辨识连续模型的高阶近似积分法

黄新生

(国防科学技术大学·长沙,410073)

摘要：本文提出了一种用采样数据辨识连续时间系统参数的高阶近似积分方法. 理论分析指出用这种方法进行辨识的方程式具有很高的精度. 仿真实验表明：此方法不但具有很高的辨识精度，而且具有很好的抗干扰能力.

关键词：系统辨识；参数估计；采样数据系统

1　引　　言

差分模型是连续模型的近似，特别是在采样频率不能太高的场合精度很差. 一般来说，采用离散模型替代连续模型控制后，会使控制性能下降，甚至使系统不稳定. 再说，系统的本质是连续的. 我们对系统的了解及分析方法是连续的. 我们希望获得系统的连续模型. 但我们的运算工具是计算机，只能通过获得采样信息来作离散时间处理. 因此，利用采样数据辨识连续模型的研究. 已成为系统辨识的一个重要课题[1~3].

2　高阶近似的辨识方法

差分模型至多只有一阶精度[4]，如果作高阶近似离散化后，则得不到一个离散模型来描述系统的运动，并用它对系统进行控制，但高阶近似离散化后可以得到一个方程，我们利用这个方程进行参数辨识是完全可行的. 它的辨识精度自然要比差分方程方法要高.

设系统的输入输出方程为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^{(i)}}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{\mathrm{d}^{(j)}}{\mathrm{d}t^j} u(t) + \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \frac{\mathrm{d}^{(i)}}{\mathrm{d}t^i} \varepsilon(t). \tag{1}$$

这里 $u(t)$ 是输入、$y(t)$ 是输入、$\{a_i\}\{b_j\}$ 是系统未知参数，假设 n 是已知的，$\varepsilon(t)$ 是各态历经的干扰噪声.

当 $\varepsilon(t)$ 均值为零、初态 $y^{(i)}(0)$、$u^{(j)}(0)$ 为零时，对方程(1)在区间$[0,t]$取积分 n 次可得

$$\sum_{i=0}^{n} a_i I_y^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j I_u^{n-j}. \tag{2}$$

式中 $I_y^k = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t y(t)\mathrm{d}t \cdots \mathrm{d}t$（积分 K 次），I_u^k 类似.

对于二阶近似插值函数可表示为

$$q(t) = f_{k-1} \frac{(t-(k+1)T)(t-kT)}{2T^2} + f_k \frac{(t-(k-1)T)(t-(k+1)T)}{-T^2} + f_{k+1} \frac{(t-kT)(t-(k-1)T)}{2T^2}. \tag{3}$$

将 $q(t)$ 从 $(k-1)T$ 到 kT 作积分

本文于1990年5月11日收到. 1991年10月14日收到修改稿.

$$\int_{(k-1)T}^{kT} q(t)\mathrm{d}t = \left(\frac{5}{12}f_{k-1} + \frac{2}{3}f_k - \frac{1}{12}f_{k+1}\right)T. \tag{4}$$

将 $q(t)$ 从 $(k-1)T$ 到 $(k+1)T$ 作积分有

$$\int_{(k-1)T}^{(k+1)T} q(t)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{3}f_{k-1} + \frac{4}{3}f_k + \frac{1}{3}f_{k+1}\right)T. \tag{5}$$

$f(t)$ 从零到 iT 的近似积分(复化形式)

当 i 为奇时：

$$\begin{aligned}\int_0^{iT} f(t)\mathrm{d}t &= \sum_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} \int_{2(j-1)T}^{2jT} f(t)\mathrm{d}t + \int_{(i-1)T}^{iT} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} \left[\frac{1}{3}f_{2(j-1)} + \frac{4}{3}f_{2j-1} + \frac{1}{3}f_{2j}\right]T + \left[\frac{5}{12}f_{i-1} + \frac{2}{3}f_i - \frac{1}{12}f_{i+1}\right]T.\end{aligned} \tag{6}$$

当 i 为偶时：

$$\int_0^{iT} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{\frac{i}{2}} \left[\frac{1}{3}f_{2(j-1)} + \frac{4}{3}f_{2j-1} + \frac{1}{3}f_{2j}\right]T. \tag{7}$$

由插值余项定理可推得

式(4)的积分余项

$$R_2 = \frac{T^4}{24}f^3(\xi), \quad (k-1)T \leqslant \xi \leqslant (k+1)T. \tag{8}$$

它具有二次代数精度.

式(5)的积分余项

$$R_3 = -\frac{T^5}{90}f^4(\eta), \quad (k-1)T \leqslant \eta \leqslant (k+1)T. \tag{9}$$

它具有三次代数精度.

如果我们用向量 $[f_1, f_2, \cdots, f_m]_{si}$ 表示 $f(t)$ 积分 i 次后的采样值(取 m 为偶数)则可表示为

$$[f_1, f_2, \cdots, f_m]_{s1} \doteq [f_0, f_1, \cdots, f_m]p_s.$$

其中

$$p_s = \begin{bmatrix} 5/12 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots \\ 2/3 & 4/3 & 4/3 & 4/3 & \cdots \\ 1/12 & 1/3 & 3/4 & 2/3 & \cdots \\ & & 2/3 & 4/3 & \cdots \\ & 0 & -1/12 & 1/3 & \cdots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}_{(m+1)\times m} \tag{10}$$

当初值 f_0 为零时可去掉 p_s 的第一行记为 p_{s0}. 对于积分采样值，初值总是为零，因此

$$[f_1, f_2, \cdots, f_m]_{s(k+1)} = [f_1, f_2, \cdots, f_m]_{sk} p_{s0}. \tag{11}$$

我们把 p_s 称为二阶积分算子阵. 用二阶积分算子阵对方程(2)作近似积分可得

$$a_n Y_1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_0 p_s p_{s0}^{n-i-1} \doteq \sum_{i=0}^{n-1} b_j U_0 p_s p_{s0}^{n-i-1}. \tag{12}$$

式中

$$Y_1 = [y(T), y(2T), \cdots, y(mT)],$$
$$Y_0 = [y(0), y(T), y(2T), \cdots, y(mT)],$$
$$U_0 = [U(0), U(T), \cdots, U(mT)].$$

由式(6)可看出，复化公式主要是使用(5)式，可以说(12)式的近似积分具有三次代数精度.(12)式表明.已将(2)的积分方程转化为一个代数方程.a_i、b_j 是未知参数，采用最小二乘方法可以求得待辨识的参数.

对于三阶以上的近似，可以用类似的方法得到一代数方程，只是积分算子不同.

当系统具有非零初始条件和非零均值噪声时，设系统的初始条件为 $y^{(i)}(0)$，$u^{(j)}(0)$，$\varepsilon(t)$的均值为 E.

如果定义
$$v(t) = \varepsilon(t) - E,$$
那么 $v(t)$具有零均值.对方程从零到 t 取 n 次积分可得
$$y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i I_y^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j I_u^{n-j} + C_0 + C_1 t + \cdots + C_n t^n. \tag{13}$$

C_i 是由 $y^{(i)}(0)$、$u^{(j)}(0)$、$v^{(i)}(0)$及 E 确定的，对于辨识问题我们并不关心其显式关系.把 t^i 作为采样值，而把 C_i 作为参数来估计，可消除非零初态和非零均值的影响，获得 a_i、β_j 的精确的参数估计.见文[5].

3 浮点误差分析

算法采用多重积分，计算量很大.有必要对计算机的舍入误差作出分析.设计算机采用十进制的浮点运标表示.对于复化求积运算，可表示为如下形式
$$s_N = fe(a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_N f_N). \tag{14}$$
式中 fe 表示浮点运算.

令
$$t_r = fe(a_r f_r), \quad (r = 1, 2, \cdots, N),$$
$$s_1 = t_1, \quad s_r = fe(s_{r-1} + t_r), \quad (r = 2, 3, \cdots, N).$$
则
$$t_r = a_r f_r (1 + \xi_r), \quad \left(|\xi_r| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right),$$
$$s_r = (s_{r-1} + t_r)(1 + \eta_r), \quad \left(|\eta_r| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right),$$
$$s_N = a_1 f_1 (1 + \varepsilon_1) + a_2 f_2 (1 + \varepsilon_2) + \cdots + a_N f_N (1 + \varepsilon_N),$$
$$1 + \varepsilon_1 = (1 + \xi_1)(1 + \eta_2) \cdots (1 + \eta_N),$$
$$\left(1 - \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right)^N \leqslant 1 + \varepsilon_1 \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right)^N,$$
$$1 + \varepsilon_r = (1 + \xi_r)(1 + \eta_r) \cdots (1 + \eta_N),$$
$$\left(1 - \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right)^{N-r+2} \leqslant 1 + \varepsilon_r \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right)^{N-r+2}. \tag{15}$$
式中 ξ、η、ε 为相对误差，t 为有效位数见文[6].

由 $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_r|$ $(r=2,3,\cdots,N)$适当放大误差限可得
$$\sum_{i=1}^{N} a_i f_i \left(1 - \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right)^N \leqslant s_N \leqslant \sum_{i=1}^{N} a_i f_i \left(1 + \frac{1}{2} \times 10^{1-t}\right)^N. \tag{16}$$

作 n 重积分时有

$$s_N^{n*}\left(1-\frac{1}{2}\times 10^{1-t}\right)^{Nn}\leqslant s_N^n\leqslant s_N^{n*}\left(1+\frac{1}{2}\times 10^{1-t}\right)^{Nn}. \tag{17}$$

式中 s_N^{n*} 为计算真值，s_N^n 为浮点运算值.

其相对误差约为

$$\varepsilon \doteq \frac{Nn}{2}\times 10^{1-t}. \tag{18}$$

实际计算时，可根据(18)式来选择有效位数 t 和采样点数目 N，也可用来估计舍入误差的影响.

4 仿真实例

设系统为

$$y^{(4)}=-10y^{(3)}-35y^{(2)}-50y^{1}-24y+4I(t).$$

取 $T=0.01$ 采样次数为 $N=200$，采样数据的相对误差 $\varepsilon=1/1000$ 块脉冲函数法的辨识结果为

$$a_1=-9.901342931203544,\quad a_2=-35.08606826467439,$$
$$a_3=-49.01155421789735,\quad a_4=-24.79665762279183,$$
$$b=3.979074721733923.$$

二阶积分法的辨识结果为

$$a_1=-10.00884915789356,\quad a_2=-35.01017989526736,$$
$$a_3=-50.04167221882380,\quad a_4=-24.00451524800155,$$
$$b=3.999994745638105.$$

再取 $T=0.01$ 采样次数为 $N=200$，相对误差 $\varepsilon=5/100$.

块脉冲函数法的结果为

$$a_1=5.386190908960998,\quad a_2=-55.43825015728362,$$
$$a_3=117.2612849073485,\quad a_4=-170.0231650387868,$$
$$b=1.124682593930629.$$

二阶积分法的辨识结果为

$$a_1=-9.867162473325152,\quad a_2=-34.62586812349036,$$
$$a_3=49.54308035457507,\quad a_4=-23.65429323457647,$$
$$b=3.846881377321552.$$

从以上结果可以看到，当干扰较严重时，块脉冲函数法已无法得出正确结果，而二阶积分法仍能得到比较好的结果. 如果采样周期增大，微分方程的阶次更高，这两种方法的精度差别还会更大，就不在这里例举了.

5 结束语

二阶积分辨识法，参数辨识的精度很高，抗干扰能力强，是辨识连续模型参数的有效方法. 但也有它的不足，计算量较大，约与块脉冲函数法相当. 由于离散化是积分型的，难以得到辨识的递推算法.

参考文献

[1] Sinha, N. K.. Estimation of Transfer Function of Continuous System from Sampled Data. Proc. IEE. 1972, 119:612-614

[2] Peter Young. Parameter Estimation for Continuous-time Model—A Survey. Automatica, 1981, 17:23—29

[3] Sinha, N. K. and Zhou Qijie. Identification of Multi-Variable Continuous Time System from Samples of Input-Output Data. 控制理论与应用, 1984, 1(1):110—115

[4] 黄新生. 关于《Identification of Multi-Variable Continuous Time System from Samples of Input-Output Data》的注记. 控制理论与应用, 1987, 17(1):23—29

[5] Xin-shen Huang and Gwang-wen Han. An Identification Method of Continuous-Time Systems under Non-Zero Initial conditions and Non-Zero-Mean Noises. 8th IFAC/IFORS Smposium, Pergamon Press, 1988, 573—575

[6] Wilkinson, J. H.. Rounding Errors in Algebraic Processes. Prentice-hall, Inc. Englewood:cliffs, N. J. 1963, 1—50

An Identification Method of High-Order Numerical Integration for Continuous Models

HUANG Xinshen

(National University of Defense Technology·Changsha, 410073, PRC)

Abstract: This paper presented a high-order approximation method about identification of continuous-time system from sampled data. Theoretical analysis indicates that the equation used in the identification method possess a very high accuracy. Simulation examples demostrated the high identification accuracy. Moreover, it has excellent robustness.

Key words: system identification; parameter estimation; sampled data systems

本文作者简介

黄新生 1955年生. 1981年毕业于西安交通大学自动控制专业，尔后在华中工学院系统工程专业获硕士学位. 现为国防科技大学自控系讲师. 主要涉及的研究领域有：系统建模，离散时间系统，非线性系统，最优控制，飞行器控制及人工神经网络等.