

一种自适应鲁棒伺服系统的设计

陈建国

冯国楠

(国家科委北京信息管理研究所) (北京工业大学)

摘 要

针对存在变频率正弦扰动的直流伺服系统,提出一种用微处理机实现的自适应鲁棒控制器设计方法,数字仿真结果表明,该系统抑制变频率正弦扰动效果显著。

一、引 言

某些伺服系统存在变频率正弦扰动,其频率与系统跟踪速度成比例。如何克服这类扰动造成的不良影响,是一个有工程意义的研究课题。近年来,我国学者针对这一类问题做了不少工作,并取得了一些有价值的成果。

本文研究一种用微处理机实现的自适应鲁棒控制器。即:利用鲁棒调节器的基本原理^{[1]、[2]},在最优控制器的设计基础上增加一个以扰动模型为数学模型的补偿器,即伺服补偿器。一般伺服补偿器是针对单一扰动频率设计的,当扰动频率随跟踪速度的改变而变化时,系统抑制扰动的能力就要降低。本文提出的改进办法是根据不同频率不断修改补偿器参数,使其同扰动频率近似地相一致。这样,改进后的鲁棒控制器就是一种自适应鲁棒控制器。

本文首先推导有正弦扰动时控制对象的离散状态方程。然后,通过引入新的状态变量,把离散伺服问题简化成离散调节器问题。再设计伺服补偿器和镇定补偿器。接着,在普通鲁棒控制器基础上使它具有自动修改自身参数的功能。最后,利用上述方法设计了一个系统。数字仿真结果表明,此系统抑制变频率正弦扰动的效果十分显著。

二、受正弦扰动的控制对象离散状态方程

在直流伺服系统中,带负载的伺服电机是控制对象,它的状态方程是:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_1 U_2 + \mathbf{B}_2 W,$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{X},$$

其中 $\mathbf{X}$ 系 3 维向量,其元素 x_1 为输出角位置; x_2 为输出角速度; x_3 为驱动力矩产

生的角加速度

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/T_m T_l & -1/T_l \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_v/T_m T_l \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0];$$

T_m 为机电时间常数; T_l 为电磁时间常数; K_v 为速度放大系数; U_0 为微处理器输出的控制信号; W 为扰动力矩产生的角加速度。

设 W 是角频率为 ω 的正弦函数。若把它视为某个系统的输出, 则该系统的状态方程是

$$\begin{aligned} \dot{X}_w &= A_w X_w, \quad X_w(0) = X_{w0}, \\ W &= C_w X_w, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$X_w = \begin{bmatrix} x_{w1} \\ x_{w2} \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad C_w = [1 \ 0].$$

将系统 (1) 和 (2) 联立, 得到增广系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_2 C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} U_0, \\ y &= [C \ 0] \begin{bmatrix} X \\ X_w \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

U_0 来自微处理器输出, 为一段恒值函数。令采样周期为 τ , 将连续系统 (3) 离散化, 得

$$\begin{bmatrix} X[(k+1)\tau] \\ X_w[(k+1)\tau] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & H_0 \\ 0 & \phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k\tau) \\ X_w(k\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_0 \\ 0 \end{bmatrix} U_0(k\tau), \quad (4)$$

$$y(k\tau) = [C \ 0] \begin{bmatrix} X(k\tau) \\ X_w(k\tau) \end{bmatrix},$$

其中 (参见附录 1):

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ 0 & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ 0 & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix}, \quad H_0 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix}, \quad G_0 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau & \sin \omega \tau \\ -\sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix}. \quad (6)$$

将时间变量 $k\tau$ 简记为 k 。由方程 (4) 可得:

$$X(k+1) = \phi X(k) + G_0 U_0(k) + H_0 X_w(k), \quad (7)$$

$$\mathbf{X}_w(k+1) = \Phi_w \mathbf{X}_w(k), \quad \mathbf{x}_w(0) = \mathbf{x}_{w0}, \quad (8)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{X}(k). \quad (9)$$

式(7)表明: 系统受到的等效离散扰动不再是标量函数 $W(k)$, 而是向量函数 $\mathbf{X}_w(k)$. 它除了包含 $W = x_{w1}$ 外, 还包含与 W 有关的项 x_{w2} . 这样, 便把连续正弦扰动化成等效的分段恒值扰动.

考虑到微处理机在线运算存在一定的运算延迟, 它的即时控制输出值 $U_0(k)$ 实际上是前一拍的运算结果. 因此, 在 $U_0(k)$ 与不计运算延迟的微处理机理想输出 $U(k)$ 之间还应再加一个单位延迟环节, 即:

$$U_0(k) = U(k-1). \quad (10)$$

三、化伺服问题为调节器问题

令 $R(k)$ 为参考输入, $e(k)$ 为误差, 则

$$e(k) = R(k) - y(k) = R(k) - x_1(k). \quad (11)$$

引入一阶差分算子“ ∇ ”, 有

$$\nabla e(k) = e(k) - e(k-1) \quad \text{或} \quad e(k) = e(k-1) + \nabla e(k). \quad (12)$$

取 $e(k+1)$, $x_2(k+1)$, $x_3(k+1)$ 的一次差分, 由方程(5)、(7)、(10), 可得

$$\begin{aligned} \nabla e(k+1) &= \nabla R(k+1) - \nabla x_1(k+1) \\ &= \nabla^2 R(k+1) + \nabla e(k) - \varphi_{12} \nabla x_2(k) - \varphi_{13} \nabla x_3(k) \\ &\quad - h_{11} \nabla x_{w1}(k) - h_{12} \nabla x_{w2}(k) - g_1 \nabla U(k-1), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \nabla x_2(k+1) &= \varphi_{22} \nabla x_2(k) + \varphi_{23} \nabla x_3(k) + h_{21} \nabla x_{w1}(k) \\ &\quad + h_{22} \nabla x_{w2}(k) + g_2 \nabla U(k-1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \nabla x_3(k+1) &= \varphi_{32} \nabla x_2(k) + \varphi_{33} \nabla x_3(k) + h_{31} \nabla x_{w1}(k) \\ &\quad + h_{32} \nabla x_{w2}(k) + g_3 \nabla U(k-1). \end{aligned} \quad (15)$$

设 $R(k)$ 为斜坡函数, 于是

$$\nabla^2 R(k+1) \equiv 0. \quad (16)$$

定义一组新的状态变量

$$\begin{aligned} z_1(k) &= e(k-1), \quad z_2(k) = \nabla e(k), \quad z_3(k) = \nabla x_2(k), \\ z_4(k) &= \nabla x_3(k), \quad z_5(k) = \nabla U(k-1) \triangleq V(k-1). \end{aligned} \quad (17)$$

由方程(12) — (17), 可得

$$\mathbf{Z}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{Z}(k) + \mathbf{G}V(k) + \mathbf{H}\hat{W}(k), \quad (18)$$

其中 $\mathbf{Z}(k)$ 为 5 维向量, 其元素 $z_i(k)$ 由式(17)定义

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varphi_{12} & -\varphi_{13} & -g_1 \\ 0 & 0 & \varphi_{22} & \varphi_{23} & g_2 \\ 0 & 0 & \varphi_{32} & \varphi_{33} & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h_{11} & -h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{W}(k) = \nabla X_w(k) = \begin{bmatrix} \nabla x_{w1}(k) \\ \nabla x_{w2}(k) \end{bmatrix}.$$

于是, 我们便把有斜坡输入和正弦扰动的伺服问题简化成只受正弦扰动的调节器问题. 然后, 在此基础上设计鲁棒调节器. 这样设计的优点之一是仅需要引入一个积分环节. 同时利用了控制对象的一个固有的积分环节. 而在方程(1)中, 矩阵 A 中几个为“0”的元素是不变的, 因此, 这个积分环节也是不变的, 这就保证了对斜坡输入的鲁棒性.

四、鲁棒控制器的设计

鲁棒控制器包括伺服补偿器和镇定补偿器两部分.

1. 伺服补偿器

正弦扰动模型由方程(8)给出, 它的特征方程式是

$$|\lambda I - \Phi_w| = \lambda^2 - 2\lambda \cos \omega \tau + 1 = 0. \quad (19)$$

由式(21), 可建立伺服补偿器状态方程:

$$\eta(k+1) = \Lambda_2 \eta(k) + \Lambda_1 e(k), \quad (20)$$

其中

$$\eta(k) = [\eta_1(k), \eta_2(k)]^T,$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\omega\tau \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

η_1, η_2 是伺服补偿器的状态变量, 误差 $e(k)$ 为输入变量. 带鲁棒控制器的系统方程为

$$\left. \begin{aligned} Z(k+1) &= FZ(k) + GV(k) + HW\hat{W}(k), \\ \eta(k+1) &= \Lambda_2 \eta(k) + \Lambda_1 e(k), \\ e(k) &= C_0 Z(k), \\ V(k) &= K_0 \eta(k) + K_1 Z(k), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中 $C_0 = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$.

2. 镇定补偿器

设计镇定补偿器, 在这里就是确定增益矩阵 K_0 和 K_1 . 由式(21)可得

$$\tilde{Z}(k+1) = \tilde{F} \tilde{Z}(k) + \tilde{G} V(k), \quad (22)$$

其中

$$\tilde{Z}(k) = [Z^T(k) \ \eta^T(k)]^T,$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ \Lambda_1 C_0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}.$$

取二次型性能指标

$$\begin{aligned}
 J &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{ e^2(k) + q_1 [\nabla e(k)]^2 + q_2 [\nabla x_2(k)]^2 + q_3 [\eta_1(k)]^2 \\
 &\quad + q_4 [\eta_2(k)]^2 + r[V(k-1)]^2 \} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{ \tilde{\mathbf{Z}}^T(k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{Z}}(k) + r[V(k-1)]^2 \}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1+q_1 & & \\ & & q_2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & q_3 & \\ & & & & & q_4 \end{bmatrix}.$$

基于系统 (22) 和性能指标 (23), 利用熟知的离散线性二次型问题的综合方法可求出增益矩阵

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_0]$$

和最优控制

$$V(k) = \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{Z}}(k) = \mathbf{K}_1 \mathbf{Z}(k) + \mathbf{K}_0 \eta(k), \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{K}_1 = [k_{11} \ k_{12} \ k_{13} \ k_{14} \ k_{15}], \quad \mathbf{K}_0 = [k_{01} \ k_{02}].$$

五、自适应鲁棒控制器

我们讨论的是这样的伺服系统: 扰动是正弦函数, 其频率与跟踪速度成比例。因此, 要使跟踪速度改变后的系统仍具有良好的抑制正弦扰动的能力, 就需要根据改变后的速度修正伺服补偿器的参数。

已知扰动频率 f_w 与角速度 x_2 成正比, 即

$$f_w = N \cdot x_2,$$

式中 N 为比例系数, 令 $2\pi f_I$ 为 (Λ_2, Λ_1) 的固有角频率, 则

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos 2\pi f_I \tau \end{bmatrix}. \quad (25)$$

那么, 理想情况应当是

$$f_I = f_w. \quad (26)$$

f_w 可通过对 x_2 的测量而获得。

六、设计举例及数字仿真结果

给定控制对象参数 $T_m = 0.076$ 秒, $T_l = 0.008$ 秒, $K_v = 15.2$ 弧/秒·伏, 取采样周期 $\tau = 0.01$ 秒, 可得

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 9.78031 \times 10^{-3} & 3.38212 \times 10^{-5} \\ 0 & 0.944373 & 5.55266 \times 10^{-3} \\ 0 & -9.13266 & 0.250291 \end{bmatrix},$$

$$G = [3.76491 \times 10^{-3} \quad 1.02816 \quad 168.801]^T.$$

当 $f_w = 9\text{Hz}$ 时, 取权系数 $q_1 = 0.6$, $q_2 = 5 \times 10^{-6}$, $q_3 = 0.6$, $q_4 = 0.003$, $r = 3 \times 10^{-4}$. 算出增益矩阵 K_1 、 K_0 的元分别为

$$K_{11} = 61.1675, K_{12} = 207.894, K_{13} = -2.53006,$$

$$K_{14} = -0.0130604, K_{15} = -2.72036,$$

$$K_{01} = -1.85061, K_{02} = -8.00459.$$

随着扰动频率的增高, 可适当增大 q_3 和 q_4 , 当 $f_w = 12\text{Hz}$ 时, 取 $q_3 = 0.7$, $q_4 = 0.005$, K_1 、 K_0 的计算结果是

$$K_{11} = 36.0437, K_{12} = 171.066, K_{13} = -2.41999,$$

$$K_{14} = -0.012698, K_{15} = -2.68555,$$

$$K_{01} = 11.8528, K_{02} = -17.4568.$$

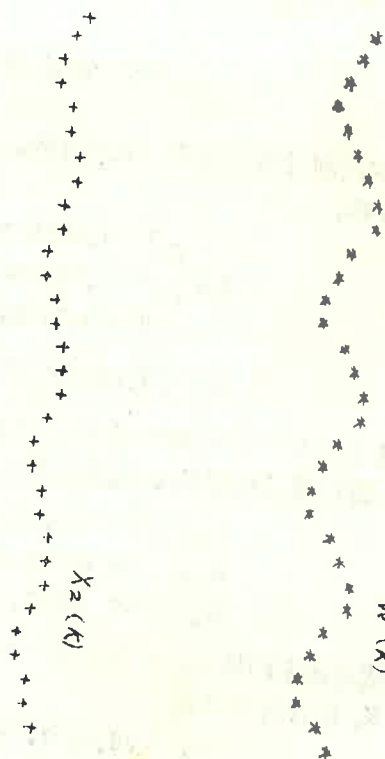
数字仿真表明: 不加鲁棒调节作用时正弦扰动影响十分明显, 如图 3 所示. 输入 $R(k)$ 为斜率 $144^\circ/\text{秒}$ 的斜坡函数, 扰动 W 频率为 12Hz , 幅度为 $180^\circ/\text{秒}^2$. 进入稳态后角速度 x_2 含有与扰动同频率的“纹波”, “纹波系数”约占 5%. 带有鲁棒控制器后, 在同样输入和扰动作用下的“波纹系数”接近于零, 如图 4 所示. 当扰动频率随跟踪速度变化时, 如图 5, $R(k)$ 为 $113^\circ/\text{秒}$, f_w 变为 9Hz , 鲁棒控制器自动调整参数, 系统稳态速度依然十分平稳. 实验中的扰动信号皆从第 15 拍加入. 详细仿真结果指出, 只要扰动频率落在控制器中的 Λ_2 矩阵参数表相应的频率范围内, 角速度最大“波纹系数”不大于 0.5%, 从而证明所设计的自适应鲁棒伺服系统对给定频率范围内正弦扰动有显著的抑制能力.

七、结束语

针对直流伺服系统低速跟踪时表现出来的变频率正弦扰动, 提出了一种自适应鲁棒伺服系统设计方法, 对于克服此类扰动造成的不利影响效果是明显的. 但是, 这个方法有一定的适用范围. 即: 当扰动频率变化很快、范围很大时, 将会出现稳定性问题, 在此情况下就要进一步研究系统稳定性.

图 3

T (10ms)	x_2 (180°/s)
15	.813436
16	.805422
17	.782015
18	.776975
19	.791296
20	.810903
21	.824954
22	.825152
23	.811608
24	.792116
25	.777899
26	.777138
27	.790259
28	.890259
29	.824328
30	.825583
31	.813001
32	.793578
33	.778579
34	.776645
35	.788876
36	.808243
37	.823604
38	.82613
39	.814358
40	.795065
41	.77935
42	.776247
43	.787544
44	.808746
45	.822785



T (10ms)	x_1 (180°/s)
15	.804228
16	.812777
17	.807467
18	.783225
19	.775185
20	.795399
21	.816809
22	.8191
23	.807175
24	.796305
25	.794337
26	.7985
27	.802609
28	.803575
29	.802279
30	.800893
31	.800546
32	.800988
33	.801476
34	.801591
35	.801397
36	.801151
37	.801066
38	.801156
39	.801311
40	.801419
41	.801431
42	.801355
43	.80125
44	.801162
45	.801141

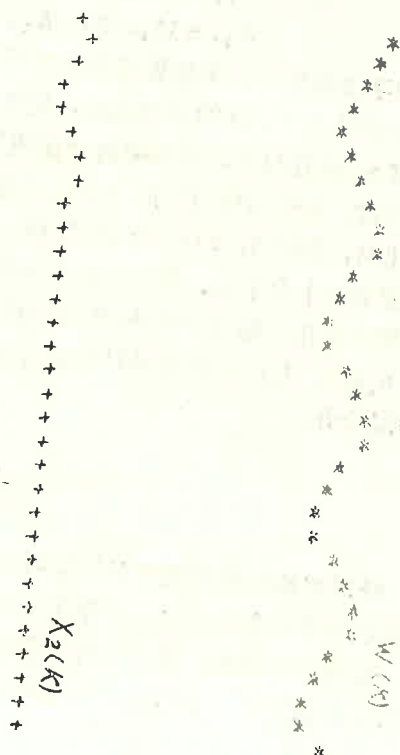
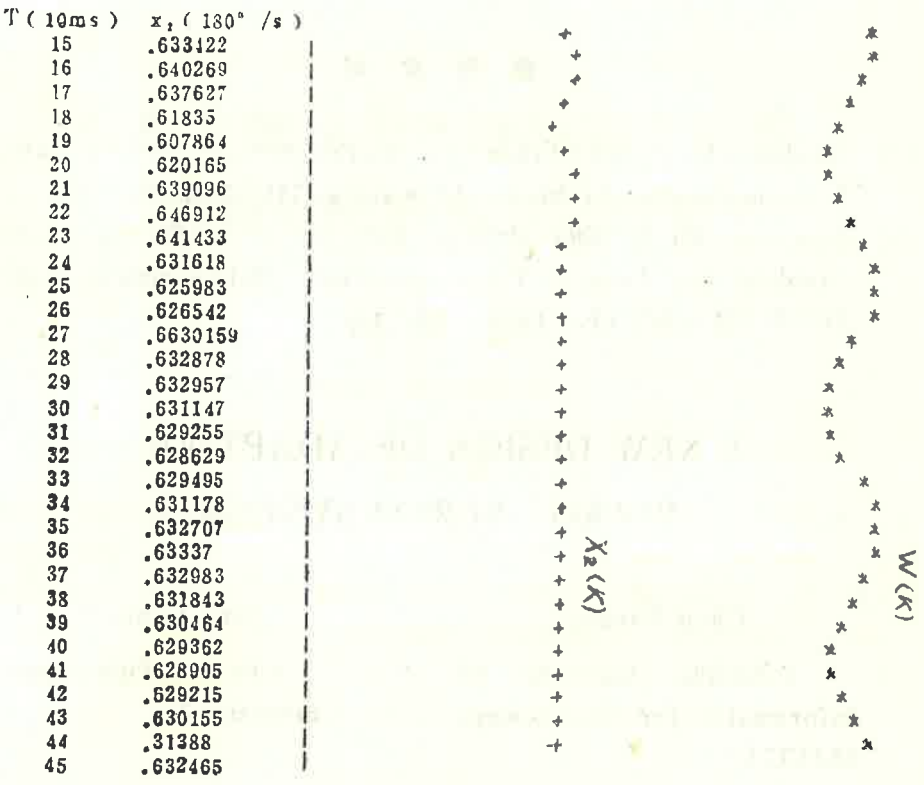


图 4 (注: 图中82应为28)

图 5



附 录

由连续系统离散化公式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi & H_0 \\ 0 & \phi_w \end{bmatrix} &= \exp \left\{ \begin{bmatrix} A & B_2 C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \tau \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} sI - A & -B_2 C_w \\ 0 & sI - A_w \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} & -(sI - A)^{-1} B_2 C_w (sI - A_w)^{-1} \\ 0 & (sI - A_w)^{-1} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

和

$$\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \int_0^\tau \left(\exp \left\{ \begin{bmatrix} A & B_2 C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} t \right\} \right) dt \right\} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

故有

$$\begin{aligned} \phi &= L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = e^{A\tau}, \\ \phi_w &= L^{-1} \{ (sI - A_w)^{-1} \} = e^{A_w \tau}, \\ H_0 &= L^{-1} \{ -(sI - A)^{-1} B_2 C_w (sI - A_w)^{-1} \}, \\ G_0 &= \left(\int_0^\tau e^{A t} dt \right) B_1. \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] Davison, E. J. and Goldenberg, A., Robust Control of a General Servomechanism Problem, *Automatica*, 11(1975), 461—471.
- [2] Davison, E. J., The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable System, *IEEE TR-AC*, 21, (1976), 25—34.

A NEW DESIGN OF ADAPTIVE
ROBUST SERVO SYSTEM

Chen Jianguo

(Beijing Institute of
Informatics for Management
SSTCC)

Fong Guonan

(Beijing Polytechnic
University)

Abstract

In this paper, a new design of an adaptive robust digital controller is proposed for a DC servo system under sinusoidal disturbance with varying frequency.

Results of digital simulation proved that this design of adaptive robust servo system is efficient in resisting the sinusoidal disturbance mentioned above.