

一个控制系统的解耦问题

张 嗣 瀛

(东北工学院)

提 要

一导弹在飞行中同时绕其纵轴旋转, 控制系统将操纵它的俯仰和偏航两种运动。但若有关参数选择不当, 将产生交叉耦合现象, 即当给出俯仰指令时却同时产生偏航运动, 反之亦然。本文给出一种解耦方法。

一、系统的描述

1. 控制力和指令信号

设 ox 是弹的纵轴, oy 在包括弹轴的铅垂平面内, 并与 ox 相垂直, oz 与以上两轴构成右手坐标系。这种坐标系称为“准弹体坐标系”或“固连坐标系”。弹在飞行中将绕纵轴旋转, 从弹的尾部看, 旋转方向是顺时针的。

控制力是由续航发动机的两个活动喷管产生的。喷管受控制机构的作用可向左或右摆动一个角度, 当摆动向一边时, 即产生作用于 oyz 平面上的控制力。将弹的旋转角记作 γ , 它是从垂直轴 cy 计起的 (见图 1.1 (a))。两活动喷管所产生的控制力作用于弹体的尾部两侧, 其合力记作 $\bar{F}_k$ 。 $\bar{F}_k$ 的作用线距质心 o 的垂直距离为 L , 在 oyz 平面上

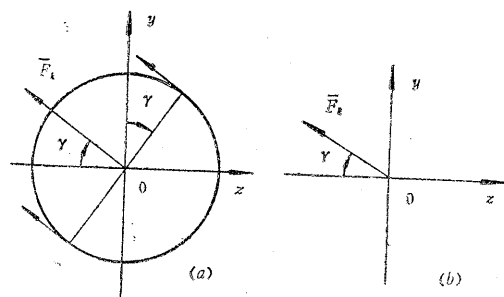


图 1.1

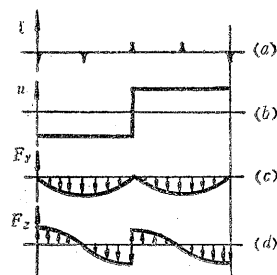


图 1.2

的投影将如图 1.1 (a)。据几何关系, $\bar{F}_k$ 与水平轴的夹角也为 γ (图 1.1 (b)), 故控制力在 y 、 z 方向分力的大小将如下:

$$\begin{aligned} F_y &= F_k \sin \gamma, \\ F_z &= -F_k \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

这里 F_k 是 $\bar{F}_k$ 的幅值.

控制机构按照控制指令信号动作, 指令信号又由脉冲调宽系统产生. 说明如下: 当弹体每旋转 90° , 相应的电路将产生一个脉冲, 它将对控制系统的电路起触发作用, 并与操纵者的动作配合, 产生不同宽度和正负的指令信号波形. 以“全上”指令为例, 指令信号 u 的波形将如图 1.2 中的 (b).

控制力将随 u 的正负变化:

$$\begin{aligned} F_y &= F_k \sin \gamma \cdot \text{sign } u, \\ F_z &= -F_k \cos \gamma \cdot \text{sign } u. \end{aligned} \quad (1.2)$$

对于“全上”指令, y 和 z 方向的控制力将如图 1.2 中的 (c) 和 (d).

由于弹的惯性, 控制力的作用将以周期 (每转一周) 平均值的效应显示出来. 例如“全上”指令, 由图 1.2 可见: y 方向有向下的平均控制力, 它作用于尾部, 使弹抬头, 产生攻角, 并向上飞行. 而 z 方向的平均控制力为零, 故无侧滑运动.

将周期平均控制力记作 $\bar{F}$, 它还可由矢量法表示. 亦即可直接根据指令波形用简单的矢量加法得到一个合矢量 $\bar{R}$, 而 $\bar{F}$ 和 $\bar{R}$ 间的关系为

$$\bar{F} = \frac{F_k}{\pi} \bar{R}. \quad (1.3)$$

关于 $\bar{R}$ 如何求出以及矢量表示法的详细讨论可参看 [1].

2. 运动方程

导弹是基本保持平飞的, 这时运动方程可简化如下:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -A_{11}\alpha + \omega_z - A_{10} + A_{1k}F_k \sin \gamma, \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= A_{21}\alpha + A_{22}\omega_z + A_{23}\beta + A_{25}\omega_y - A_{2k}F_k \sin \gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} &= -B_{11}\beta + \omega_y + B_{1k}F_k \cos \gamma, \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= B_{31}\alpha + B_{32}\omega_z + B_{33}\beta + B_{35}\omega_y - B_{3k}F_k \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中

α ——攻角,

β ——侧滑角,

$\bar{\omega}$ ——弹体相对于惯性坐标系转动的角速度,

ω_y, ω_z ——分别为 ω 在 y, z 轴上的投影,

$$A_{11} = \frac{P - F_x + Y^\alpha}{mV},$$

$$B_{11} = \frac{P - F_x - Z^\beta}{mV},$$

$$A_{21} = \frac{M_x^\alpha}{J_x},$$

$$B_{21} = \frac{M_y^\beta}{J_y},$$

$$A_{22} = \frac{M_x^{\omega_z}}{J_x},$$

$$B_{22} = \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y},$$

$$A_{10} = -\frac{g}{V},$$

$$A_{1k} = B_{1k} = -\frac{1}{mV},$$

$$A_{2k} = -B_{2k} = \frac{J_x \dot{\gamma}}{J_z},$$

$$A_{2k} = B_{2k} = \frac{L}{J_z},$$

$$A_\beta = \frac{M_{\beta M}^\beta}{J_x},$$

$$B_\alpha = \frac{M_{\gamma M}^\alpha}{J_y},$$

P ——发动机推力的大小,

F_x ——发动机喷管摆动所引起的推力损失,

m ——导弹的质量,

V ——质心的速度,

g ——重力加速度,

Y^α ——升力系数,

Z^β ——侧滑力系数,

J_x, J_y, J_z ——导弹绕 x, y, z 各轴的转动惯量,

M_x^α ——俯仰恢复力矩系数,

M_y^β ——偏航恢复力矩系数,

$M_x^{\omega_z}$ ——俯仰阻尼力矩系数,

$M_y^{\omega_y}$ ——偏航阻尼力矩系数,

$\dot{\gamma}$ ——导弹相对于纵轴的旋转速度,

L ——自导弹质心到尾端的距离,

$M_{\beta M}^\beta, M_{\gamma M}^\alpha$ ——气动交叉力矩系数 (Magnus 力矩),

二、交叉耦合及其解除

1. 交叉耦合问题

在方程组(1.4)中,前两个方程描写 α 、 ω_z 的变化,是关于俯仰方向的,后两个描写 β 、 ω_y 的变化,是关于偏航方向的.前两个方程中的 $A_{\beta}\beta$ 和 $A_{2b}\omega_y$ 两项,表示偏航对于俯仰的影响,后两个方程中的 $B_a\alpha$ 和 $B_{2a}\omega_z$ 两项,表示俯仰对偏航的影响,这就是两个方向间的交叉耦合项.

我们的问题,是将两方向间的耦合项解除.

2. 解耦的方法

在导弹上装有一个电刷.此电刷有一安装角 γ_0 .导弹旋转角 γ 与 γ_0 间的关系将为

$$\gamma = \gamma_0 + \dot{\gamma}t.$$

γ 仍然是从 oy 轴起始按顺时针方向计算的.

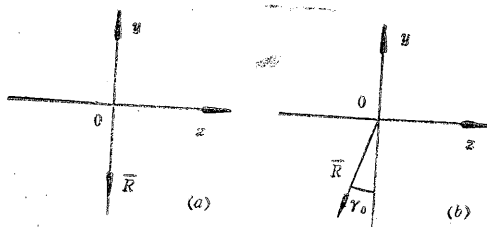


图 2.1

γ_0 将使周期平均控制力的相位发生变化.以“全上”指令为例,当 $\gamma_0 = 0$ 和 $\gamma_0 \neq 0$ 时,(1.3)式中的 $\bar{R}$ 将如图2.1的(a)和(b).由(b)可见, $\bar{R}$ 有向下及向左的两个分量,向左的分量,将使弹向右转弯飞行,所以有了 γ_0 ,已使“全上”指令化为“上右”指令.正是由于这种效果,我们将利用 γ_0 的适当选择,使交叉耦合项解除.

今将 $\gamma = \gamma_0 + \dot{\gamma}t$ 代入(1.4)式,并设想,若适当选取 γ_0 ,使下式成立

$$\begin{aligned} A_{\beta}\beta + A_{2b}\omega_y - A_{2h}F_h \sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) &= -A_{2h}F_h \sin \dot{\gamma}t, \\ B_a\alpha + B_{2a}\omega_z - B_{2h}F_h \cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) &= -B_{2h}F_h \cos \dot{\gamma}t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

则(1.4)式将化为

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -A_{11}\alpha + \omega_z & -A_{10} + A_{1h}F_h \sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t), \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= A_{21}\alpha + A_{22}\omega_z & -A_{2h}F_h \sin \dot{\gamma}t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} &= -B_{11}\beta + \omega_y + B_{1k}F_k \cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t), \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= B_{21}\beta + B_{22}\omega_y - B_{2k}F_k \cos \dot{\gamma}t. \quad (2.2)\end{aligned}$$

这样, 在方程组的齐次项中, 已解除了两种运动的交叉. 但在第一、三方程中, 由于含有 γ_0 , 和第二、四方程中控制力的项相位将不相同. 对此, 可处理如下: 将第一、三方程中含控制力的项写成

$$\begin{aligned}A_{1k}F_k \sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) &= A_{1k}F_k \sin \dot{\gamma}t + A_{1k}F_k [\sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) - \sin \dot{\gamma}t], \\ B_{1k}F_k \cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) &= B_{1k}F_k \cos \dot{\gamma}t + B_{1k}F_k [\cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) - \cos \dot{\gamma}t].\end{aligned}$$

在实际系统中, A_{1k} 、 B_{1k} 与其他系数相比, 其值甚小, 可将上式右端两项

$$\begin{aligned}A_{1k}F_k [\sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) - \sin \dot{\gamma}t], \\ B_{1k}F_k [\cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) - \cos \dot{\gamma}t]\end{aligned}$$

略去, 将不致引起大的误差. (2.2) 式又将化为

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -A_{11}\alpha + \omega_z & -A_{10} + A_{1k}F_k \sin \dot{\gamma}t, \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= A_{21}\alpha + A_{22}\omega_z & -A_{2k}F_k \sin \dot{\gamma}t, \\ \frac{d\beta}{dt} &= & -B_{11}\beta + \omega_y & + B_{1k}F_k \cos \dot{\gamma}t, \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= & B_{21}\beta + B_{22}\omega_y & - B_{2k}F_k \cos \dot{\gamma}t.\end{aligned} \quad (2.3)$$

显然可见, 此系统两种运动间的交叉耦合已经完全解除了. 因此, 满足 (2.1) 式的 γ_0 , 将是我们所寻求的参数. 下面, 将解出 γ_0 的表达式.

3. γ_0 的表达式

(2.1) 中随 t 变化的控制力, 将用周期平均控制力代替. 据前所述, 并类似于图 2.1, 与含 $\dot{\gamma}t$ 及含 $(\gamma_0 + \dot{\gamma}t)$ 相对应的平均控制力将分别如图 2.2 中的 (a) 和 (b), 于是,

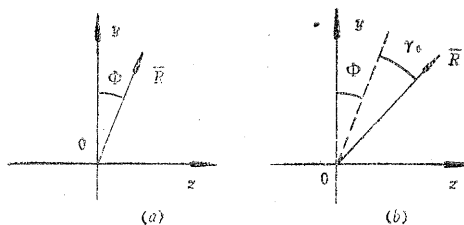


图 2.2

y 、 z 两方向的平均控制力可分别写为

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{F_k R}{\pi} \cos \Phi, & F_z &= \frac{F_k R}{\pi} \sin \Phi, \\ F_y &= \frac{F_k R}{\pi} \cos(\Phi + \gamma_0), & F_z &= \frac{F_k R}{\pi} \sin(\Phi + \gamma_0), \end{aligned}$$

其中的 Φ 见图 2.2. 代入 (2.1) 中相对应的项, 得

$$\begin{aligned} A_\beta \beta + A_{2\beta y} \omega &= \frac{-A_{2k} F_k R}{\pi} [\cos \Phi - \cos(\Phi + \gamma_0)], \\ B_\alpha \alpha + B_{2\alpha} \omega_z &= \frac{B_{2k} F_k R}{\pi} [\sin \Phi - \sin(\Phi + \gamma_0)], \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \cos \Phi - \cos(\Phi + \gamma_0) &= \frac{-(A_\beta \beta + A_{2\beta y} \omega) \pi}{A_{2k} F_k R}, \\ \sin \Phi - \sin(\Phi + \gamma_0) &= \frac{(B_\alpha \alpha + B_{2\alpha} \omega_z) \pi}{B_{2k} F_k R}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

上式左端有明显的几何意义, 它们分别为长度为 1 并与 y -轴成 Φ 角及 $\Phi + \gamma_0$ 角的两个矢量在 y -轴及 z -轴上投影之差 (见图 2.3).

由几何关系, 可得出二矢量之差的矢量 $\bar{r}$, 其长度为

$$r = 2 \sin \frac{\gamma_0}{2}.$$

它与 y -轴的夹角 Φ' 为

$$\Phi' = \frac{3\pi}{2} + \Phi + \frac{\gamma_0}{2}.$$

故有

$$\begin{aligned} \cos \Phi' &= \sin \left(\Phi + \frac{\gamma_0}{2} \right), \\ \sin \Phi' &= -\cos \left(\Phi + \frac{\gamma_0}{2} \right). \end{aligned}$$

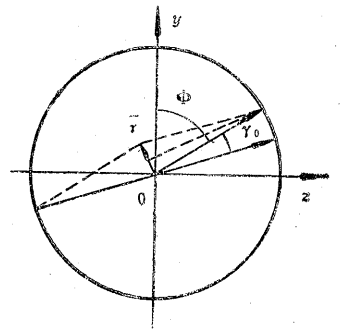


图 2.3

这样一来, (2.4) 式可写成

$$2 \sin \frac{\gamma_0}{2} \sin \left(\Phi + \frac{\gamma_0}{2} \right) = \frac{-(A_\beta \beta + A_{2\beta y} \omega) \pi}{A_{2k} F_k R},$$

$$-2 \sin \frac{\gamma_0}{2} \cos \left(\Phi + \frac{\gamma_0}{2} \right) = \frac{(B_a \alpha + B_{2a} \omega_z) \pi}{B_{2k} F_k R}.$$

自此式解 γ_0 ，并注意到 $A_{2k} = B_{2k}$ ，可得

$$\sin \frac{\gamma_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{B_{2k} F_k R} \sqrt{(A_{\beta} \beta + A_{2b} \omega_y)^2 + (B_a \alpha + B_{2a} \omega_z)^2}. \quad (2.5)$$

这就是 γ_0 的表达式，也是解耦条件。

4. 以运动方程的系数表达的解耦条件

求出 α 、 β 、 ω_y 、 ω_z 各量在过渡过程结束后的稳态值，代入 (2.5)，便可得到以运动方程的系数表达的解耦条件。这种条件可直接据系数计算，在实用中更为方便。

当过渡过程结束，上述各量达到稳态值（常数值）时，将有

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} = 0.$$

代入 (2.3) 式，其中控制力项仍记作 F_y 和 F_z ，可得

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A_{22}A_{10} - (A_{22}A_{1k} + A_{2k})F_y}{-(A_{21} + A_{11}A_{22})}, \\ \omega_z &= \frac{-A_{21}A_{10} + (A_{21}A_{1k} - A_{11}A_{2k})F_y}{-(A_{21} + A_{11}A_{22})}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\beta = \frac{(B_{22}B_{1k} + B_{2k})F_z}{-(B_{21} + B_{11}B_{22})},$$

$$\omega_y = \frac{(-B_{21}B_{1k} + B_{11}B_{2k})F_z}{-(B_{21} + B_{11}B_{22})}.$$

代入 (2.5)，其中的 F_y 、 F_z 仍用前面的平均控制力的表达式代入，便得到

$$\begin{aligned} \sin \frac{\gamma_0}{2} &= \frac{1}{2B_{2k}} \sqrt{\left[\frac{A_{\beta}(B_{22}B_{1k} + B_{2k}) + A_{2b}(B_{11}B_{2k} - B_{21}B_{1k})}{(B_{21} + B_{11}B_{22})} \sin \Phi \right]^2 +} \\ &\quad + \left[\frac{B_a(A_{22}A_{1k} + A_{2k}) + B_{2a}(A_{11}A_{2k} - A_{21}A_{1k})}{(A_{21} + A_{11}A_{22})} \cos \Phi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{F_k R} \frac{(B_a A_{22} - B_{2a} A_{21}) A_{10}}{(A_{21} + A_{11} A_{22})} \right]^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

从上式看到， γ_0 的值不仅和运动方程的系数相关，还和周期平均控制力的相位 Φ 及 R 相关， R 将随指令不同而变。又，方程组中的系数，也将随导弹的速度、转速、气动参数等变化。因此，实际选定的 γ_0 不可能完全适合一切指令和一切情况（电刷安装

角 γ_0 一旦确定, 在实际情况中就不能再变化), 而只能据某些典型指令 (如 “纯上 (下)”、“纯左 (右)”、“上左”、“下右” 等) 及典型情况 (如在一定速度、转速、大气条件下) 进行计算, 然后适当确定 γ_0 。实际计算结果表明, 几种典型指令所得到的 γ_0 的值非常接近。

参 考 文 献

- [1] 张嗣瀛, 脉冲调宽控制系统周期平均控制力的矢量表示法, 信息与测控, 2 (1981), 9—12.

THE DECOUPLING PROBLEM OF A CONTROL SYSTEM

Zhang Siying

(North-East Institute of Technology, Shenyang)

Abstract

When a controlled rocket is rotating around its longitudinal axis in flying, the control system manoeuvres its pitching and crabbing movement. If the relevant parameters are unsuitably selected, the cross coupling problem will arise, i.e., when giving a pitching control command, some crabbing motion will follow and vice versa. In this paper, a decoupling method is presented.