应用数学”旗帜下, 团结我国从事系统与控制研究的应用数学工作者开展专题研究, 加强国内外学术交流, 经 1991 年 8 月 4~5 日 CSIAM(中国工业与应用数学学会)第一届第二次常务理事(扩大)会议决定, 成立“CSIAM 系统与控制数学分会”. 经过几个月的筹备, CSIAM 系统与控制数学分会成立会暨学术讨论会, 于 1992 年 5 月 24 日至 28 日在上海华东师范大学数学系举行, 出席会议的代表共有 54 人, 他们来自全国 19 所高等院校和研究所, 其中 CSIAM 系统与控制数学分会委员有 19 人. 开幕式前, CSIAM 组织委员会主任江文华代表总会宣读了聘任的系统与控制数学分会主任和副主任名单, 分会副主任委员, 华东师范大学数学系主任胡启迪主持了开幕式, 分会主任委员李训经教授致开幕词并阐述了分会的筹备经过. CSIAM 副理事长李大潜教授和华东师范大学副校长陶增乐教授专程到会并先后致词, 他们对会议的召开表示热烈的祝贺, 并对分会提出了殷切的期望. 会议期间共宣读论文 28 篇, 内容涉及随机控制, 自适应控制, 分布参数系统控制, 最优控制, 稳健控制, 系统稳定性和反馈镇定, 非线性系统, 离散事件系统和系统与控制数学在人口及工业领域中的应用等. 会议期间, 大家回顾了老一辈数学家关肇直, 张学铭先生在我国系统与控制领域研究活动中的开拓作用, 以及近十几年来一大批中年科学工作者在系统与控制领域研究中所取得的成果. 大家感到, 面对着九十年代, 我们应尽快地把年轻的系统与控制研究工作者推至舞台的前面, 让他们唱主角. 在这次大会上作主题报告的年轻博士有中国科学院系统科学研究所郭雷研究员, 浙江大学数学所陈叔平教授, 山东大学数学系彭实戈教授, 复旦大学数学系雍炯敏教授, 他们是我国在系统与控制数学理论中涌现出来的新秀. 分别在自适应控制, 随机控制, 最优控制和粘性解理论方面作出了重要工作, 表明我国在这些领域的研究已达到国际前沿水平, 与会代表对他们的报告表示热烈欢迎, 并希望在学术活动中多安排这样的报告, 促进我国年轻一代更快地成长.

会议期间举行了两次分会委员会议和一次大会讨论, 与会者踊跃发言, 围绕如何认识分会的特点和如何发挥分会的组织作用, 以及在研究生教育等有关问题上提出了许多有益意见, 怀着促使我国的系统与控制数学理论在某些方向尽早在国际上处于重要地位这一强烈愿望, 分会委员会对今后的工作作了研究, 并提出如下决定与建议:

(1) 每两年举行一次分会学术会议, 每次学术会议可有一个侧重的主题.

(2) 分会聘任雍炯敏(复旦大学数学系)为秘书长, 陈树中(华东师范大学数学系)为副秘书长, 以协助主任、副主任处理日常工作.

(3) 下次学术会议将在山东大学举行, 由副主任委员陈祖浩负责筹办.

(4) 争取分会和每次学术会议筹办单位能负责组织出版学术会议论文集, 费用原则上由作者承担.

(5) 学术会议期间, 努力组织一些专题讲座, 聘请有影响的专家授课, 引导广大理论工作者跟上国际重要研究方向, 并有所突破.

(6) 会议建议金山石化总厂, 宝山钢铁总厂, 北京燕山石化厂, 南开大学, 山东大学, 清华大学和华东师范大学 7 个单位参加 1992 年 9 月由 CSIAM 组织, 在金山石化总厂召开的 CSIAM 学术会议专题讨论会, 具体联络已分头落实, 并建议由副主任委员郑大钟负责组织这次专题讨论会.

分会委员和会议代表对华东师范大学数学系和复旦大学数学系在会议前和会议中起的组织作用和所给的支持表示衷心的感谢.

华东师范大学数学系