第1卷 第2期
1984年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 1, No. 2
April, 1984

关于反馈系统的特征结构配置

杨 玲

（北京航空学院）

摘 要

本文研究了反馈系统的特征值——特征向量配置或称为特征结构配置（eigenstructure assignment）问题。文中给出了可配置条件以及反馈规律的一般表示式；当配置的特征值——特征向量对数小于系统的维数时，还给出了闭环系统其余特征值之和可以任意配置的充分必要条件。

一、引 言

特征值——特征向量是刻画系统状态响应性质的重要物理量。因此，对利用反馈实现闭环系统特征值——特征向量配置的研究具有实际的意义。

文献〔1，2〕研究了全状态反馈下的特征结构配置。其中〔1〕指明，当闭环系统特征值固定之后，其对应的特征向量可以在某个非零子空间中自由选择。输出反馈特征结构配置的研究有〔3，4〕。〔4〕虽然给出了可配置的充分必要条件，但由于中间变量的引入，使结论的意义并不十分明显，结论的形式也不便于进一步研究闭环系统的其它性质。

本文主要研究了输出反馈和固定结构状态反馈的特征结构配置。对每一种反馈形式，文中不仅给出了可配置条件，而且还给出了反馈规律的一般表示式，从而便于进一步研究闭环系统的其它性质。

考虑以下系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}, \tag{1.2}$$

其中 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$B\in\mathbf{R}^{n\times m}$，$C\in\mathbf{R}^{l\times n}$，$\operatorname{rank} B=m$，$\operatorname{rank} C=l$，以及给定的一组复共轭数值——向量对：

$$\varphi_k=\{(\lambda_1\ \mathbf{s}_1),\ (\bar{\lambda}_1\ \bar{\mathbf{s}}_1),\cdots,(\lambda_r\ \mathbf{s}_r),\ (\bar{\lambda}_r\ \bar{\mathbf{s}}_r),\ (\lambda_{2r+1}\ \mathbf{s}_{2r+1}),\cdots,(\lambda_k\ \mathbf{s}_k)\}, \tag{1.3}$$

其中 $(\lambda_i\ \mathbf{s}_i)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n, i=1,2,\cdots,r$；$(\lambda_i,\ \mathbf{s}_i)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$，$i=2r+1,\cdots,k, 1\le k\le n$；而且向

本文于1982年12月21日收到。1983年6月26日收到修改稿。

量组 $\{s_1, \bar{s}_1, \cdots, s_r, \bar{s}_r, s_{2r+1}, \cdots, s_k\}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中相互独立。

如果记　$s_i = s_{i1} + js_{i2}$，$i = 1, 2, \cdots, r$，$S = [s_{11}\ s_{12} \cdots s_{r1}\ s_{r2}\ s_{2r+1} \cdots s_k] \in \mathbf{R}^{n\times k}$，则显然有 $\operatorname{rank} S = k$。

二、输出反馈的特征结构配置

定义　对于系统（1.1）和（1.2）及给定的 φ_k 如（1.3），如果存在反馈

$$u = Ky + v \qquad \text{其中 } K \in \mathbf{R}^{m\times l}, \tag{2.1}$$

使闭环系统以 φ_k 为特征值——特征向量，则称 φ_k 是（A, B, C）可配。当 $C = I_n$ 时则简称为 φ_k 是（A, B）可配。

引理 1　设 $E \in \mathbf{R}^{n\times p}$，$G \in \mathbf{R}^{q\times s}$ 及 $H \in \mathbf{R}^{n\times s}$，则矩阵方程

$$EXG = H.$$

有解 $X \in \mathbf{R}^{p\times q}$ 的充分必要条件为

$$\begin{cases} \operatorname{rank}[E \vdots H] = \operatorname{rank} E, \\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G \\ \cdots\cdots \\ H \end{bmatrix} = \operatorname{rank} G. \end{cases}$$

而且解阵 X 的一般表示式为

$$X = E^{g_1} H G^{g_1} + (Z - E^{g_1} E Z G G^{g_1}),$$

其中　$Z \in \mathbf{R}^{p\times q}$ 为任意常数矩阵；E^{g_1}、G^{g_1} 分别表示矩阵 E、G 的广义逆即满足 $EE^{g_1}E = E$，$GG^{g_1}G = G$。

命题 1　$(\lambda s) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 是（A, B, C）可配当且仅当

$$\operatorname{rank}[B \vdots (\lambda I_n - A)s] = m \qquad \text{当 } Cs \neq 0;$$
$$(\lambda I_n - A)s = 0 \qquad \text{当 } Cs = 0.$$

证　(λ, s) 是（A, B, C）可配等价于矩阵方程

$$BKCs = (\lambda I_n - A)s$$

有解 $K \in \mathbf{R}^{m\times l}$。由引理 1 得 K 存在的充分必要条件为

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \operatorname{rank}[B \vdots (\lambda I_n - A)s] = \operatorname{rank} B = m, \\ \text{(ii)} \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Cs \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\lambda I_n - A)s \end{bmatrix} = \operatorname{rank} Cs. \end{cases}$$

显然当 $Cs \neq 0$ 时 (ii) 自然满足；当 $Cs = 0$ 时 (ii) 成为 $(\lambda I_n - A)s = 0$，而 (i) 自然满足．证毕。

当 (λs) 是复数对时，记 $\lambda = \lambda_1 + j\lambda_2$，$s = s_1 + js_2$，$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$，$S = [s_1\ s_2] \in \mathbf{R}^{n\times 2}$，并注意到 $(A + BKC)s = \lambda s$ 可以写成实数矩阵形式

$$BKCS = S\Lambda - AS.$$

因此由引理 1 得

命题2　复共轭(λs)，$(\bar{\lambda}\ \bar{s})$是(A,B,C)可配当且仅当

$$\begin{cases}\text{(i)}\quad \operatorname{rank}[B \vdots S\Lambda - AS] = m, \\ \text{(ii)}\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} CS \\ \cdots\cdots \\ S\Lambda - AS \end{bmatrix} = \operatorname{rank} CS.\end{cases}$$

以下设φ_k如(1.3)。

命题3　以下结论等价

1°　φ_k是(A,B,C)可配；

2°　$$\begin{cases}\text{(i)}\quad \operatorname{rank}[B \vdots S\Lambda - AS] = m, \\ \text{(ii)}\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} CS \\ \cdots\cdots \\ S\Lambda - AS \end{bmatrix} = \operatorname{rank} CS;\end{cases}$$

3°　$$\begin{cases}\text{(i)}\quad \text{每对}\ (\lambda_i, s_i)\ \text{均是}\ (A,B,C)\ \text{可配}, \\ \text{(ii)}\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} CS \\ \cdots\cdots \\ S\Lambda - AS \end{bmatrix} = \operatorname{rank} CS;\end{cases}$$

其中　记
$$\begin{cases}\lambda_i = \lambda_{i1} + j\lambda_{i2},\quad s_i = s_{i1} + js_{i2},\quad i = 1, 2, \cdots, r; \\ \Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} & \lambda_{i2} \\ -\lambda_{i2} & \lambda_{i1} \end{bmatrix},\quad i = 1, 2, \cdots, r; \\ \Lambda = \text{Block Diag}\{\Lambda_1 \cdots \Lambda_r\ \lambda_{2r+1} \cdots \lambda_k\}; \\ S = [s_{11}\ s_{12} \cdots s_{r1}\ s_{r2}\ s_{2r+1} \cdots s_k].\end{cases} \tag{2.2}$$

当系统是全状态反馈即输出矩阵为$C = I_n$时，命题1—3有更简单的形式。实际上这时可配置条件(ii)均自然满足。所以由命题1(或复数情况为命题2)可得出结论：(λ_i, s_i)是(A,B)可配当且仅当$B^{\perp}(\lambda_i I_n - A)s_i = 0$，即$s_i \in \operatorname{Ker}\{B^{\perp}(\lambda_i I_n - A)\}$。这里$B^{\perp}$表示矩阵$B$的任一左零矩阵，即满足$B^{\perp} \in \mathbf{R}^{(n-m)\times n}$，$B^{\perp}B = 0$而且$\operatorname{rank} B^{\perp} = n - m$。再由命题3，使$(A,B)$可配的特征结构的几何意义十分明显[1]：当闭环系统$(A + BK)$的特征值λ_i给定之后，λ_i对应的特征向量s_i可以从子空间$\operatorname{Ker}\{B^{\perp}(\lambda_i I_n - A)\}$中自由选择，$i = 1, 2, \cdots, k$；只须注意向量组$\{s_1\ s_2 \cdots s_k\}$的相互独立性，而子空间$\operatorname{Ker}\{B^{\perp}(\lambda_i I_n - A)\}$的维数不小于$m$。

命题1、2还表明，如果闭环系统$(A + BKC)$有特征值$\lambda \overline{\in} \sigma(A)$，这里$\sigma(A)$表示$A$的特征值全体，则$\lambda$对应的特征向量$s$应有$Cs \neq 0$。

引理2　设$W \in \mathbf{R}^{p\times q}$，$U \in \mathbf{R}^{p\times r}$，则

$$[I_p - WW^{g_1}]U = 0 \qquad \text{当且仅当} \quad \operatorname{rank}[W \vdots U] = \operatorname{rank} W.$$

以下均假设$(S\Lambda - AS)$是φ_k在(2.2)定义下的$n \times k$实数矩阵。

命题4　对于系统(1.1)、(1.2)及φ_k，则有

1°　φ_k是(A,B,C)可配的充分必要条件为

$$\begin{cases} \text{(i)} & \varphi_k \text{是}(A, B)\text{可配,} \\ \text{(ii)} & \operatorname{rank}\begin{bmatrix} CS \\ \cdots\cdots \\ SA-AS \end{bmatrix} = \operatorname{rank} CS; \end{cases} \tag{2.3}$$

2° 配置 φ_k 的反馈阵 $K \in \mathbf{R}^{m\times l}$ 的一般式为

$$K = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}(SA-AS)(CS)^{g_1} + Z[I_l-(CS)(CS)^{g_1}], \tag{2.4}$$

其中 $Z \in \mathbf{R}^{m\times l}$ 为任意常数矩阵;

3° 若 $k<n$, 则配置 φ_k 的闭环系统的其余 $(n-k)$ 个特征值之和 $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i$ 为实数, 而且

(i) 当 $\operatorname{rark}[CS:CB] = \operatorname{rank} CS$ 时, 有

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \equiv t_r A - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + t_r\{C(SA-AS)(CS)^{g_1}\}, \tag{2.5}$$

(ii) 当 $\operatorname{rank}[CS:CB] > \operatorname{rank} CS$ 时, $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i$ 可以任意配置.

注: (2.5)式中的 $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$ 应理解为 $\sum\limits_{i=1}^{r} (\lambda_i + \bar{\lambda}_i) + \sum\limits_{i=2r+1}^{k} \lambda_i$。

证 只证明结论 3°。因 φ_k 复共轭, 故 $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i$ 必为实数. 利用可配置条件 (2.3), 存在 $F \in \mathbf{R}^{m\times k}$, $G \in \mathbf{R}^{n\times l}$, 使

$$SA-AS = BF = GCS, \tag{2.6}$$

而

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i = t_r A - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + t_r CBK. \tag{2.7}$$

将(2.4)式代入(2.7)并利用(2.6)式得

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i = t_r A - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + t_r\{C(SA-AS)(CS)^{g_1}\} + t_r\{[I_l-(CS)(CS)^{g_1}]CBZ\}. \tag{2.8}$$

由此利用引理2即可证得结论3°。证毕。

对于系统(1.1)、(1.2)及给定的φ_k，如果矩阵CS非行满秩，那么由可配置条件(2.3)中(ii)来看，去掉CS中的某些相关行并不影响(ii)式的成立。也就是说，可以去掉某些输出反馈通路而不会影响配置φ_k。但是，如果CS行满秩，则必有$\mathrm{rank}[CS\vdots CB]=\mathrm{rank}\,CS$，这时闭环系统的$\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i$恒为常值。利用命题4可以分析在输出反馈回路中，哪些回路是配置φ_k所必须，哪些回路是配置闭环系统的$\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i$所必须。

条件(2.3)表明，反馈系统的特征结构只能从(A,B)可配的特征结构集合中取得。对于给定的φ_k，如果不满足可配置条件，则可利用(2.3)来设计最小维动态补偿器达到配置φ_k的目的。关于这一问题，本文不再讨论。

命题5　若φ_k是(A,B,C)可配，记$\mu=\mathrm{rank}(S\Lambda-AS)$，那么配置$\varphi_k$的反馈阵的秩必不小于$\mu$；而且一定有秩$\mu$的反馈阵配置$\varphi_k$。

证　由等式$BKCS=S\Lambda-AS$显然有$\mathrm{rank}\,K\geq\mu$；秩μ的反馈阵取$K_0=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}(S\Lambda-AS)(CS)^{g_1}$即可。

以上得出的可配置条件是通过矩阵秩表示的，而这些矩阵是φ_k以(2.2)式定义的，那么对φ_k中$(\lambda_i\,\mathbf{s}_i)$就有排序问题。很容易证明，$\varphi_k$的可配置性与$(\lambda_i\mathbf{s}_i)$的排序无关。同样，命题5中的常数$\mu$也是由$\varphi_k$唯一决定的，而与$(\lambda_i\,\mathbf{s}_i)$的排序无关。

三、固定结构状态反馈的特征结构配置

在前面的研究中，对反馈阵的元素未加以任何限制，都是任意待定元。如果限制反馈阵的某些元素为固定常数，而其余元素为任意待定，这样的反馈阵称为固定结构反馈阵[5]，记为K_s。下面研究对系统(1.1)采用固定结构的状态反馈

$$\mathbf{u}=K_s\mathbf{x}+\mathbf{v} \tag{3.1}$$

配置φ_k的情况。不妨假设K_s中的固定元素为零值。对固定元素为非零时也可类似地讨论。

设
$$K_s=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & K_{1,i_1} & \cdots & K_{1,i_{\alpha_1}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & K_{2,j_1} & \cdots & K_{2,j_{\alpha_2}} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & K_{m,p_1} & \cdots & K_{m,p_{\alpha_m}} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n}. \tag{3.2}$$

命题6　对于系统(1.1)及给定的φ_k，则有

1°　存在固定结构的状态反馈(3.1)、(3.2)配置φ_k的充分必要条件为

$$\begin{cases} \text{(i)} & \varphi_k \text{是}(A, B)\text{可配,} \\ \text{(ii)} & \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \widetilde{S}_i \\ \cdots\cdots \\ f_i \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \widetilde{S}_i, \quad i=1, 2, \cdots, m; \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $\widetilde{S}_1$是矩阵S的第$i_1\cdots i_{\alpha_1}$行组成的子矩阵，…，$\widetilde{S}_m$是S的第$p_1,\cdots,p_{\alpha_m}$行组成的子矩阵；而f_i^T是矩阵$F=(B^TB)^{-1}B^T(S\Lambda-AS)$的第$i$行向量，$i=1, 2, \cdots, m$；

2° 记
$$\begin{cases} \widetilde{K}_{s1}^T = [K_{1,i_1} \ \cdots \ K_{1,i_{\alpha_1}}] \in \mathbf{R}^{1\times\alpha_1}, \\ \widetilde{K}_{s2}^T = [K_{2,j_1} \ \cdots \ K_{2,j_{\alpha_2}}] \in \mathbf{R}^{1\times\alpha_2}, \\ \vdots \\ \widetilde{K}_{sm}^T = [K_{m,p_1} \ \cdots \ K_{m,p_{\alpha_m}}] \in \mathbf{R}^{1\times\alpha_m}. \end{cases}$$

则配置φ_k的反馈阵的一般式为

$$\widetilde{K}_{s_i}^T = f_i^T \widetilde{S}_i^{g_1} + Z_i^T(I_{\alpha_i} - \widetilde{S}_i \widetilde{S}_i^{g_1}), i=1, 2, \cdots, m, \tag{3.4}$$

其中 $Z_i^T \in \mathbf{R}^{1\times\alpha_i}$为任意常数矩阵，$i=1, 2, \cdots, m$；

3° 若$k<n$，则配置φ_k的闭环系统其余特征值之和$\sum\limits_{i=k+1}^{n}\lambda_i$为实数，而且

(i) 当$\operatorname{rank}[\widetilde{S}_i : \widetilde{b}_i] = \operatorname{rank}\widetilde{S}_i$，$i=1, 2, \cdots, m$时，有

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \equiv t_r A - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} f_i^T \widetilde{S}_i^{g_1} \widetilde{b}_i; \tag{3.5}$$

(ii) 若有t使$\operatorname{rank}[\widetilde{S}_t : \widetilde{b}_t] > \operatorname{rank}\widetilde{S}_t$，则$\sum\limits_{i=k+1}^{n}\lambda_i$可以任意配置；

其中 记 $B=[b_1\ b_2 \cdots bm]$，$b_i\in\mathbf{R}^{n\times1}$；$\widetilde{b}_1$是$b_1$的第$i_1,\cdots,i_{\alpha_i}$个元素组成的$\alpha_1\times1$子矩阵，…，$\widetilde{b}_m$是$b_m$的第$p_1,\cdots,p_{\alpha_m}$个元素组成的$\alpha_m\times1$子矩阵。

证 将$(A+BK_s)s_i=\lambda_i s_i$，$i=1, 2, \cdots, r, 2r+1, \cdots, k$，写成实矩阵方程

$$BK_sS = S\Lambda - AS. \tag{3.6}$$

显然(3.6)的有解条件之一是$\operatorname{rank}[B:S\Lambda-AS]=m$，即$\varphi_k$是$(A, B)$可配。同时在这一条件下，容易证得(3.6)等价于

$$K_sS = (B^TB)^{-1}B^T(S\Lambda - AS) = F, \tag{3.7}$$

再将（3.7）写成 m 个独立的非齐次线性方程组

$$\widetilde{K}_{s_i}\widetilde{S}_i = f_i^T, \quad i=1,2,\cdots,m, \tag{3.8}$$

其中 $\widetilde{K}_{s_i}^T$, $\widetilde{S}_i$ 及 f_i^T 均如命题所述。由引理1可证得结论1°和2°。再利用反馈阵 $\widetilde{K}_{s_i}^T$ 的一般式（3.4）有

$$\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i = t_r A - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \sum_{i=1}^{m}\widetilde{K}_{s_i}^T\widetilde{b}_i$$

$$= t_r A - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} f_i^T\widetilde{S}_i^{g_1}\widetilde{b}_i + \sum_{i=1}^{m}[Z_i^T(I_{\alpha_i} - \widetilde{S}_i\widetilde{S}_i^{g_1})\widetilde{b}_i]. \tag{3.9}$$

由引理2可证得结论3°。证毕。

四、例　　题

例　设系统（1.1）、（1.2）中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

要求配置的特征结构为

$$\varphi_2 = \left\{-1, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; -2, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

这时计算有

$$\operatorname{rank}[B \vdots SA - AS] = 3,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} CS \\ \cdots\cdots \\ SA-AS \end{bmatrix} = \operatorname{rank} CS = 2,$$

$$\operatorname{rank}[CS \vdots CB] > \operatorname{rank} CS.$$

因此，φ_2 是 (A, B, C) 可配，而且可以任意配置闭环系统的另外两个特征值之和 $(\lambda_3+\lambda_4)$。因为开环系统有一个不可控特征值为 (-3)，所以闭环系统的特征值 $\lambda_4 = -3$，而 $\lambda_3 \in \mathbf{R}$ 可以任意配置。

致　谢

本文在写作过程中得到高为炳教授的热情指导和帮助，在此表示感谢。

参 考 文 献

〔1〕 Sinswat, V. and Fallside, F., Eigenvalue/eigenvector assignment by state-fedback, Int. J. Contr., **26**, 3 (1977), 389—403.

〔2〕 Fahmy, M. M. and O'reilly, J., On Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-**27**, June (1982), 690—693.

〔3〕 Srinathkumar, S., Eigenvalue/eigenvactor Assignment Using output Feedback, IEEE Trans., AC-**23**, Feb. (1978), 79—81.

〔4〕 Sambandan, A. and Chandrasekharan, P. C., Eigenvector assignment using output feedback, Int. J. Contr., **34**, 6 (1981), 1143—1152.

〔5〕 高为炳，部分状态变量可测时的极点配置问题，北京航空学院科学报告会论文集，第八分册(1982)，124—129.

EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT BY FEEDBACK

Yang Ling

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper the problem concerning eigenvalue/eigenvector assignment by feedback is discussed. Conditions and representations for the feedback control law required for an assignment of eigenvalue/eigenvectors are derived. When the number of pairs of assigned eigenvalue/eigenvectors is less than the number of states, the necessary and sufficient conditions for the assignment fo the sum of the remaining eigenvalues are also shown.