第1卷 第2期
1984年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.1, No.2
April, 1984

块对角最优化分散控制

陈禹六

（清华大学）

摘　要

本文介绍了一类线性定常交连系统分散控制的设计方法；把分散控制问题处理成具有结构限制的有约束最优化问题；并提出了一种比已有设计方法要快得多的计算方法。通过两个例子的对比显示了新算法的优越性。

一、引　言

随着生产和科学技术的不断发展，控制系统的规模越来越大，因此对大系统进行稳定的分散控制也日益引起人们的重视[1][2][3]。作为分散反馈控制方法的研究，目前基本上有两类：第一类是把大系统分成低阶子系统，然后对其交互连接进行分析，用不同的方法来处理其交连部分或者进行简化设计[2][3][4][5]。第二类则是把交互连接子系统的分散控制，看作是在结构性限制条件下的有约束全局最优化问题[6][7][8]。也就是说将反馈矩阵限制成一个块对角阵，它只在子系统内部有作用，而没有子系统之间的反馈联系；但对整个系统的状态矩阵中存在的交连，则不作任何简化。这种设计方法对于存在着较强的交连耦合，用第一类设计方法设计时会产生较大误差的系统，有着很突出的优点。这也就是本文所要介绍的内容。下面将首先粗略介绍一下Geromel和Bernussou[6][7]提出的设计方法，然后详述作者提出的一种改进算法及其与Geromel和Bernussou方法的比较。

二、问题的描述

考虑一个线性定常交互连接系统S

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\,\underline{x} + B\,\underline{u}, \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \tag{1}$$

可分解成N个子系统S_1，S_2，…，S_N，并表示成

本文于1982年11月30日收到，1983年9月2日收到修改稿。

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_i = A_{ii}\underline{x}_i + B_i\underline{u}_i + \underline{h}_i(\underline{x}), \\ \underline{h}_i(\underline{x}) = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_{ij}\underline{x}_j \quad i,j=1,\cdots,N, \\ \underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i0}, \end{cases}$$

其中

$\underline{x}_i \in R^{n_i}$ 为子系统状态向量，

$\underline{u}_i \in R^{m_i}$ 为子系统控制向量，

$\underline{h}_i(\underline{x}) \in R^{n_i}$ 为交互作用向量，

$A_{ii} \in R^{n_i \times n_i}$ 为子系统状态矩阵，

$B_i \in R^{n_i \times m_i}$ 为子系统控制矩阵，

$A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$ 为子系统 S_i 与 S_j 之间的交互作用矩阵，

$A = \{A_{ij} \quad i=1,\cdots,N;\ j=1,\cdots,N\} \in R^{n\times n}$，

$B = \{B_i \quad i=1,\cdots,N\} \in R^{n\times m}$，

（为便于表述，设 B 为块对角阵，不失普遍性。）

$$n = \sum_{1}^{N} n_i \quad ; \quad m = \sum_{1}^{N} m_i .$$

所有这些矩阵都是常阵，且假设N个$\{A_{ii}, B_i\}$都是完全可控的。合成系统的状态向量和控制向量则为

$$\begin{aligned} \underline{x}^T &= [\underline{x}_1^T,\ \underline{x}_2^T,\ \cdots,\ \underline{x}_N^T], \\ \underline{u}^T &= [\underline{u}_1^T,\ \underline{u}_2^T,\ \cdots,\ \underline{u}_N^T]. \end{aligned} \tag{3}$$

各子系统的二次型性能指标可写作

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{\underline{x}_i^T Q_i \underline{x}_i + \underline{u}_i^T R_i \underline{u}_i\}dt, \tag{4}$$

其中 $Q_i \in R^{n_i\times n_i}$ 为半正定权矩阵，$R_i \in R^{m_i\times m_i}$ 为正定权矩阵，对总系统则为

$$J = \sum_{i=1}^{N} J_i . \tag{5}$$

现在我们就希望设计一组下述形式的分散控制器：

$$\underline{u}_i = -F_i \underline{x}_i \qquad i=1,\ \cdots,\ N, \tag{6}$$

它使 J_i 最小化，并保证系统（1）稳定。假如我们定义 Ω 为能在子系统水平上给出局部反馈控制的块对角矩阵的集合；亦即 Ω 包含了所有局部反馈控制的 F_i 矩阵，$F_i \in R^{m_i \times n_i}$，$i=1,\ \cdots,\ N$。或写成

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & & & & \\ & F_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & F_N \end{bmatrix}, \qquad F \in \Omega. \tag{7}$$

也就是使总系统处于这样的反馈控制约束条件下求得性能指标的最优化。可写作

$$\min_{F \in \Omega} J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u} \right\} dt. \tag{8}$$

以（1）式和　$\underline{u} = -F\underline{x}$　为其条件。且其中

$$Q = \operatorname{diag}\{Q_i\};\ R = \operatorname{diag}\{R_i\}.$$

可以证明，对任一个 $F \in \Omega$，如其闭环特征值的实部 $Re\lambda\{A-BF\}<0$，且若假设 $\underline{x}_0$ 是一个均匀分布于单位超球面上的随机向量，则可撇开初始条件对性能指标的影响，而考虑

$$\min_{F \in \Omega} J = Tr[V], \tag{9}$$

其中　$Tr[\cdot]$ 表示矩阵 $\cdot$ 的迹，$V \in R^{n \times n}$ 是一个对称正定阵，满足

$$(A-BF)^T V + V(A-BF) + F^T RF + Q = 0 \tag{10}$$

利用矩阵最小值原理[9]，其哈密尔顿函数为

$$\begin{aligned} H = {} & Tr[QP] + Tr[F^T RFP] + Tr[APV] - Tr[BFPV] \\ & + Tr[PA^T V] - Tr[PF^T B^T V] + Tr[V], \end{aligned} \tag{11}$$

其中　P 是伴随矩阵。最优化条件要求：

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \frac{\partial H}{\partial V} = 0, \\ &(2) \qquad \frac{\partial H}{\partial P} = 0, \\ &(3) \qquad \frac{\partial H}{\partial F} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

应用此条件于式(11)，并利用[9]提出的“矩阵迹算子”的特性，为求稳态最优反馈可得下式

$$[A-BF^*]^TV^*+V^*[A-BF^*]+F^{*T}RF^*+Q=0, \tag{13a}$$

$$[A-BF^*]P^*+P^*[A-BF^*]+I_n=0, \tag{13b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial F}=2(RF^*-B^TV^*)P^*=0. \tag{13c}$$

这就是下面进行分散控制设计的基本依据。

三、Geromel和Bernussou的“可行方向法”[6][7]

Geromel 和 Bernussou 要先找到一个能使总系统稳定的块对角阵F，来作为解(13)式的出发点。他们的做法是从块对角的子系统出发，先撇开子系统间的交连耦合，对

$$\dot{\underline{x}}_i=A_{ii}\underline{x}_i+B_i\underline{u}_i,$$

解得

$$\underline{u}_i=-R_i^{-1}B_i^TP_i\underline{x}_i, \tag{14}$$

其中　P_i为Riccati方程

$$A_{ii}^TP_i+P_iA_{ii}-P_iB_iR_i^{-1}B_i^TP_i+Q_i=0$$

的解。记

$$C_i\triangleq\lambda_{\max}(P_i)/\lambda_{\min}(P_i), \tag{15}$$

$$\alpha_i\triangleq\min_{\underline{x}_i}\frac{1}{2}\cdot\frac{\underline{x}_i^T(Q_i+P_iB_iR_i^{-1}B_i^TP_i)\underline{x}_i}{\underline{x}_i^TP_i\underline{x}_i}, \tag{16}$$

其中　$\lambda(P_i)$指P_i的特征值。又对子系统间的交连，取

$$h_{ij}^M=\max(h_{ij},\ h_{ji}), \tag{17}$$

其中　$h_{ij}=\|A_{ij}\|\triangleq\sqrt{\lambda_{\max}(A_{ij}^T\cdot A_{ij})}$。然后为原系统建立一个比较系统

$$\dot{W}=L_MW=(-S+CH_M)W, \tag{18}$$

其中　$S=\mathrm{diag}(\alpha_i)$,

$C=\mathrm{diag}[(C_i)^{\frac{1}{2}}]$,

$H_M=\{h_{ij}^M\}$。

接着找一个向量$\underline{\pi}=[\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N]$使矩阵$[H_M-\mathrm{diag}(\pi_i)]$渐近稳定，然后对每个子系统提高其稳定余量$\sigma_i$，亦即子系统的Riccati方程变成

$$(A_{ii}+\sigma_i I)^T P_i^* + P_i^*(A_{ii}+\sigma_i I) - P_i^* B_i R_i^{-1} B_i^T P_i^* + Q_i = 0。\qquad (19)$$

可以证明如能得到

$$\alpha_i+\sigma_i > \pi_i [C_i]^{\frac{1}{2}}, \qquad (20)$$

则此时只用块对角的子系统反馈就能使原系统稳定。而这就是他们作进一步优化的出发点（见[7]）。

这个方法在理论上有它自已的特点，但是实际上适用性还是比较窄的。首先是对交连耦合问题，Geromel和Bernussou只是指出了适用于弱耦合，而没有对π_i作任何定量的解释和限制；其次是当增加稳定储备σ_i时，（20）式右边C_i也在增长，但在理论上并没能保证左边一定比右边增长得快。在实用中，我们就遇到过根本找不到满足(20)式的反馈阵的情况。

现在，我们先假定已找到了这一出发点，也就是一个反馈阵

$$F^1=\begin{pmatrix} F_1^1 & & & 0 \\ & F_2^1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_N^1 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

所谓“可行方向法”进行优化，就是将F^1代入（13a）（13b）求得V^1、P^1，但它还不是最优值，故将此V^1、P^1代入（13c）时，$\frac{\partial H}{\partial F}\neq 0$。这就是趋向于最优值梯度矩阵，取出其中与所要求的$F\in\Omega$相对的元，而舍去其余非对角块中的元，得$D=\mathrm{block\ diag}(D_1, D_2, \cdots, D_N)\in R^{m\times n}$称之为“可行方向矩阵”。

用$[F^l-\alpha D]$代替F^l（l为迭代次数），其中$\alpha\geq 0$，且应选成$J(F^l-\alpha D)<J(F^l)$。如此多次迭代，直到性能指标已不能再改进，或D的模已接近0为止。

这个方法的优点是保留了总系统当中各子系统间的全部交连耦合关系，而又实现了分散控制。缺点在于当子系统间存在着较强的交连耦合时，可能无法直接找到那个初始的能使总系统稳定的块对角反馈矩阵；其次在进行优化时，每次迭代的步长α受到很大限制，往往只能取很小的数值，使迭代次数很多，计算工作量很大。

四、一种新的“迭代块对角化方法”

上述“可行方向”D也就是梯度矩阵$\frac{\partial H}{\partial F}$在集合$\Omega$上的投影。由于Geromel和

Bernussou 要求每次迭代都保留块对角形式，造成了 D 和 $\frac{\partial H}{\partial F}$ 间有很大差别，才使收敛变慢。为克服这个缺点，我们采取逐步实现块对角化，使这两者间的差别缩小的办法。为此，第一，在每次迭代中可行方向矩阵 D 的结构必须与当时所用的反馈矩阵 F 的形式相一致；第二，任一个 l 次迭代中，反馈矩阵 F^l 都应能稳定总系统 S——即式(1)。

众所周知，对于集中控制系统作最优化设计时，我们要检查系统的能控性指标。现在对分散控制，则不仅要满足各个子系统 $\{A_{ii}, B_i\}$ 都是能控的。且要利用 Wang 和 Davison 提出的"固定模"（fixed mode）的概念[10]作一试验，以保证所采用的这种分解方式的子系统是适合于分散控制的。具体做法是，任选一个块对角反馈矩阵，然后计算其闭环（$A-BF$）特征值；再另选一个 F，再算；…；直到所有右半平面的特征值都被改变过，就说明没有右半平面的"固定模"，也就是说这样的分散控制是可以被稳定的，这才开始进入下面的正式步骤。由于一般工程问题，如果物理上是可分散的，通常不会有好几个"固定模"；而如在上述试验中发现某个特征值一直不变，则可回到 Wang 和 Davison 的基本方法[15]，将 F 中的各个元看作变量，对该特征值 λ_i，如能证明 $\det(\lambda_i I-A+BF)$ 恒等于 0，则 λ_i 就是"固定模"，否则就不是。

下面就逐步求解块对角最优反馈。

第一步：

解总系统的代数 Riccati 方程

$$A^TV+VA-VBR^{-1}B^TV+Q=0, \tag{22a}$$

得 V，并用

$$F=R^{-1}B^TV \tag{22b}$$

算出全局最优反馈。以此 F 为初始反馈矩阵 F^j，此时 $j=1$。

第二步：

将 F^j 写成

$$F^j=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & \cdots & \cdots & F_{NN} \end{pmatrix} \qquad \text{第一次}\ j=1, \tag{23}$$

从 F^j 中去掉一个"块"，譬如说 F_{1N}；则 F^j 就成了

$$F^m=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1,N-1} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ F_{N1} & \cdots & \cdots & \cdots & F_{NN} \end{pmatrix} \qquad m=j+1,$$

计算矩阵 $\{A-BF^m\}$ 的特征值。若矩阵是稳定的，进入第三步。否则，计算与优势特征

值 λ_d（现在就是指实部为正的最大特征值）相对应的右特征向量 $\underline{V}_d$ 和左特征向量 $\underline{W}_d^T$，然后计算梯度矩阵　$M=(m_{ij})$ [11] [14]，

$$m_{ij}=Re\frac{\partial\lambda_i}{\partial F_{ij}},\tag{24a}$$

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial F_{ij}}=\begin{cases}V_{dj}\cdot\dfrac{\underline{W}_d^T\underline{b}^i}{\underline{W}_d^T\underline{V}_d} & \text{若 } F_{ij}\neq 0,\\ 0 & \text{若 } F_{ij}=0,\end{cases}\tag{24b}$$

其中 $\underline{b}^i$ 是 B 的第 i 列，而 V_{dj} 是 $\underline{V}_d$ 的第 j 个元素。然后用（$F^m-\alpha_m M$）作为新的 F^m，其中 α_m 为合适的步长，再次检查闭环 $\{A-BF^m\}$ 的特征值，不断迭代，直到所有特征值都已移到左半平面时才算修改完。

第三步：

利用可稳定的反馈矩阵 F^m，通过 Hoskins 等[12]提出的求解 Lyapunov 方程的算法，解式（13a）—（13c）；再利用一个带二次内插的单维搜索最佳步长的共轭梯度法子程序，来求得性能指标的最小值。

第四步：

从 F^m 中舍去另一"块"，如为 F_{N1}，即得到下述形式的 F^{m+1}

$$F^{m+1}=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}\cdots\cdots F_{1,N-1} & 0\\ F_{21} & F_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots & F_{2N}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ F_{N-1,1} & \ddots & \vdots\\ 0 & F_{N2}\cdots\cdots\cdots\cdots & F_{NN}\end{pmatrix}.$$

然后回到第二步，而 m 变成 $m+1$。这样一直做到获得块对角形式的 F 为止。

评述：

（1）每次迭代仅舍去一个非对角块，这就意味着最大循环数为 $N(N-1)$。

（2）因为每个循环只去掉少量几个元数，与前一次相比改变不是非常大，故步长相对说来就比较大，而迭代过程则加快了。

（3）在如何去掉非对角块的次序上，并没有什么限制。这也可以算作这个新方法的一个灵活性的方面。为了寻找最好的程序，我们曾经试过不同的次序，但没有明显的差别。

五、数字例子

本节提供两个数字例子，第一个直接从 Geromel 和 Bernussou 的文章[6]中取来。

此例中系统矩阵为

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0.5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 3 & 0 & -0.5 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right],$$

$$B=\left[\begin{array}{c:cc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

并按虚线所示划分成三个子系统。权矩阵 Q_i 和 R_i 都取作单位矩阵。

按集中控制计算的全局最优反馈矩阵 F^* 为

$$F^{*}=\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0.9004 & 0.2487 & 0.1887 & 0.1823 & 0.3117 & 0.04 \\ \hdashline 0.2761 & 0.29 & 1.143 & 0.4902 & 0.4006 & 0.1202 \\ 0.4608 & 0.2684 & 0.6536 & 2.219 & 0.2878 & -0.031 \\ \hdashline 0.6068 & 0.1366 & 0.3873 & 0.1207 & 1.184 & 0.32 \end{array}\right],$$

其性能指标 $J^*=2.718$。以此作为初始矩阵 F^1，应用我们的块对角化方法，经六个循环后得到

$$F=\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1.145 & 0.3162 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1.264 & 0.4981 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7882 & 2.224 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1.366 & 0.2269 \end{array}\right],$$

其性能指标 $J=3.007$。作为一个比较，Geromel 和 Bernussou[6] 是经 59 次迭代后 $J=3.00$ 的反馈矩阵为

$$F=\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1.21 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1.43 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.87 & 2.46 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1.58 & 0.24 \end{array}\right].$$

这两个计算都在英国 UMIST 的 PDP—10 计算机上执行后，其 CPU 时间如下示：

Geromel 和 Bernussou 算法，

初始块对角化	53.2 秒，
次最优的块对角化	101.26 秒。

我们的新方法，

用全局最优算初始反馈矩阵	2.56 秒，
次最优的块对角化	35.81 秒。

因此，从计算的观点上说，新方法显然快得多。

下面我们再看一个高阶例子。这是一个 15 阶的交叉连接电力系统的线性化模型[13].该模型有两台带水轮机的发电机和一台带汽轮机的发电机。系统矩阵如附录 1 所示。权矩阵 Q_i 和 R_i 取作单位阵。

在 PDP－10 计算机上完成的计算结果如下：

全局反馈矩阵 F^* 为：（作为初始矩阵用）

$$F^*=\left\{\begin{array}{ccccccc}
0.0508 & 5.0560 & 1.064 & 1.158 & 0.8941 & 0.0180 & 0.6332\\
-0.6364 & -5.7540 & 4.922 & 1.468 & 4.602 & 0.0284 & -0.6647\\
-0.0038 & -0.3429 & -0.0593 & -0.0244 & -0.0589 & -0.0016 & -0.0409\\
0.4620 & 32.32 & 4.651 & 1.309 & 5.125 & 0.8562 & 44.43\\
0.0040 & 0.3451 & 0.0546 & 0.0230 & 0.0578 & 0.0012 & 0.1140\\
0.0501 & 4.007 & 0.5889 & 0.1802 & 0.6518 & 0.0195 & 0.6625\\
0.2360 & 17.89 & 2.446 & 0.7430 & 2.841 & 0.0971 & 1.983
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccccccc}
-0.0419 & -0.0188 & 0.2423 & 0.0231 & 5.261 & 0.7199 & 0.1802 & 0.8717\\
-0.1798 & -0.0526 & 0.4359 & 0.0243 & 3.085 & 0.3273 & 0.1235 & 0.4634\\
0.0994 & 0.6277 & 0.2613 & -0.0019 & -0.5433 & -0.0810 & -0.0266 & -0.0919\\
-0.0770 & -0.0868 & 1.252 & 0.2398 & 44.60 & 5.973 & 1.382 & 7.298\\
0.0075 & 0.0191 & 1.189 & 0.0019 & 0.4265 & 0.0565 & 0.0130 & 0.0704\\
-0.0485 & -0.0204 & 0.1374 & 0.0284 & 8.813 & 1.460 & 1.152 & 1.504\\
-0.3265 & -0.0946 & 0.5713 & -0.7298 & 29.71 & 9.698 & 2.285 & 10.93
\end{array}\right\},$$

其性能指标 $J^*=6328$。在六个迭代块对角化循环，其中包括共 26 次可行方向的迭代运算后，次最优分散增益矩阵得到

$$F=\begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0\\ 0 & F_{22} & 0\\ 0 & 0 & F_{33}\end{pmatrix},$$

$$F_{11}=\begin{bmatrix} -0.0601 & 5.0562 & 1.0836 & 1.1788 & 0.8634\\ -0.0691 & -5.7540 & 4.8648 & 1.4118 & 4.7240\end{bmatrix},$$

$$F_{22}=\begin{pmatrix} 0.0009 & -0.0409 & -0.0996 & 0.6280 & 0.2694 \\ 0.7339 & 44.431 & -0.0764 & -0.0872 & 1.2591 \\ -0.0104 & 0.1140 & 0.0063 & 0.0176 & 1.1998 \end{pmatrix},$$

$$F_{33}=\begin{bmatrix} 0.1236 & 8.8135 & 1.4823 & 1.1799 & 1.4739 \\ -0.2933 & 29.7103 & 9.6512 & 2.2362 & 11.0024 \end{bmatrix}.$$

所用的CPU时间：为计算全局最优反馈作为初始矩阵，用4.95秒；为次最优块对角化1164.40秒；所得性能指标值为14120。如要对性能指标再略为改进一步，将需要过多的计算时间了。而把Geromel和Bernussou的方法用于这个15阶的电力系统模型时，就遇到不小的数字计算上的困难。用了44.97秒CPU时间算出一个可稳定的块对角化初始矩阵

$$F=\begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$F_{11}=\begin{bmatrix} -1090 & -89900 & 126000 & 1330 & -14510 \\ 257.4 & 24860 & -3086 & -210 & 4087 \end{bmatrix},$$

$$F_{22}=\begin{pmatrix} -1.512 & -21.11 & 19570 & 633.8 & -7.72 \\ 20.01 & 375.8 & -3211 & -33.28 & -72.0 \\ 9945 & 214.4 & 349.4 & 3.612 & 4511 \end{pmatrix},$$

$$F_{33}=\begin{bmatrix} -207.8 & -38810 & 56910 & 878.7 & -622 \\ 60.61 & 14860 & -8297 & -77.61 & 242.3 \end{bmatrix}.$$

要收敛到局部最小值，时间就长得多了。在化掉一小时CPU时间后，性能指标值只是从0.1645×10^9降到0.1629×10^9，这当然要化多得多的时间才能达到我们已求得的数值14120。所以我们可以说新方法所用的计算时间是Geromel和Bernussou方法所用时间的极小的部分。

六、结 论

1. 新的迭代块对角最优化分散控制设计，不改变A、B矩阵的任何元素，这就放松了以前有些分散控制设计方法中只允许子系统之间存在弱耦合的限制；对于B矩阵也不须限制其为块对角形式，完全可以用满矩阵进行设计。这种分散控制对于诸如以各发电厂为子系统的大电网来说，就等于是不改变电网联接和电能分配的任何情况，又不需要附加各电厂（或电站）之间的控制信号联系，只用各电厂本身的控制器而实现总系统的次最优控制。因此这种控制系统设计方法将会是很有前途的一种方法。

2. 本文提出的新方法是对 Geromel 和 Bernussou “可行方向法”的一种改进。它保留了前者一致收敛到一个局部最小值和每次迭代中保证系统稳定性的特点；又避开了前者一下子把全部约束加上，企图“一步登天”，以致于有“欲速则不达”的毛病；用逐步前进来抑制了非对角块的影响，提高了计算速度。上面两个例子充分说明了新方法的效果。而且所谓“块”的大小，也是灵活的；当计算更大规模的系统时，本文所用的“块”可能已经包含几十个元素，这就已经显得过多了；这时可改成每次去掉几个元素的小“块”。作者曾计算过一个病态很严重的20阶矩阵，最后是每次只去掉两个元素，运算才能较好地进行。（这个20阶的例子用 Geromel 和 Bernussou 的方法则完全无法求解。）

附　录　1

电力系统矩阵元素　　　　A 矩阵

A(1, 2)= 0.314159+03	A(2, 1)=-0.242249-01	A(2, 2)=-0.322929+01
A(2, 3)= 0.162980+00	A(2, 5)= 0.340985+00	A(2, 6)= 0.113810-01
A(2, 7)=-0.864848-02	A(2, 8)=-0.684552-02	A(2,11)= 0.128439-01
A(2,12)=-0.998426-02	A(2,13)=-0.712887-02	A(3, 1)=-0.213677-01
A(3, 2)=-0.676581-01	A(3, 3)=-0.304433+00	A(3, 4)= 0.250163+00
A(3, 6)= 0.147243-01	A(3, 7)=-0.884903-02	A(3, 8)= 0.554234-03
A(3,11)= 0.664316-02	A(3,12)= 0.672120-02	A(3,13)= 0.827741-02
A(4, 4)=-0.769231-01	A(5, 5)=-0.140858+01	A(6, 7)= 0.314159+03
A(7, 1)= 0.310481-01	A(7, 2)=-0.207229-01	A(7, 3)=-0.138751-01
A(7, 6)=-0.499091-01	A(7, 7)=-0.242749+01	A(7, 8)= 0.465573-01
A(7,10)= 0.159024+00	A(7,11)= 0.188614-01	A(7,12)=-0.141278-01
A(7,13)=-0.993110-02	A(8, 1)= 0.180088-02	A(8, 2)= 0.602946-02
A(8, 3)= 0.695069-02	A(8, 6)=-0.227243-02	A(8, 7)=-0.282597-01
A(8, 8)=-0.360985+00	A(8, 9)= 0.336492+00	A(8,11)= 0.471545-03
A(8,12)= 0.390225-02	A(8,13)= 0.403555-02	A(9, 9)=-0.100000+00
A(10,10)=-0.732244-02	A(11,12)= 0.314159+03	A(12,1)= 0.130472-01
A(12,2)=-0.106559-01	A(12,3)=-0.791938-02	A(12,6)= 0.619000-02
A(12,7)=-0.511231-02	A(12,8)=-0.462964-02	A(12,11)=-0.195372-01
A(12,12)=-0.887218+00	A(12,13)= 0.165403+00	A(12,15)= 0.441154+00
A(13,1)= 0.728335-02	A(13,2)= 0.410596-02	A(13,3)= 0.636214-02
A(13,6)= 0.723718-02	A(13,7)=-0.444029-02	A(13,8)=-0.930530-04
A(13,11)=-0.145205-01	A(13,12)=-0.536106-01	A(13,13)=-0.288581+00
A(13,14)= 0.247081+00	A(14,14)=-0.769231-01	A(15,15)=-0.183560+01

69 个非零元素　　156 个零元素

B矩阵

B(2, 2) = −0.227323+00	B(4, 1) = 0.769231−01	B(5, 2) = 0.140858+01
B(7, 4) = 0.162229+00	B(9, 3) = 0.100000+00	B(10,4) = −0.783733−02
B(10,5) = 0.730000−02	B(12,7) = −0.294089+00	B(14,6) = 0.769231−01
B(15,7) = 0.183560+01		

10个非零元素　　95个零元素

参 考 文 献

〔1〕 Aoki, M., On Feedback Stabilisation of Decentralised Dynamic Systems, Automatica, **8** (1972), 163.

〔2〕 Singh, M. G. and Titli, A., Systems: Decomposition, Optimisation and Control, Pergamon Press, London (1978).

〔3〕 Singh, M. G., Decentralised Control, North Holland, Amsterdam (1981).

〔4〕 Hassan, M. F. and Singh, M. G., A Robust Decentralised Controller for Linear Interconnected Dynamical Systems, Proc. IEE (1978), 125.

〔5〕 Chen Yuliu and Singh, M. G., Certain Practical Considerations in the Model-Following Method of Decentralised Control, IEE Proc., **128**, pt. D. 4 (1981).

〔6〕 Geromel, J. C. and Bernussou, J., An Algorithm for Optimal Decentralised Regulation of Linear Quadratic Interconnected Systems, Automatica, **15** (1979), 489.

〔7〕 Geromel, J. C. and Bernussou, J., Stability Approach to Robust Control for Interconnected Systems, in Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications, edited by Singh, M. G. and Titli, A., North Holland, Amsterdam (1979).

〔8〕 Chen Yuliu, Mahmoud, M. S. and Singh, M. G., An Iterative Block-Diagonalisation Procedure for Decentralised Optimal Control, UMIST Control Systems Centre report, 498.

〔9〕 Athans, M., The Matrix Minimum Principle, Information and Control, **11** (1968), 592.

〔10〕 Wang, S. H. and Davison, E. J., On the Stabilisation of Decentralised Control Systems, IEEE Trans., AC-**18** (1973), 473.

〔11〕 Armentano, V. A. and Singh, M. G., A New Approach to the Decentralised Controller Initialisation Problem, UMIST CSC report, 485.

[12] Hoskins, X. D., Meek, D. S. and Walton, D. J., On the Numerical Solution for $A'Q+QA=-C$, IEEE Trans., AC-**22**(1977), 882.

[13] Bengtsson, G. and Lindahl, S., A Design Scheme for Incomplete State or Output Feedback with Applications to Boiler and Power System Control, Automatica, **10** (1974), 15.

[14] McBrinn, D. E. and Roy, R. J., Stabilisation of Linear Multivariable Systems by Output Feedback, IEEE Trans., AC-**17** (1972), 243.

THE DESIGN OF DECENTRALISED OPTIMAL CONTROL BY BLOCK-DIAGONALISATION

Chen Yuliu

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this prper, a kind of design methods is introduced for decentralised control of linear, time-invariant interconnected systems. Here the decentralised control problem is treated as a constrained optimisation problem subjected to control structure constraints. A new algorithm is proposed, which proved much faster for computation than the existing one. Twe examples are given to show the advantages of the new algorithm.